Ejercicio 2

a) Cómo se vio en el curso es fácil ver que la transferencia queda $-L = -k\omega_0 \dfrac{s+3\omega_0}{(s-100\omega_0)^2} \implies L(j\omega) = k\omega_0 \dfrac{j\omega + 3\omega_0}{(j\omega - 100\omega_0)^2}$.

Para el diagrama de Bode vemos primero como se comporta el sistema para frecuencias bajas ($\omega \ll 3\omega_0$). En este caso $L(j\omega) \simeq \dfrac{3k}{10^4}$ que tiene módulo constante y argumento 0.

Luego tenemos un cero de parte real negativa ($-3\omega_0$), que hace subir el diagrama de módulo a $20db/dec$ y la fase en $\dfrac{\pi}{2}$. Finalmente el polo doble real positivo en $100\omega_0$ hace que el módulo baje a $20db/dec$ y que la fase suba π de $\dfrac{\pi}{2}$ a $3\dfrac{\pi}{2}$. En la figura 1 mostramos el diagrama hecho.

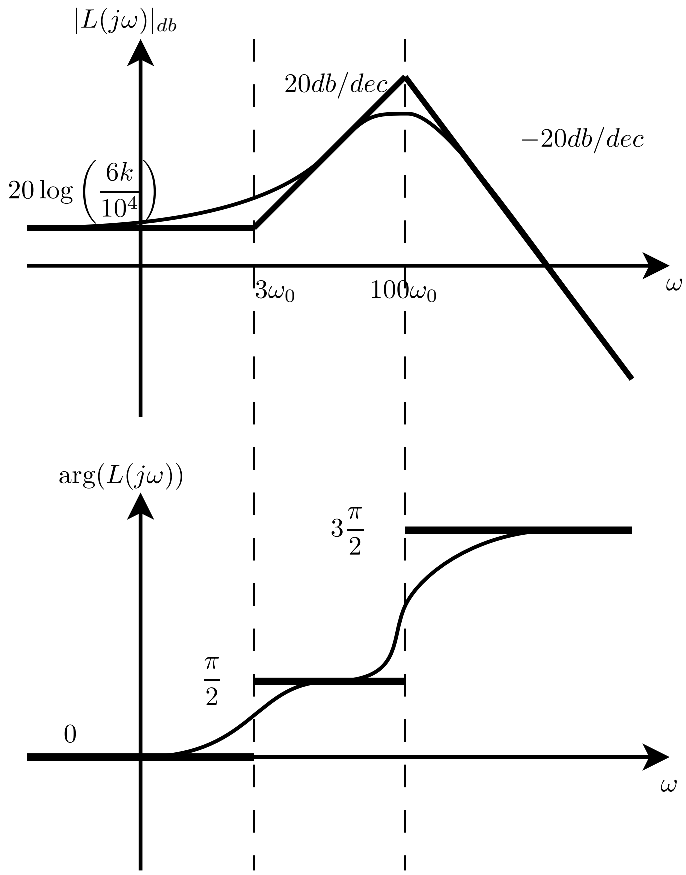

Figura 1: Diagrama de Bode

El diagrama de Nyquist lo realizamos en función del diagrama de Bode y se muestra en la figura 2

b) La condición de Barkhausen dice que un sistema realimentado oscila cuando se cumple que $\exists \omega_1 / L(j\omega_1) = -1$.

Impongamos dicha condición:

$$L(j\omega_1) = k\omega_0 \frac{j\omega_1 + 3\omega_0}{(j\omega_1 - 100\omega_0)^2} = -1 \implies k(j\omega_1 + 3\omega_0)\omega_0) = -(10^4\omega_0^2 - \omega_1^2 - 200j\omega_1\omega_0)$$

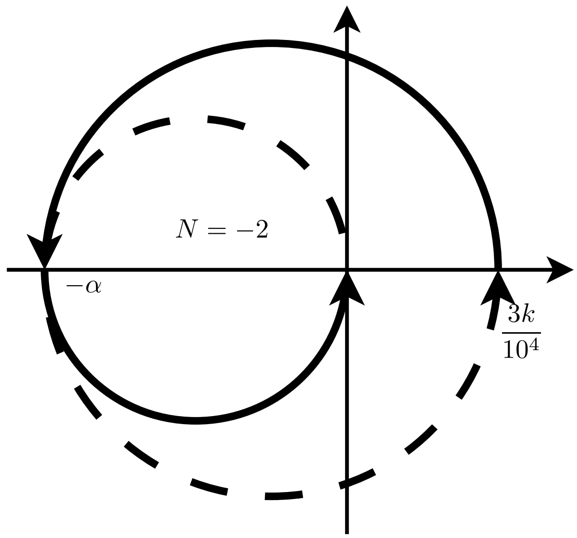

Figura 2: Diagrama de Nyquist

. Igualando partes real e imaginaria llegamos a las siguientes condiciones:

En parte imaginaria: $k = 200$

En parte real: $3k\omega_0^2 = \omega_1^2 - 10^4\omega_0^2 \overset{k=200}{\Longrightarrow} 600\omega_0^2 = \omega_1^2 - 10^4\omega_0^2$
$\Longrightarrow \omega 1 = \sqrt{600 + 10^4}\omega_0 = 10\sqrt{106}\omega_0 \simeq 103\omega_0$

La primera condición nos da la condición de oscilación ($k = 200$), es decir, condición que se debe cumplir para que el sistema oscile a alguna frecuencia y la segunda nos da la frecuencia de oscilación, es decir, la frecuencia a la cual oscila el sistema en caso de cumplirse la condición ($\omega 1 = 103\omega_0$).

c) Teniendo el diagrama de Nyquist hecho sólo nos resta ver que condición debe cumplirse para que el sistema sea estable. Ltiene dos polos con parte real positiva, por lo que $P = 2$. Sabemos que para que el sistema sea estable, el diagrama de Nyquist no debe pasar por -1 y además se debe cumplir que $Z = N + P = 0$.

Como $P = 2$ entonces N debe ser -2 para que el sistema sea estable. Definiendo $-\alpha$ como el punto en el cual el diagrama de Nyquist corta al semieje real negativo (mostrado en la figura 2). Tiene que cumplirse que $\alpha > 1$ para que $N = -2$ y el sistema sea estable BIBO.

Haciendo un planteo similar al de la condición de Barkhausen, podemos ver que condición debe cumplir k para que el sistema sea estable.

$$L(j\omega_1) = k\omega_0 \frac{j\omega_1 + 3\omega_0}{(j\omega_1 - 100\omega_0)^2} = -\alpha \implies k(j\omega_1 + 3\omega_0)\omega_0) = -\alpha(10^4\omega_0^2 - \omega_1^2 - 200j\omega_1\omega_0)$$

Igualando partes imaginarias podemos hallar $k = 200\alpha$. Como α debe ser mayor que 1 para que el sistema sea estable entonces el sistema es estable si $k > 200$

d) Primero calculamos la relación entre $E(s)$ y $U(s)$: $E(s) = \dfrac{1}{1 + L(s)}U(s)$, donde $U(s) = \dfrac{M}{s}$. Con esto podemos hallar $E(s)$ y si estamos en las condiciones del teorema del valor final lo podemos aplicar. Primero asumimos que si.

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{M}{1+L(s)} = \frac{M}{1+\frac{3k}{10^4}} < \frac{M}{10} \implies 10 < 1 + \frac{3k}{10^4} \implies k > 3\times 10^4$$

Cuando $k > 3\times 10^4$ se cumple el criterio de Nyquist ($k > 200$) por lo que $1 + L(s)$ no tiene ceros en el semiplano derecho por lo que $sE(s) = \dfrac{M}{1+L(s)}$ no tiene polos en $\mathcal{C}^+$ por lo que estamos en las condiciones del teorema del valor final y por lo tanto vale el valor de régimen calculado para $e(t)$ por lo que la condición $k > 3\times 10^4$ es válida