Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2016**

Cuarto parcial – Sábado 19 de noviembre de 2016

Número de parcial	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del parcial es 3 horas.
- El puntaje total es 30 puntos.

(I) Verdadero Falso. Total: 6 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**

Ejercicio 1: Si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es sobreyectiva y $S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$ es inyectiva entonces $S \circ T$ es sobreyectiva.

Ejercicio 2: Sea V un espacio vectorial tal que $dim(V)$ es **impar**. Existe $T : V \to V$ tal que $N(T) = Im(T)$.

Ejercicio 3: A y B son dos matrices semejantes si y sólo si $det(A) = det(B)$.

Ejercicio 4: $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $T(M) = M^2$ es una transformación lineal.

Ejercicio 5: Sean $S, T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Si existen dos bases $\mathcal{A}$ de V y $\mathcal{B}$ de W tales que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$ entonces $S = T$.

Ejercicio 6: Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Entonces $V = Im(T) \oplus N(T)$.

(II) Desarrollo. Total: 24 puntos

Ejercicio 1: (6 puntos)

Sea $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por: $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ -p'(0) & p(1) \end{pmatrix}$

a) Obtenga una base de $N(T)$.

Solución: Un polinomio genérico de $\mathbb{R}_4[x]$ es de la forma $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$. De manera que si $T(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces debe cumplirse:

- $p(0) = 0 \Rightarrow e = 0.$
- $p'(0) = 0 \Rightarrow d = 0.$
- $p(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0.$

Por lo tanto $p \in N(T)$ si y sólo si es de la forma $p(t) = a(t^4 - t^2) + b(t^3 - t^2)$. Entonces una base de $N(T)$ es $\mathcal{A} = \{t^4 - t^2, t^3 - t^2\}$.

b) Obtenga una base de $Im(T)$.

Solución: Está claro que todo elemento de $Im(T)$ es de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}$, de manera que una base de $Im(T)$ es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 2: (6 puntos)

Sean $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, dos transformaciones lineales con $n < m$.

a) Probar que T no es sobreyectiva.

Solución: Supongamos que T es sobreyectiva. Entonces $Im(T) = \mathbb{R}^m \Rightarrow dim(Im(T)) = m$. Por el Teorema de las Dimensiones: $n = dim(\mathbb{R}^n) = dim(N(T)) + dim(Im(T)) = dim(N(T)) + m$, y eso es absurdo pues $n < m$. Por lo tanto T no es sobreyectiva.

b) Probar que S no es inyectiva.

Solución: Supongamos que S es inyectiva. Entonces $N(S) = \{0\} \Rightarrow dim(N(S)) = 0$. Por el Teorema de las Dimensiones: $m = dim(\mathbb{R}^m) = dim(N(S)) + dim(Im(S)) = dim(Im(S)) \leq n$, y eso es absurdo pues $n < m$. Por lo tanto T no es inyectiva.

Ejercicio 3: (6 puntos)

a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + 1,$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x + 1, \qquad T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2x^2 + 2x + 2$$

Solución: Una transformación lineal $T : V \to W$ queda definida de manera única por la acción sobre una base de V. De manera que las cuatro primeras condiciones definen a T de manera única. Sólo resta verificar que la última condición es compatible con las anteriores. Usando linealidad:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= x^2 + (x^2 + 1) + x + (x + 1) = 2x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

que es precisamente la última condición.

b) Consideremos la base $\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ y la base $\mathcal{B} = \{x^2, x + 1, 2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$.

Solución:

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

c) Calcular $T\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Solución: Usando linealidad se tiene:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} &= 2T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 3(x^2+1) + 4x + 5(x+1) = 5x^2 + 9x + 8. \end{aligned}$$

Ejercicio 4: (6 puntos)

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal.

a) Defina el núcleo $N(T)$ de T.

b) Pruebe que $N(T)$ es un subespacio de V.

c) Pruebe que T es inyectiva si y sólo si $N(T) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Solución: Ver Teórico.