Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2016**

Examen – Miércoles 7 de diciembre de 2016

Número de examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.
- La duración del examen es tres horas.

(I) Verdadero Falso. Total: 20 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**

Ejercicio 1: Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ y $det(A) = 2$ entonces $det(2A^tA^{-1}) = 2$.

Ejercicio 2: Los planos $\pi : x + y - z = 2$ y $\pi') \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$ son paralelos.

Ejercicio 3: Si $\{u, v, w\}$ es base de V, entonces $\{u + v - w, u - v, u + w\}$ también lo es.

Ejercicio 4: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. $T : V \to V$ es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.

Ejercicio 5: $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es invertible si y sólo si $rg(A) = n$.

Ejercicio 6: Si $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es una matriz simétrica no nula y $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ es una matriz antisimétrica no nula entonces $\{A, B\}$ es un conjunto LI.

Ejercicio 7: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y, z) = \langle (x, y, z) + (2, 1, -2), (1, 1, 1)\rangle$ es una transformación lineal.

Ejercicio 8: La transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definida por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & b - d \\ c - a & d - c \end{pmatrix}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, es inyectiva.

Ejercicio 9: Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $N(T) = Im(T)$, y sea $\mathcal{B}$ una base cualquiera de V. Entonces el producto de ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ con sí misma (esto es, ${}_{\mathcal{B}}(T)^2_{\mathcal{B}}$) es la matriz nula.

Ejercicio 10: Todo sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas es compatible determinado.

(II) Desarrollo. Total: 80 puntos

Ejercicio 1: (20 puntos)

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

a) Discuta el rango de A según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: Buscamos una forma escalerizada de la matriz A; por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1-\alpha^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+3 \end{pmatrix}.$$

En el primer paso se intercambiaron $F1$ y $F3$, en el segundo paso se reemplazó $F3$ por $F3 - \alpha F1$, y en el tercer plazo se reemplazó $F3$ por $F3 - 2F2$.

Conclusión:

- Si $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$ entonces el rango de A es 3.
- Si $\alpha = \sqrt{3}$ o $\alpha = -\sqrt{3}$ entonces el rango de A es 2.

b) Para $\alpha = 1$ la inversa de A es:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2: (30 puntos)

Considere dos subespacios, V_1 y V_2, de un espacio vectorial V.

a) Defina la suma de subespacios $V_1 + V_2$. ¿Cuándo la suma se llama suma directa?

Solución: Ver Teórico.

b) Suponga que $V = V_1 + V_2$. Pruebe que $V = V_1 \oplus V_2$ si y sólo si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

Solución: Ver Teórico.

Considere $V_1 = \{(x, y, z, t) : x - 2y + z = 0,\ t = 0\}$ y $V_2 = \{(x, y, z, t) : x - y - 2t = 0,\ z - y = 0\}$, subespacios de $\mathbb{R}^4$.

c) Halle una base de V_1 y una base de V_2.

Solución:

- Los elementos de V_1 son de la forma $(2y - z, y, z, 0)$, con $y, z \in \mathbb{R}$, de manera que una base de V_1 es

$$B_1 = \{(2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\}.$$

- Los elementos de V_2 son de la forma $(y+2t, y, y, t)$, con $y, t \in \mathbb{R}$, de manera que una base de V_2 es

$$B_2 = \{(1,1,1,0), (2,0,0,1)\}.$$

d) Halle $V_1 + V_2$. ¿Es suma directa?

Solución: $V_1 + V_2$ queda caracterizado por una base, y esta puede obtenerse de $B_1 \cup B_2$ sacando los elementos que son combinaciones lineales del resto. Por ejemplo

$$B = \{(2,1,0,0), (-1,0,1,0), (2,0,0,1)\}$$

es una base de $V_1 + V_2$. La suma no es suma directa porque la unión $B_1 \cup B_2$ no es una base de $V_1 + V_2$.

Otra forma de verificar que la suma no es directa: Calculamos

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{(x,y,z,t) : x - 2y + z = 0,\ t = 0,\ x - y - 2t = 0,\ z - y = 0\} \\ &= \{(x,x,x,0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,1,0)] \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3: (30 puntos)

a) Pruebe que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que:
$T(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T(x+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $T(x^2-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,
$T(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $T(x^3-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución: El conjunto $\mathcal{C} = \{2, x+1, x^2-1, x^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$. De manera que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ que cumple las primeras cuatro condiciones. Resta verificar que la última condición es compatible con las anteriores:

$$T(x^3-1) = T(x^3) - \frac{1}{2}T(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Obtenga una base de $N(T)$. ¿Es T inyectiva?

Solución: Consideremos un polinomio general de $\mathbb{R}_3[x]$ desarrollado en la base $\mathcal{C}$, $p(x) = ax^3 + b(x^2-1) + c(x+1) + d2$, y analicemos la condición

$$T(ax^3 + b(x^2-1) + c(x+1) + d2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Queda:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde resulta $b = 0, c = 0, 2d = -a$. De manera que los elementos de $N(T)$ son de la forma $a(x^3-1)$, y por lo tanto $B_1 = \{x^3-1\}$ es una base de $N(T)$. T no es inyectiva porque $N(T) \neq \{0\}$.

c) Obtenga una base de $Im(T)$. ¿Es T sobreyectiva?

Solución: $Im(T) = \left[\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right]$. Es fácil ver que una base de $Im(T)$ es:

$$B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

De acá resulta que T no es sobreyectiva.

d) Considere la base $\mathcal{A} = \{1, x, x^2-1, x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$, y la base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Halle ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

Solución: Se cumple:

- $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $T(x) = T(x+1) - T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $T(x^2-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- $T(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Con esto queda:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$