1 - Un teorema de aproximación.

Sea $\left[V, <,>\right]$ un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $S = \left\{\varphi_o, \dots, \varphi_n, \dots\right\}$ un sistema ortonormal.

Sea $f \in V$. Queremos aproximar f por combinaciones lineales de elementos de S. Sea t_n dado por

$$t_n = \sum_{k=o}^{n} b_k \varphi_k$$

Usemos la norma de V que proviene del producto interno para medir el error al aproximar $f \in V$ mediante t_n, esto es $\| t_n - f \|$.

Elegiremos las constantes de modo que el error sea mínimo.

La situación más simple consiste en elegir $f = t_n$.

En ese caso, $<f, \varphi_m> = <\sum_{k=o}^{n} b_k \varphi_k, \varphi_m> = \sum_{k=o}^{n} b_k <\varphi_k, \varphi_m> = b_m$

puesto que $<\varphi_k, \varphi_m> = 0$ si $k \neq m$ y $<\varphi_k, \varphi_m> = 1$ si $k = m$.

El siguiente teorema muestra que esta elección de los coeficientes es óptima en caso más general.

<u>Teorema</u>:

Sea $S_n = \sum_{k=o}^{n} c_k \varphi_k$, $t_n = \sum_{k=o}^{n} b_k \varphi_k$, donde $c_k = <f, \varphi_k>$

y los b_k son números complejos arbitrarios. Entonces

$$\| f - S_n \| \leq \| f - t_n \|$$

Además, la igualdad se verifica sii, $b_k = c_k$ para $k = 0,\ldots,n$.

Demostración:

Afirmación:

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |b_k - c_k|^2$$

Esta afirmación implica el teorema si observamos que

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2$$

Para demostrar la afirmación escribimos:

$$\|f - t_n\|^2 = <f - t_n, f - t_n> = \|f\|^2 - <f,t_n> - <t_n,f> + \|t_n\|^2$$

donde

$$\|t_n\|^2 = <\sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k \, , \sum_{j=0}^{n} b_j\varphi_j> = \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2$$

$$<f,t_n> = <f, \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k> = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k <f,\varphi_k> = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k$$

Pero como $\overline{<f,t_n>} = <t_n,f>$ tenemos $<t_n,f> = \sum_{k=0}^{n} b_k \bar{c}_k$

En resumen:

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k c_k - \sum_{k=0}^{n} b_k \bar{c}_k + \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2$$

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (b_k - c_k)(\bar{b}_k - \bar{c}_k) - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2$$

o sea

$$\|f - t_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |c_k - b_k|^2$$

como queríamos.

Corolario: Desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

Denotemos $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k$

Observación:

La desigualdad de Bessel puede escribirse como:

$$\|S_n(f)\| \leq \|f\|$$

Definición:

Decimos que $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k$ es la serie de Fourier de f cuando $c_k = <f, \varphi_k>$. A veces escribiremos para abreviar:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k$$

Definición:

Decimos que el sistema ortonormal s es completo en V cuando $\| S_n(f) - f \| \to 0$ con $n \to \infty$, para todo $f \in V$.

Observación:

S es completo ssi vale la Igualdad de Parsenal

$$\| f \|^2 = \sum_{k=0} |c_k|^2 \qquad \forall\, f \in V$$

2 - El espacio L[a,b]

Hasta aquí solo hemos usado la estructura general de espacio vectorial complejo con producto interno. En lo que sigue, V será un espacio de funciones y < , > vendrá dado por una integral.

Definición: (Función continua a trozos o función casi continua)

Sea f: [a, b] → c una función para la cual existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n$ de [a, b] de tal modo que

a) f es continua excepto en esos puntos

b) ∀i, existen y son finitos los límites

$$f\left(x_i^+\right) \overset{def}{=} \lim_{t \to x_i^+} f(t)$$

$$f\left(x_i^-\right) \overset{def}{=} \lim_{t \to x_i^-} f(t)$$

(Si $x_i = a$ ó $x_i = b$ sólo pedimos que uno de los límites laterales exista y sea finito.

Si f verifica las condiciones antedichas decimos que f es continua a trozos en [a, b].

Observación:

a) Si f es continua a trozos en [a, b], entonces es integrable Riemann en [a, b].

b) El espacio de las funciones complejas continuas a trozos en [a, b] tiene estructura de espacio vectorial complejo, el cual será denotado por $\tilde{c}[a, b]$.

c) Si $f, g \in \tilde{c}[a, b]$ entonces $f.g \in \tilde{c}[a, b]$.

d) Podemos definir una forma sesquilineal (o sea, lineal en la primer variable y conjugada lineal en la segunda), simétrica < , > en $\tilde{c}[a, b]$ dada por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)dt$$

A ésta forma bilineal le falta la propiedad $\langle f, g\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ para ser un producto escalar (¿por qué?)

e) Si restringimos la forma a c[a, b], se puede verificar que ésta es un producto interno.

Para resolver las dificultades observadas en d) introducimos el concepto de función casi nula.

Definición:

Una función $f \in \tilde{c}[a, b]$ se dice casi nula si $f(x) = 0$ excepto en un número finito de puntos de [a, b].

Observación:

$$< f, f > = 0 \text{ si y sólo si } f \text{ es casi nula}$$

Definición:

Decimos que $f \sim g$ (f es equivalente a g) sii $f - g$ es una función casi nula.

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\tilde{c}[a,b]$.

Llamaremos $L[a, b]$ al conjunto de las clases de equivalencia de funciones de $\tilde{c}[a, b]$ módulo la relación de equivalencia recién definida.

Si indicamos por $[f]$ la clase de equivalencia de f, definimos en $L[a, b]$ las siguientes operaciones:

$$[f] + [g] = [f + g]$$
$$\alpha[f] = [\alpha f] \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Es fácil ver que $L[a, b]$ es un espacio vectorial con estas operaciones y que la forma sesquilineal $< , >$ se puede definir en $L[a, b]$ como

$$< [f].[g] > = \int_a^b f(t)\bar{g}(t)dt$$

Las observaciones anteriores permiten probar que $< , >$ es un producto interno en $L[a, b]$. A veces, abusando de la notación, escribiremos $< f, g >$ en vez de $< [f], [g] >$.

3 - Series de Fourier en $[-\pi, \pi]$

Definiremos los sistemas siguientes:

$$U = \left\{ e_n \;/\; e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \qquad , n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$T = \left\{ \psi_n / \psi_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} , \psi_{2n-1}(t) = \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} , \psi_{2n}(t) = \frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1 \right\}$$

Teorema:

Los sistemas U y T son ortonormales.

Demostración:

$$<e_k, e_j> = \int_{-\pi}^{\pi} e_k(t)\bar{e}_j(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt} e^{-ijt}}{2\pi} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-j)t}}{2\pi} dt = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$$

o sea, U es ortonormal.

Las relaciones:

$$e^{int} - e^{-int} = 2\, i \operatorname{sen} nt$$
$$e^{int} + e^{-int} = 2 \cos nt$$

permiten probar inmediatamente que T es ortonormal. (Hágalo !)

Notación:

Cuando usamos el sistema ortonormal complejo U, escribimos

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Observar que estos c_n no son los coeficientes definidos en la sección 1.

Para calcular los c_n, ponemos

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(t)$$

como $\langle f, e_n \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)e^{-int}dt}{\sqrt{2\pi}}$

obtenemos $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$

Análogamente, cuando usamos el sistema ortonormal real T, escribimos

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \text{sen } nt$$

donde los coeficientes se calculan mediante las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{sen}(nt)dt$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

(Hágase este cálculo como ejercicio !)

Los sistemas U y T están relacionados por el simple pero importante

Teorema:

Los subespacios generados por U y T coinciden.

Demostración:

Sea f perteneciente al subespacio generado por T. Entonces existe n > 0 tal que

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \text{sen } kt =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + \frac{b_k\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)}{2i} =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{ikt}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - ib_k\right) \qquad \text{si} \qquad k > 0$$

$$c_k = \frac{1}{2}\left(a_k + ib_k\right) \qquad \text{si} \qquad k < 0$$

o sea

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

donde c_k se calcula como arriba para $k \neq 0$ y donde $c_o = \dfrac{a_o}{2}$.

Luego f está generado por elementos de U.

El mismo procedimiento permite mostrar que si f está generado por elementos de U, lo está también por elementos de T. hágase esto como ejercicio.

Observación:

Para terminar esta sección observemos que como consecuencia de la desigualdad de Bessel tenemos que las series

$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$ son convergentes y por lo tanto, si $f \in L[-\pi, \pi]$ tendremos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{sen } nt\, dt = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt = 0$$

Más tarde demostraremos que los sistemas ortonormales definidos son completos en $L[-\pi, \pi]$ o, lo que es equivalente, la igualdad

$$\frac{|a_o|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

4 - Representaciones integrales.

Sea $f \in [-\pi, \pi]$

En esta sección escribiremos la reducida n-ésima de la serie de Fourier de f en x, la cual será denotada por $S_n(x)$ o por $S_n(f)(x)$, indistintamente. También encontraremos una expresión integral para la media aritmética de $S_n(x)$.

De ahora en más supondremos, sin perder generalidad, que f será definida en todo $\mathbb{R}$ y es periódica de período 2π.

Ahora introduciremos unas funciones muy importantes denominadas núcleo de Dirichlet y núcleo de Féjer.

Núcleo de Dirichet.

Se define como D_n donde

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

observar que

$$D_n(t) = \frac{e^{-int}}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = \begin{cases} e^{-int}\,\dfrac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} & , t \neq 0 \\[2ex] \dfrac{2n+1}{2\pi} & , t = 0 \end{cases}$$

Consecuentemente, si $t \neq 0$ tendremos:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t}\, e^{i\frac{t}{2}}\,(e^{i(2n+1)t} - 1)}{e^{i\frac{t}{2}}\,(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}})} \quad \text{si } t \neq 0$$

de donde obtenemos

$$\boxed{D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\,(\frac{t}{2})}}$$

<u>**Núcleo de Féjer**</u>.

Se define como $F_n(t)$ donde

$$F_n(t) = \frac{D_o(t) + \ldots + D_n(t)}{n + 1}$$

donde D_n es el núcleo de Dirichet.

Hagamos el cálculo. Primero observemos que

$$F_n(0) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} \frac{2k + 1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi(n+1)} \sum_{k=o}^{n} (2k + 1) = \frac{n+1}{2\pi}$$

Supongamos ahora que $t \neq 0$.

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\,(1 + \frac{1}{2})t}{\operatorname{sen}\,(\frac{t}{2})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)\operatorname{sen}(\frac{t}{2})} \sum_{k=o}^{n} \operatorname{sen}\,(n + \frac{1}{2})t =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)\operatorname{sen}\,(\frac{t}{2})} \operatorname{Im}\left\{ \sum_{k=o}^{n} e^{i(k+\frac{1}{2})t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n+1)\operatorname{sen}\,(\frac{t}{2})} = \operatorname{Im}\left\{ e^{i\frac{t}{2}} \left[\sum_{k=o}^{n} e^{ikt} \right] \right\}$$

Observemos ahora que

$$e^{i\frac{t}{2}} \sum_{k=o}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} e^{i\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}} - e^{-i\frac{n+1}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} e^{i\frac{n+1}{2}t} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\,(\frac{n+1}{2})t}{\operatorname{sen}\,(\frac{t}{2})} e^{i\frac{n+1}{2}t}$$

Y por lo tanto

$$\operatorname{Im}\left\{ \frac{\operatorname{sen}\,\frac{n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\,(\frac{t}{2})} e^{i\frac{n+1}{2}t} \right\} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\,\frac{t}{2}}$$

Finalmente obtenemos:

$$\boxed{F_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\operatorname{sen}^2(\frac{n+1}{2}t)}{\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})} \quad \text{si } t \neq o}$$

Definamos Γ_n como

$$\Gamma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x)$$

Propiedades de los núcleos de Dirichet y Féjer.

Sea f, periódica de período 2π, continua a trozos

1) D_n , F_n son funciones pares y periódicas de período 2π.

2) $S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt.$

3) $\Gamma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(x-t)dt.$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1$

5) Sea $\delta > 0$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ F_n(t) \ / \ \delta \le |t| \le \pi \right\} = 0$$

Nota:

Las propiedades 2) y 3) se conocen como representaciones integrales.

Demostración:

1) Ejercicio.

2)

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right]e^{ikx} =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right\}dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

Como f y D_n son periódicas de período 2π y D_n es par, obtenemos:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)D_n(t)dt$$

3) Es consecuencia inmediata de la definición de Γ_n y de 2).

4) Es consecuencia de tomar $f(t) = 1 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$ y aplicar las propiedades 2) y 3).

5)

$$0 \le F_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\,\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} \le \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \le$$

$$\leq c \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ si } n \to +\infty$$

Donde $c = \dfrac{1}{2\pi \operatorname{sen}^2(\frac{\delta}{2})}$

5 - Teoremas de convergencia.

Teorema de Féjer.

Sea f continua en $[-\pi, \pi]$. Entonces

Γ_n converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a f

Demostración:

$$\Gamma_n(t) - f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) f(t-s) ds - f(t) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) ds =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} F_n(s) \Big[f(t-s) - f(t) \Big] ds$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t' - t''| < \delta$ entonces $|f(t') - f(t'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto

$$|\Gamma_n(t) - f(t)| \leq \int_{-} F_n(s) |f(t-s) - f(t)| dt + \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_n(s) |f(t-s) - f(t)| dt$$

$$\leq \int_{-} F_n(s) \frac{\varepsilon}{2} ds + \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} 2M \, F_n(s)$$

donde $M = \sup \Big\{ |f(s)|, \ s \in [-\pi, \pi] \Big\}$

Sea $R_n = \sup \Big\{ F_n(s), \ \delta \leq |s| \leq \delta k \Big\}$

Tendremos entonces, usando también la propiedad 4),

$$|\Gamma_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 4\pi M R_n.$$

Por la propiedad 5), podemos elegir $N > 0$, tal que si $n \geq N$, entonces $4\pi M R_n < \frac{\varepsilon}{2}$, lo cual garantiza la convergencia uniformada Γ_n hacia f.

Teorema.

U es completo en $L[-\pi, \pi]$

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ que consideraremos fijo durante el resto de la demostración.

Sea $g: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ continua tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{3^2}$$

Para construir una función g en esas condiciones, denotemos $x_1, \dots, x_p$ los puntos de discontinuidad de f.

Sea $M = \sup \left\{ |f(t)|,\ t \in [-\pi, \pi] \right\}$

Sea $\delta > 0$ tal que

$$\delta\, 8\, pM^2 < \frac{\varepsilon^2}{3^2}$$

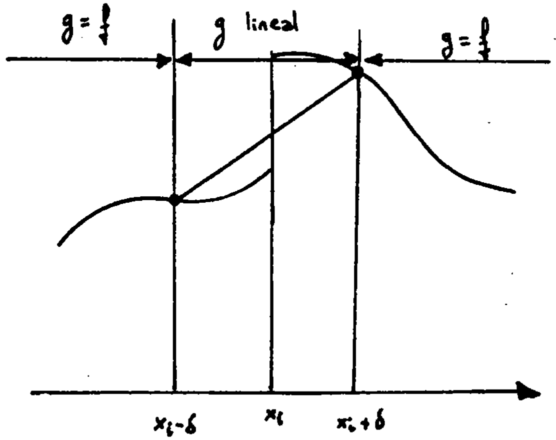
Definimos $g: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ así:

$$g|_{[-\pi, x_1 - \delta]} = f|_{[-\pi, x_1 - \delta]}$$

$$g|_{[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]} = f|_{[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]} \text{ para } i = 1, \ldots, p-1$$

$$g|_{[x_p + \delta, \pi]} = f|_{[x_p + \delta, \pi]}$$

$g|_{[x_i - \delta, x_i + \delta]}$ es lineal para $i = 1, \ldots, p$.



Entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^{p} \int_{x_i^-}^{x_i^+} |f(t) - g(t)|^2 dt$$

Como $|f(t) - g(t)| \leq 2M$, tendremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq p(2\delta) 4M^2 < \frac{\varepsilon^2}{3^2}$$

Como queríamos, es decir, hallamos g continua tal que

$$\| f - g \| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Consideremos ahora:

$$\| S_n(f) - f \| \leq \| S_n(f) - S_n(g) \| + \| g - f \| + \| S_n(g) - g \|$$

Observamos que:

$$S_n(f) - S_n(g) = S_n(f - g)$$

Observemos también que la desigualdad de Bessel implica que:

$$\| S_n(f - g) \| \leq \| f - g \|$$

Entonces:

$$\| S_n(f) - f \| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \| S_n(g) - g \|$$

Probemos ahora que $\exists$ N tal que para todo $n \geq N$, entonces $\| S_n(g) - g \|$ es pequeño.

Para ello utilizaremos el teorema de Féjer, que claramente implica que,

$$\| \Gamma_n(g) - g \| \to 0$$

(¿Por qué?)

Observando que $\Gamma_n(g)$ es combinación de $\left\{e_k, \ |k| \leq n\right\}$ tenemos en virtud de los resultados de la sección 1, que

$$\| g - S_n(g) \| \leq \| g - \Gamma_n(g) \|$$

Para terminar, basta elegir $N > 0$, para que $\| g - \Gamma_n(g) \| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq N$. Así obtendremos:

$$\| S_n(f) - f \| < \varepsilon \qquad \text{para } n \geq N$$

6 - Dos resultados sobre la convergencia de las series de Fourier

Teorema 5:

Sea f una función continua a trazos, periódica de período 2π y sea $x \in \mathbb{R}$, tal que existen y son finitos

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+ \quad \text{y} \quad \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L$$

Entonces:

$$\lim S_n(f, x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$$

En particular, si x es un punto de continuidad de f,

$$\lim S_n(f, x) = f(x)$$

Demostración:

La propieded c) prueba que D_n es una función par, así pues de b) deducimos que:

$$\int_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \int_{0}^{\pi} D_n dt = \frac{1}{2}$$

Así:

$$S_n(f, x) - \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = \int_0^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt -$$

$$- \int_0^{\pi} f(x^+)D_n(t)dt + \int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)dt - \int_{-\pi}^{0} f(x^-)D_n(t)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(t)dt$$

$$\text{con } g(t) = \begin{cases} f(x+t) - f(x^-) & t < 0 \\ f(x+t) - f(x^+) & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} = \frac{\operatorname{sen} nt \cos \frac{t}{2} + \cos nt \operatorname{sen} \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{t}\ \frac{t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\ \cos\ \frac{t}{2}\operatorname{sen} nt + \frac{1}{2\pi}\ \cos nt$$

Luego

$$g(t)D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{g(t)}{t}\ \frac{t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\cos\ \frac{t}{2}\operatorname{sen} nt + \frac{1}{2\pi}\ \frac{g(t)}{t}\, t \cos nt$$

$$\lim_{t\to o^+} \frac{g(t)}{t} = L^+ \qquad , \qquad \lim_{t\to o^-} \frac{g(t)}{t} = L^-$$

Fijando x, la función g(t) / t es entonces casi continua (inclusive en cero). Por lo tanto, son casi continuas las funciones:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\ \frac{g(t)}{t}\ \frac{t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\ \cos\ \frac{t}{2} \quad y \quad \psi(t) = \frac{1}{2}\ \frac{g(t)}{t}\, t$$

Como los coeficientes de Fourier de funciones casi continuas tienen límite cero, entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{g(t)}{t}\ .\ \frac{t}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\ \cos\ \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen} nt\ dt \to 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\ .\ \frac{g(t)}{t}\ t \cos nt\ dt \to 0$$

ya que estas integrales son coeficientes de Fourier de $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ respectivamente.

Luego:

$$\lim \int_{-\pi}^{\pi} g(t)D_n(t) = 0 \text{ con } n \to \infty$$

Q.E.D.

Supongamos ahora que f es derivable y de período 2π y su derivada es contínua a trazos. Estudiemos la relación entre los coeficientes de Fourier de f y f'.

$$a_o(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = \frac{1}{2\pi}\ f(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos kt\ dt = \frac{1}{\pi}\Big[f(t)\cos kt\Big]\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\ dt = k\, b_k(f),\ \text{con } k \ge 1$$

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\operatorname{sen} kt\ dt = \frac{1}{\pi}\Big[f(t)\operatorname{sen} kt\Big]\Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt = -k\, a_k(f) \qquad k \ge 1$$

En definitiva, ∀ k:

$$a_o(f') = 0$$

$$a_k(f') = k\, b_k(f)$$

$$b_k(f') = -k\, a_k(f)$$

Usamos esas relaciones para demostrar:

Teorema 6:

Si f es continua de período 2π y admite derivadas segundas continuas a trazos, la serie de Fourier converge absolutamente y uniformemente a f.

Demostración:

Consideremos:

$$\frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k(f)\cos kx + b_k(f)\mathrm{sen}\ kx\right] = S_n(f, x)$$

$$a_k(f) = -\frac{1}{k^2}a_k(f'') \qquad b_k(f) = -\frac{1}{k^2}b_k(f'')$$

Como f" es continua a trazos, $\lim a_k(f'') = 0$ con $k \to \infty$ y $\lim b_k(f'') = 0$ con $k \to \infty$.

Así $a_k(f'')$ y $b_k(f'')$ estan acotadas por M y N. Luego:

$$|a_k(f)| \le \frac{1}{k^2}.M\ \forall\ k \qquad |b_k(f)| \le \frac{1}{k^2}.N\ \forall\ k$$

Así el término general de

$$\frac{a_o(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\ \mathrm{sen}\ kx$$

está acotado en valor absoluto por $\text{máx}\frac{(M,N)}{k^2}$, que es el término general de una serie convergente.

Así, la sucesión $S_n(f, x)$ converge absolutamente y uniformemente.

Que su límite es f se deduce del teorema anterior.

7 - Series de Fourier de funciones periodicas de periodo arbitrario

Sea $c > 0$ y sea f una función periódica de período 2c, continua a trazos. Sea $F(t) = f(ct / \pi)$, F es continua a trazos de período 2π.

La función F tiene asociada una serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\mathrm{sen}\ nt \qquad , \text{con}$$

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{c\ t}{\pi}\right)dt = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(u)du$$

$$a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{c\ t}{\pi}\right)\cos nt\ dt = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(u)\cos\frac{n\pi u}{c}du \qquad n \ge 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{c\ t}{\pi}\right)\mathrm{sen}\ nt\ dt = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(u)\ \mathrm{sen}\ \frac{n\pi u}{c}du$$

Es inmediato entonces que si desarrollamos toda la teoría para el intervalo $[-c, c]$ en lugar de hacerlo para el intervalo $[-\pi, \pi]$ como lo hicimos, obtenemos los mismos resultados de convergencia cuadrática, puntual y uniforme.

Si deshacemos el cambio de variable $x = \frac{c\,t}{\pi}$, obtenemos que la serie de Fourier asociada a la función f periódica de período 2c y continua a trazos es:

$$f \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\,\pi\,x}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\,\pi}{c} \right]$$

con a_n y b_n como antes.

En particular podemos hablar de la serie de Fourier de senos y cosenos de una función definida en un intervalo de la forma (0, c).

<u>Algunos ejemplos</u>:

<u>Ejemplo 1</u>:

Considerese la función $f:[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [-\pi, 0) \\ 1 \text{ si } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Tendremos entonces que

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt \; dt = \frac{1}{\pi} \int_{o}^{\pi} \cos kt \; dt = 0$$

$$b_k = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt \; dt = \frac{1}{\pi} \int_{o}^{\pi} \operatorname{sen} kt \; dt = \left. \frac{-\cos kt}{k\,\pi} \right|_{o}^{\pi}$$

Entonces

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k\,\pi} & \text{si k es impar} \\ 0 & \text{si k es par} \end{cases}$$

Entonces la serie formal de Fourier es

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\,(2k-1)x}{2k-1}$$

Véase que el teorema de Dini se verifica en el punto 0. También el teorema de Dini permite afirmar que

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\,(2k-1)x}{2k-1} \qquad ,\text{si } x \neq 0.$$

Es interesante observar que si ponemos $x = \frac{\pi}{2}$ en la fórmula anterior se obtiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

<u>Ejemplo 2</u>:

<u>Desarrollos de senos y cosenos</u>.

Una función a trozos en $[0, \pi]$ puede extenderse en forma par o impar a todo el intervalo $[-\pi, \pi]$, dando lugar a un desarrollo en senos y cosenos.

Observese que si una función es par obtenemos:

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} f(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} f(t)\cos kt\, dt$$

$$b_k = 0$$

y que si f es impar, se obtiene:

$$a_o = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} f(t) \text{ sen } kt\, dt$$

Ejemplo 3:

Sea f: $[0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$.

f puede ser extendida a una función par F en $[-\pi, \pi]$, escribiendo $F(x) = |x|$.

Usando el ejemplo anterior, podemos escribir

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} x\cos kx\, dx = \frac{2}{k^2\pi}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$a_o = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} x\, dx = \pi$$

Como el teorema de Dini puede aplicarse, tenemos

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cos(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2}$$

f puede extenderse también de forma impar escribiend $F(x) = x$ en todo $[-\pi, \pi]$.

Así obtendremos

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} x \text{ sen } kx\, dx = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

Entonces (vía el teorema de Dini):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\text{sen } kx$$

Es interesante observar que si ponemos $x = \pi$ en la serie d cosenos obtenemos:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

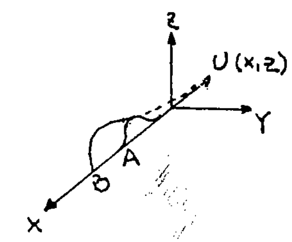
CAPITULO 5 ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

1 - ECUACION DE LAS ONDAS

Consideremos una cuerda homogénea AB de longitud L y de sección constante.

Si colocamos un sistema de coordenadas de origen en A y eje Ox en la dirección de AB, un punto de abcisa x de la cuerda se desplaza (si estudiamos las pequeñas vibraciones) en un plano perpendicular a la cuerda por x. Sea u un punto del plano yOz que depende de x y t, y que representa la posición ocupada por el punto x en el instante t.

Se demuestra que si D_o es la densidad lineal de la cuerda (que supondremos constante), y T_o la tensión, que también supondremos constante, la función vectorial u(x,t) verifica la ecuación:



$$D_o \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T_o \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{(I)}$$

Esta ecuación, se llama ecuación de las ondas y es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden y lineal, (lineal puesto que si u_1 y u_2 son soluciones de (I), $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ tambien es solución).

Si estudiamos las vibraciones longitudinales de una barra metálica sólida AB, el desplazamiento longitudinal de un punto es una función escalar del punto y del tiempo, que llamaremos u(x,t), y que se rige por una ecuación

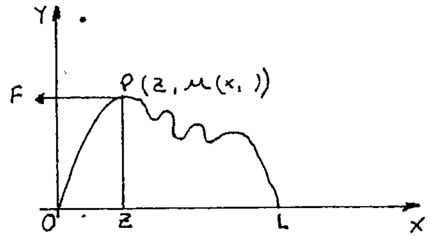
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde ν es la velocidad de propagación.

De forma parecida, si estudiamos las vibraciones longitudinales de una colonia líquida o gaseosa en un tubo fino, aparece también una ecuación del mismo tipo.

A continuación, daremos una idea de como llegar a la cuestión anterior en el caso de una cuerda que vibra en un plano.

Supondremos entonces que tenemos una cuerda elástica de longitud inicial L que vibra en el plano xOy.

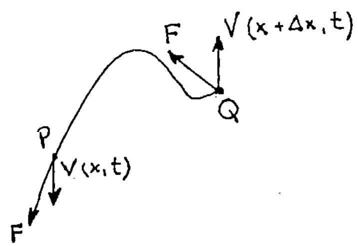


$(x,u(x,t))$ representa la posición que ocupa en el instante t el punto que en la posición de equilibrio ocupa el lugar $(x,0)$. Sea F la fuerza que la parte de la cuerda que está a la izquierda del punto P, ejerce sobre la parte de la cuerda que está a la derecha de P. Supondremos que F es tangente y llamemos $-T$ a la componente horizontal de F $(T > 0)$.

Si V es la componente vertical de f tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{V}{-T} \quad \text{o sea que } V(x,t) = -T\,\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

En este punto hacemos la hipotésis adicional que T no depende de (x,t). Para deducir la ecuación que verifica u aplicaremos la ley de Newton, a un trozo pequeño de cuerda entre x y $x + \delta\ \Delta x$, y



proyectando sobre la dirección perpendicular a la del eje de las x.

Entonces, la ecuación será

$$F_v = m\, a_v$$

donde F_v y a_v indican la componente sobre el eje Oy de la fuerza y de la aceleración, respectivamente.

Calculemos cada término:

$$F_v = -V(x+\Delta x, t) + V(x,t) = T\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]$$

$$a_v = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

$$m_v = D_o\, \Delta x$$

Tenemos entonces:

$$T\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right] = D_o\, \Delta x\, \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)$$

Dividiendo por Δx y pasando al límite concluimos que u verifica la ecuación

$$D_o\, u_{tt} = T\, u_{xx}.$$

De acuerdo con el planteo físico del problema, tenemos además las condiciones

$$u(0,t) = u(L,t) = 0.$$

2 - RESOLUCION DE LA ECUACION DE LAS ONDAS POR EL METODO DE PROPAGACION

Nos olvidaremos del problema físico particular, y consideraremos la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde u es una función con derivadas continuas de 2o. orden definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Para ello hacemos un cambio de variables $\xi = x + at$,

$\eta = x - at$ ó $x = \dfrac{(\xi + \eta)}{2}$ y $t = \dfrac{(\xi - \eta)}{2a}$

Aplicando la regla de la cadena deducimos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

Asi,

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}$$

En las nuevas variables la ecuación se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

Esta ecuación se resuelve, considerando $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = f_1(\xi)$, f_1 continua, $u = f(\xi) + g(\eta)$ con f y g C^2.

La solución general de la ecuación esta dada por

$$u(x,t) = f(x + at) + g(x - at)$$

con f y g funciones de clase C en $\mathbb{P}$. La función g(x - at) representa en cada instante t la traslación de la función g(x) por la traslación at. Asi g(x - at) representa una onda que se propaga a la derecha con velocidad a. De modo análogo f(x + at) representa una onda que se propaga a la izquierda con velocidad -a.

Consideremos el siguiente problema llamado problema de Cauchy: buscar la función u(x,t) que verifica

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

donde u_0 y u_1 son funciones dadas de clase C^2.

Queremos hallar la forma de la cuerda en el instante t conociendo la forma de la cuerda en el instante 0 (dado por u_0) y la velocidad transversal de cada punto de la cuerda en el instante 0, dada por $u_1(x)$.

De la ecuación

$$u(x,t) = f(x + at) + g(x - at) \qquad (I)$$

deducimos

$$\text{(i)} \quad u_0(x) = u(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$\text{(ii)} \quad u_1(x) = \frac{\partial x}{\partial t}(x,0) = a\left\{f'(x) - g'(x)\right\}$$

Integrando u_1, tenemos

$$a(f(x) - g(x)) + c = \int_0^x u_1(\xi)\, d\xi$$

El hecho que aparezca una constante arbitraria no es sorprendente, pues en la ecuación (I) podemos agregarle a f y sacarle a g una constante arbitraria. Esto equivale a dejar f + g incambiada y modificar f − g a menos de una constante arbitraria.

De las ecuaciones anteriores deducimos:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x) + \frac{1}{a}\int_0^x u_1(\xi)\, d\xi\right] - \frac{c}{2a}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x) + \frac{1}{a}\int_0^x u_1(\xi)\, d\xi\right] + \frac{c}{2a}$$

Asi

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,[u_0(x + at) + u_0(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\, d\xi$$

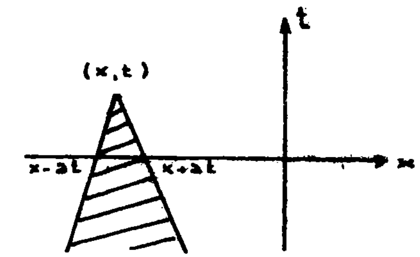
Asi vemos que el problema de Cauchy admite en este caso solución única.

<u>Observaciones:</u>

El valor de u en el punto x, en el instante t depende de los valores de u_0, u_1 en los puntos del intervalo (x −at, x + at). De hecho, depende de los valores de u_0 en los extremos del intervalo, y los de u_1 en (x − at, x + at).

Coloquemos en el plano (x,t) dos rectas de coeficientes angular $\pm\frac{1}{a}$ apuntando hacia abajo (ver figura). Cortan el eje Ox en los puntos x − at y x + at. La region comprendida entre esas dos semirectas se llama cono de ondas retrógrado.

Supongamos que $(\xi,\mathcal{T}) \notin$ cono de ondas retrógrado de (x,t). En ese caso el movimiento en $(\xi,\mathcal{T})$ no incide sobre el movimiento en (x,t) por lo visto anteriormente.



3 – Unicidad de las soluciones.

Antes de continuar desarrollando nuevos métodos para resolver la ecuación de las ondas daremos un teorema de unicidad.

TEOREMA – La ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x,t)$$

con $t \geq 0$ y $x \in (0,k)$ con las condiciones $u(0,t) = \rho(t)$; $u(L,t) = q(t)$; $t \geq 0$; $u(x,0) = f(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$; $u \in [0,k]$ tiene a lo sumo una única solución en la familia de las funciones de clase C^2 en $[0,L] \times R^+$ con p,q,f y g funciones de clase C^2.

<u>Demostración:</u>

Si u_1 y u_2 son soluciones, $u_1 - u_2 = v$ es solución de

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

con $v(0,t) = v(L,t)$; $t \geq 0$ y $v(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$, con $x \in [0,L]$.

Sea

$$I(t) = \int_o^L \left(v_x^2 + \frac{v_t^2}{a^2}\right) dx \text{ con } t \geq 0.$$

En las hipotésis del teorema podemos derivar dentro del signo de integral y tenemos:

$$I'(t) = 2 \int_o^L v_x v_{xt} + \frac{v_t v_{tt}}{a^2} dx = 2 \int_o^L v_x v_{xt} + \frac{v_t \ a^2 \ v_{xx}}{a^2} dx =$$

$$= 2 \int_a^L v_x v_{xt} + v_t v_{xx} \ dx = 2 \int_o^L \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_t) \ dx =$$

$$2 \ [(v_x v_t)(L,t) - (v_x v_t)(0,t)]$$

$v(L,t) = 0 \Rightarrow v_t(L,t) = 0$. Análogamente $v(0,t) = 0 \Rightarrow v_t(0,t) = 0$. Asi $I'(t) = 0$ y consecuentemente $I(t) = cte$.

$$I(0) = \int_o^L \left(v_x^2(x,0) + \frac{v_t^2(x,0)}{a^2}\right) dx.$$

Como $v(x,0) = 0$ y $v_x(x,0) = 0$ y además $v_t(x,0) = 0$. Luego $\forall \ t$, $I(t) = 0$.

Asi

$$\int_o^L \left(v_x^2(x,t) + \frac{v_t^2(x,t)}{a^2}\right) dx = 0$$

Como el integrando es una función continua y positiva deducimos que:

$$0 = v_x(x,t) = v_t(x,t) \ ,\forall \ (x,t) \in [0,k] \times [0,+\infty]$$

Luego $v(x,t) = cte$. y de las condiciones iniciales deducimos que $v = 0$.

<u>Observación:</u>: La integral

$$\int_o^L \left(v_x^2 + \frac{v_t^2}{a^2}\right) \ dx$$

representa la energía del sistema.

4 - RESOLUCION DE LA ECUACION DE LAS ONDAS POR MEDIO DE SERIES DE FOURIER

Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

con las condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_o(x) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad (3)$$

y las condiciones de borde

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad (4)$$

Evidentemente debe cumplirse además

$$u_o(0) = u_o(L) = u_1(0) = u_1(L) = 0$$

Llamamos movimiento estacionario de la cuerda a aquel **movimiento para el cual**

$$u(x,t) = U(x).V(t).$$

Busquemos los movimientos estacionarios de la cuerda con extremos fijos. Observemos que

$$U V'' = a^2 U'' V \qquad ó$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{V''}{V} = \frac{U''}{U} = -\lambda$$

con λ = constante

Recíprocamente, si λ = cte. las soluciones de $V'' + \lambda a^2 V = 0$ y $U'' + \lambda U = 0$ **definen** un movimiento estacionario.

Resolvamos la ecuación

$$U'' + \lambda U = 0$$

$$V'' + \lambda a^2 V = 0$$

Estamos buscando un movimiento estacionario

$$u(x,t) = U(x) V(t)$$

Deberá satisfacerse la condición que la cuerda mantiene sus extremos fijos en este movimiento, o sea:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \forall t \Rightarrow U(0) V(t) = U(L) V(t) = 0, \forall t$$

$$\Rightarrow \qquad U(0) = U(L) 0$$

Debemos pues resolver

$$U'' + \lambda U = 0$$

$$U(0) = U(L) = 0$$

Discutamos según los valores de λ:

a) $\lambda < 0$

$$\Rightarrow \qquad U(t) = \alpha \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\ t\right) + \beta \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\ t\right)$$

$$0 = U(0) = \beta \qquad \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = U(L) = \alpha \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\lambda}\ t\right) \qquad \Rightarrow \alpha = 0$$

de modo que para $\lambda < 0$ sólo tenemos soluciones triviales.

b) $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \qquad U(t) = \alpha t + \beta$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = U(0) = \beta$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = U(L) = \alpha L \qquad \Rightarrow \alpha = 0$$

De nuevo obtenemos sólo la solución trivial.

c) $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \qquad U(t) = \alpha \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, t + \beta \cos \sqrt{\lambda}\, t$$

$$0 = U(0) = \beta$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = U(L) = \alpha \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, L$$

Como no queremos obtener la solución trivial, para que α pueda ser no nulo debemos tomar

$$\sqrt{\lambda}\, L = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

Asi

$$\lambda = \frac{k^2\pi^2}{L} \qquad y \qquad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{L}$$

Asi pues,

$$U = \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L},$$ a menos de una constante.

Podemos suponer $K > 0$, pues si $k < 0$ introducimos en U un factor -1 que lo pasamos a V, el caso $k = 0$ es nuevamente la solución trivial.

Asi, las únicas funciones U (a menos de una constante) que sirven para formar un movimiento estacionario son de la forma

$$U_k = \operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z} \text{ y } k > 0.$$

Para ese valor de λ resolvemos la ecuacion en V obteniendo

$$V = A\cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right)$$

Luego,

$$u_k(x,t) = \operatorname{sen}\left(k\pi\frac{x}{L}\right)\left(A_k \cos k\pi\frac{at}{L} + B_k \operatorname{sen} k\pi\frac{at}{L}\right)$$

El período T en t del movimiento estacionario es

$$\frac{2\pi}{k\pi a/L} = \frac{2L}{ka} = T$$

de la frecuencia fundamental $\frac{ak}{2L}$.

La longitud de ondas λ es

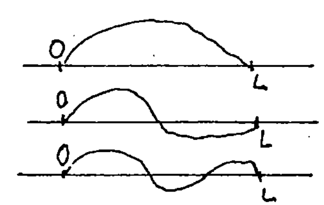
$$\frac{2\pi}{k\pi/L} = \frac{2L}{k}$$

Las longitudes de onda de los movimientos estacionarios son tales que L es un múltiplo entero de la semilongitud de onda ya que $L = k\frac{\lambda}{2}$.

$k = 1 \quad u_1(x,0) = \operatorname{sen} x\,\pi/L \quad \wedge = 2L$

$k = 2 \quad u_2(x,0) = \operatorname{sen} x\,2\pi/L \quad \wedge = L$

$k = 3 \quad u_3(x,0) = \operatorname{sen} x\,3\pi/L \quad \wedge = 2L/3$



$$u_k(x,t) = \text{sen } k\pi \frac{x}{L} \left(A_k \cos k\pi \frac{a\,t}{L} + B_k \text{ sen } k\pi \frac{a\,t}{L}\right)$$

es solución de (1) y verifica la condición (4).

A menos que u_0 y u_1 sean muy particulares, no existe chance que las condiciones iniciales sean verificadas por la solución estacionaria u_k.

Como la ecuación (1) es lineal, cualquier suma finita soluciones continúa verificando (1) y (4). Esto sugiere buscar soluciones de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen } k\pi \frac{x}{L}\left(A_k \cos k\pi \frac{a\,t}{L} + B_k \text{ sen } k\pi \frac{a\,t}{L}\right)$$

Si queremos que u verifique las condiciones dadas (1) y (4), y además (2) y (3) debe darse que:

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ sen}\left(k\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi \frac{a}{L} B_k \text{ sen}\left(k\pi \frac{x}{L}\right)$$

Luego, A_k y $B_k \dfrac{k\pi a}{L}$ deben ser los coeficientes de Fourier del desarrollo de u_0 y u_1 en serie de senos respectivamente.

Las funciones u_0 y u_1 las prolongamos a $(-L,L)$ de modo que sean impares, y los A_k y $B_k \dfrac{k\pi a}{L}$ deben ser sus coeficientes de Fourier.

O sea que: (5) $\displaystyle A_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi) = \text{sen } \frac{k\pi}{L}\xi \; d\xi$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^L u_1(\xi) \text{ sen } \frac{k\pi}{L}\xi \; d\xi$$

obteniendo asi una fórmula para un "candidato" a solución de la ecuación (1) con las condiciones (2), (3) y (4).

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen } k\pi \frac{x}{L}\left[\left(\cos k\pi \frac{a\,t}{L}\right) \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\xi)\text{sen } k\pi \frac{\xi}{L}\, d\xi \; + \right.$$

$$\left. + \left(\text{sen } k\pi \frac{a\,t}{L}\right) \frac{2}{k\pi a}\int_0^L u_1(\xi)\text{sen } k\pi \frac{\xi}{L}\, d\xi\right]$$

Para verificar si la función (6) es efectivamente una solución, necesitamos recordar algunos resultados de convergencia uniforme y derivación.

Si $\{f_u\}$ es una sucesión de funciones reales, derivables en (a,b) para las que se verifica:

a) $\exists\, x_0 \in (a,b) \,/ \displaystyle\sum_{u=1}^{\infty} f_u(x_0)$ converge

b) $\exists$ g definida en $(a,b) \,/ \displaystyle\sum_{u=1}^{\infty} f'_u \rightrightarrows g$ en (a,b) entonces $\exists$ f en (a,b)

derivable tal que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_u \rightrightarrows f$. Además, $\forall\, x \; f'(x) = g(x)$.

Escribimos

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\pi \frac{a\ t}{L} \operatorname{sen} k\pi \frac{x}{L} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{sen} k\pi \frac{x}{L} \operatorname{sen} k\pi \frac{a\ t}{L}$$

con A_k y $B_k \frac{k\pi a}{L}$ coeficientes de Fourier de u_o y u_1.

Si u_o es continua y admite dos derivadas continuas, sabemos que $|A_k| \leq \frac{M}{k^2}$. Si u_1 es continua y admite una derivada continua

$$|B_k \frac{k\pi a}{L}| \leq \frac{N}{k}$$

Luego, como $|A_k \cos\frac{k\pi\ at}{L} \operatorname{sen} \frac{k\pi\ x}{L} + B_k \operatorname{sen}\frac{k\pi\ x}{L} \operatorname{sen} \frac{k\pi\ at}{L}|$

$$\leq \frac{M}{k^2} + \frac{LN}{ha} \frac{1}{k^2}$$

concluimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$ converge uniformemente en $[0,L] \times R$ y

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen} k\pi \frac{x}{L}$$

que de acuerdo a los teoremas de convergencia de series de Fourier vale $u_o(x)$.

El teorema mencionado anteriomente aplicado a las derivadas parciales término a término, nos muestra que podemos derivar la expresión de u(x,t) dentro de la suma infinita.

Consideremos primero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi\ a}{L} A_k \left(-\operatorname{sen} \frac{k\pi\ at}{L}\right) \operatorname{sen} k\pi \frac{x}{L} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi\ a}{L} \cos \frac{k\pi\ at}{L} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}$$

Si $|\frac{k\pi\ a}{L} A_k| \leq \frac{M}{k^2}$ y $|\frac{k\pi\ a}{L} B_k| \leq \frac{N}{k^2}$ (que podemos garantizar si u_o posee derivadas de orden 3 continuas y u_1 de orden 2 también continuas) obtenemos la convergencia uniforme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}(x,t).$$

Poniendo t = 0 concluimos que en esas hipotésis la función u, verifica las condiciones iniciales y de borde.

Para justificar las derivadas ulteriores precisamos pedir que u_o posea derivadas de orden 4 continuas y u_1 de orden 3.

En definitiva, si $u_o \in C^4$ y $u_1 \in C^3$ la función u(x,t) dada por (6) es solución al problema de Cauchy planteado, y consecuentemente es la unica solución.

c – CONSIDERACION DE OTRAS CONDICIONES DE BORDE

El problema del estudio de un tubo sonoro abierto, matemáticamente se refleja en el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con $\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$

Si llamamos $V = \frac{\partial u}{\partial x}$, V satisface la misma ecuación que u, y además $V(0,t) = V(L,t) = 0$, que resuelve como ya observamos.

Otros problemas de ondas se reflejan en otro tipo de condiciones de contorno. Por ejemplo, queremos encontrar soluciones a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condiciones $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$.

Las ondas estacionarias $U(x)\ V(t)$ estan dadas por las soluciones a

$$V'' + \lambda a^2 V = 0 \qquad y \qquad U'' + \lambda U = 0$$

con $U(0) = 0$ y $U'(L) = 0$

Se deduce como antes que

$$\lambda > 0 \qquad y \qquad U = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x$$

con $\cos \sqrt{\lambda}\, t = 0$. Asi,

$$\sqrt{\lambda}\, L = (2k + 1) = \frac{\pi}{2}$$

A menos de una constante tenemos que

$$U(x) = \operatorname{sen}\,(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{L}\ ,\ k \geq 0 \text{ entero.}$$

Luego, los movimientos estacionarios estan dados por

$$u_k(x,t) = \operatorname{sen}(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{L}\left[A_k \cos(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{at}{L} + \right.$$

$$\left. + B_k \operatorname{sen}(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{at}{L}\right]$$

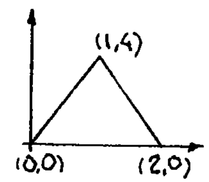
Si buscamos una solución al problema de Cauchy, suponiendo una combinación lineal de ondas estacionarias necesitamos desarrollar u_0 y u_1 en función de $\operatorname{sen}\,(2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{L}$. Para ello a la función dada en $(0,L)$, la extendemos a $(-L,0)$ de modo que sea impar, luego al intervalo (L,L) de modo que sean simétricas con respecto a $x = L$ (ver figura). Y finalmente las prolongamos en forma periódica de período 4L.

Las funciones asi prolongadas se escriben como $\cos m\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{L}$ sen $m\,\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{L}$ de periodo 4L. Siendo impares solo aparecen senos en su expresión. Siendo simétricas respecto a $x = L$ y $m = 2k + 1$.

6 - EJEMPLO DE LA CUERDA PULSADA

Supongamos una cuerda de posición de equilibrio en el eje Ox con (0,0) y (2,0) fijos. Supongamos que su punto medio se eleva una altura h, y a partir de esa posición se deja libre la cuerda, o sea que se suelta sin velocidad. La función f que describe la posición inicial de la cuerda es:

$$f(x) \begin{cases} kx & x \in [0,1] \\ -kx + 2h & x \in [1,2] \end{cases}$$



Los coeficientes de Fourier de la serie de senos de f son:

$$B_n = \int_0^2 f(x) \text{ sen } \frac{n\pi}{2} x \, dx = n \int_0^1 x \text{ sen } \frac{n\pi}{2} x \, dx +$$

$$n \int_1^2 (2 - x) \text{ sen } \frac{n\pi}{2} x \, dx = \frac{B_n}{\pi^2 n^2} \text{ sen } \frac{n\pi}{2}$$

Luego, el movimiento de la cuerda está dado por

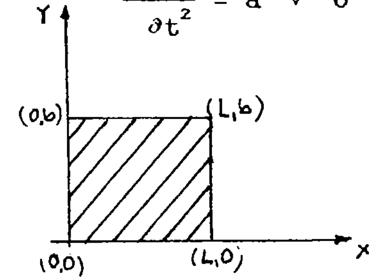
$$u(x,t) = \frac{B_n}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ sen } \frac{n\pi}{2} \text{ sen } \frac{n\pi}{2} x \cos \frac{n\pi \, at}{2} =$$

$$= \frac{B_n}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} \text{ sen } \frac{(2m-1)}{2} \pi x \cos \frac{(2m-1)}{2} \pi \, at$$

Es necesario notar que en este caso. La función f condición inicial, no cumple las hipotésis de derivabilidad requeridas. Esto puede causar problemas en x = 1.

Ecuación de la membrana elástica vibrante

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 U \qquad \text{(E)}$$



Queremos resolver esta ecuación en:

$(0,L) \times (0,b) \times [0,+\infty)$

(con $(0,L) \times (0,b) = \Omega$)

La ecuación (E) es válida sólo para pequeñas oscilaciones, a las que los desplazamientos se asumen solamente verticales.

U(x,y,t) representa la altura de la membrana elástica correspondiente al punto (x,y) en el instante t.

U se rige por (E), con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} U(x,y,0) = U_0(x,y) & \forall\, (x,y) \in \Omega \quad \text{(posición inicial)} \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,y,0) = v(x,y) & \forall\, (x,y) \in \Omega \quad \text{(velocidad inicial)} \end{cases}$$

y las condiciones de borde

$$\text{(I)} \quad U(x,y,t) = 0 \qquad \forall\, (x,y) \in \partial R, \ \forall\, t \geq 0, \ \text{(borde fijo)}$$

Para resolver la ecuación vamos a utilizar el método de separación de variables de Fourier, la búsqueda de soluciones estacionarias que satisfagan las condiciones de borde lineales, con el fin de superponerlas y hallar la solución de nuestro problema.

Solución estacionaria:

$$U(x,y,t) = U_1(x)\ U_2(y)\ V(t)$$

Sustituyendo en (E)

$$a^2 \left[U_1''\ U_2\ V + U_1\ U_2''\ V\right] = U_1\ U_2\ V''$$

Dividiendo entre $U_1\ U_2\ V$ tenemos

$$a^2 \left[\frac{U_1''}{U_1}(x) + \frac{U_2''}{U_2}(y)\right] = \frac{V''}{V}(t)$$

Como $\dfrac{U_1''}{U_1}$ es función de x solamente, $\dfrac{U_2''}{U_2}$ es función de y solamente y $\dfrac{V''}{V}$ es función de t solamente, tenemos

$$\frac{U_1''}{U_1} = -\lambda_1 \qquad \frac{U_1''}{U_1} = -\lambda_2 \qquad \frac{V''}{V} = -\lambda\ a^2$$

con $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, con λ_1 y λ_2 constantes.

Tenemos pues

$$\begin{cases} U_1'' + \lambda_1\ U_1 = 0 \\ U_2'' + \lambda_2\ U_2 = 0 \\ V'' + a^2\ \lambda\ V = 0 \end{cases}$$

De (I) deducimos que

$$U_1(0) = U_1(c) = 0$$

$$U_2(0) = U_2(b) = 0$$

Hay que recordar que estamos buscando soluciones no triviales, con lo cual debe ocurrir

$$\lambda_1^{(k)} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \qquad U_1^{(k)}(x) = \operatorname{sen}\left(k\pi\ \frac{x}{L}\right)$$

$$\lambda_2^{(k)} = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \qquad U_2^{(k)}(y) = \operatorname{sen}\left(k\pi\ \frac{y}{b}\right)$$

$$\lambda^{(k)} = \left[k\pi\ \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{L}\right)\right]^2$$

$$U^{(k)}(t) = A_k \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda^{(k)}}\ t\right) + B_k \cos\left(\sqrt{\lambda^{(k)}}\ t\right)$$

Tenemos pues que

$$U^{(k)}(x,y,t) = \operatorname{sen}\left(k\pi\frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(k\pi\frac{y}{b}\right) \left[A_k \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda^{(k)}}\,t\right) + B_k \cos\left(\sqrt{\lambda^{(k)}}\,t\right)\right]$$

son las soluciones estacionarias que vamos a superponer, esto es:

$$U(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}(x,y,t)$$

Tenemos:

$$U^{(k)}(x,y,t) = \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{y}{b}\right] \left[A_k \operatorname{sen}\left[\sqrt{\lambda^{(k)}}\, t\right] + B_k \cos\left[\sqrt{\lambda^{(k)}}\, t\right]\right]$$

$$U(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)}(x,y,t)$$

Las condiciones iniciales deben ser satisfechas, con lo cual:

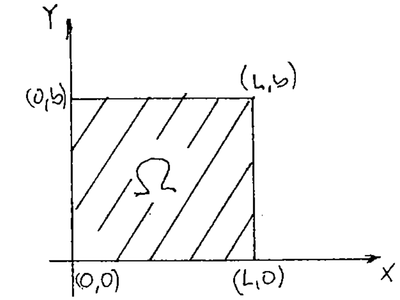
$$U(x,y,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{y}{b}\right] B_k = U_o(x,y)$$

$$\frac{\partial U(x,y,0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{y}{b}\right] \left[k\pi\sqrt{a}\right] A_k = v(x,y)$$

Entonces

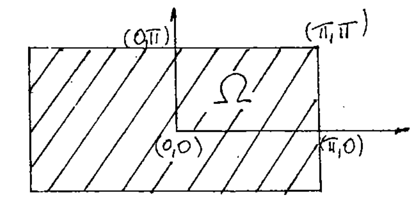
$$B_k = \frac{4}{\left(\sqrt{Lb}\right)^2} \iint_{\Omega} U_o(x,y) \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] dx\, dy$$

$$k\pi\sqrt{a}\, A_k = \frac{4}{\left(\sqrt{Lb}\right)^2} \iint_{\Omega} v(x,y) \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] \operatorname{sen}\left[k\pi\frac{x}{L}\right] dx\, dy$$



Hemos hecho la extensión de la función $U_o(x,y)$ desde Ω al conjunto $(-L,L) \times (-b,b)$ generalizando el concepto de extensión impar de una función a un intervalo

EJERCICIO:



$$\Omega = [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$$

Verificar que:

(i)

$U = \{\operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(ky),\ \operatorname{sen}(kx)\cos(ky),\ \cos(kx)\operatorname{sen}(ky),\ \cos(kx)\cos(ky)\}$, con $k \in \mathbb{N}$ forman una base ortogonal respecto al producto interno

$$\langle f,g\rangle = \iint_{\Omega} f(x,y)\,\overline{g}(x,y)\, dx\, dy$$

(ii)

Idem para

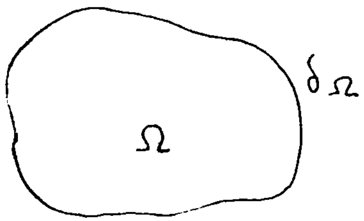
$$\mathcal{B} = \left\{e^{ik(x+y)},\ e^{ik(x-y)}\right\},\ k \in \mathbb{Z}$$

(iii)

Probar que la base de (i) y la de (ii) generan el mismo S.E.V.

Ecuación de la membrana. Unicidad de soluciones.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 U + G(x,y,t) \qquad \text{(E)}$$



Ω abierto, conexo, con $\partial\Omega$ regular

Condiciones:

$$\begin{cases} U(x,y,0) = U_0\,(x,y) & \forall\ (x,y) \in \Omega \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,y,0) = v(x,y) & \forall\ (x,y) \in \Omega \\ U(x,y,t) = f(x,y,t) & \forall\ (x,y) \in \partial\Omega,\ \forall\ t \geq 0 \end{cases}$$

<u>Demostración:</u>

Sean U_1 y $\tilde{U}_1$ soluciones del problema anterior. Entonces consideramos

$$W = U_1 - \tilde{U}_1$$

que satisface

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \nabla^2 W$$

$$W(x,y,0) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \Omega$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}(x,y,0) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \Omega$$

$$W(x,y,t) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \Omega \text{ y } \forall\ t \geq 0$$

Definimos $E(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\iint_\Omega \left(W_x^{\,2} + W_y^{\,2} + \frac{1}{a^2} W_t^{\,2}\right) dx\, dy.$

Entonces:

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = \iint_\Omega \left(W_x W_{xt} + W_{xx} W_t\right) + \left(W_y W_{yt} + W_{yy} W_t\right) dx\, dy \qquad \text{(II)}$$

Como:

$$\left(W_x W_{xt} + W_{xx} W_t\right) = \frac{\partial \left(W_x W_t\right)}{\partial x}$$

$$\left(W_y W_{yt} + W_{yy} W_t\right) = \frac{\partial \left(W_y W_t\right)}{\partial t}$$

entonces la ecuación (II) es igual a

$$\iint_\Omega \frac{\partial \left(W_x W_t\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(W_x W_t\right)}{\partial x}\, dx\, dy$$

Definimos ahora el campo

$$\vec{X} = \left(- W_y W_t,\ W_x W_t\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{rot}\,(\vec{X}) = \frac{\partial\,(W_x W_t)}{\partial\, x} + \frac{\partial\,(W_y W_t)}{\partial\, y}$$

Con lo cual, si aplicamos el Teorema de Green, tenemos

$$\frac{\partial\, E}{\partial\, t}\,(t) = \int_{\partial\Omega} \vec{X}\,\vec{t}\,ds$$

Pero:

$$\vec{X}\,\Big|_{\partial\Omega} = W_t\,\left(-\,W_y,\, W_x\right)\,\Big|_{\partial\Omega}$$

y como

$$W\,\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0 \qquad \forall\; t \geq 0$$

tendremos

$$W_t\,\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0 \qquad \forall\; t \geq 0$$

y de aqui

$$\frac{\partial\, E}{\partial\, t}\,(t) = 0 \qquad \forall\; t \geq 0$$

con lo cual

$$E(t) = E(0) = 0$$

La última igualdad se deduce de las condiciones iniciales que satisface W.

Como $E(t) = 0\ \forall\ t \geq 0 \Rightarrow W_x = W_y = W_t = 0,\ \forall\ (x,y) \in \Omega$ y $\forall\ t \geq 0$, debido a la continuidad del integrando no negativo.

Como Ω es abierto conexo $\Rightarrow$ es conexo por poligonales y de aqui es fácil ver que

$$W \equiv 0 \text{ en } [0,\ +\infty)$$

con lo cual está probada la unicidad.

7 - Ecuacion del calor

Sea $\Omega \subset R^2$ un sólido homogéneo. Si $u(x,y,z,t)$ indica la temperatura del punto de coordenadas (x,y,z) en el instante t, la función u verifica la ecuación

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

donde k es una constante positiva. Esta ecuación rige muchos fenómenos de difusión, y la llamamos ecuación del calor. En caso de flujo unidimensional (temperaturas en una barra), la ecuación es de la forma

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}).$$

Cuando las temperaturas no dependen del tiempo (o sea u no depende de t), la distribución de temperaturas se rige por la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0,\ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Consideremos entonces el siguiente problema con condiciones de borde e iniciales. Sea $\Omega \subset R^3$ un abierto conexo de R^3 tal que $\partial\Omega$ es una superficie regular de R^3, que será sin borde y orientable. La orientamos con la normal saliente que indicamos por N.

Suponemos u de clase C^2 en Ω, y de clase C^1 en $\overline{\Omega}$. Definimos

$$\frac{\partial u}{\partial N} : \partial\Omega \longrightarrow R \quad \frac{\partial u}{\partial N}(w) = \langle \text{grad } u(w) \ , \ N(w) \rangle \ \forall \ w \in \partial\Omega$$

Las hipótesis nos aseguran que $\frac{\partial u}{\partial N}$ es continua en $\partial\Omega$.

Consideremos el siguiente problema para Ω como antes: encontrar $u:\Omega \times [0,\infty) \longrightarrow R$ de modo que

a) $u \in C^2 \ (\Omega \times (0,\infty)) \cap C^1 \ (\overline{\Omega} \times [0,\infty))$

b) $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ en $\Omega \times [0,\infty)$

c) $u(x,0) = u_o(x) \qquad \forall \ x \in \overline{\Omega}$

d) $\frac{\partial u}{\partial N}(w,t) = u_1(w,t) \ \forall \ w \subset \partial\Omega, \ \forall \ t \geq 0$

Si cambiamos la condición última por $u(w,t) = u_1(w,t)$, $\forall \ w \in \partial\Omega$, $\forall t \geq 0$ llamaremos (2) a ese .

El significado físico de ambos problemas es evidente. En el primer caso, queremos hallar la distribución de temperaturas en el instante t, de un sólido, si conocemos la distribución de temperaturas en el instante 0, y el flujo de temperaturas a través del borde. Por ejemplo, esta ecuación (en caso de ser resuelta) nos permite calcular la temperatura en el interior del reactor (al cual no tenemos acceso), conociendo la distribución inicial de temperaturas, midiendo el flujo a traves de la parte exterior del reactor (al cual tenemos acceso) . La interpretacion del problema (2) es semejante.

TEOREMA - a) Si u y $\tilde{u}$ solucionan (1) $\rightarrow u = \tilde{u}$ en $\Omega \times [0,\infty)$

b) Si u y $\tilde{u}$ son soluciones de (2) $\rightarrow u = \tilde{u}$ en $\Omega \times [0,\infty)$

<u>Demostración:</u>

(lo probaremos usando nuevamente "el método de la energía")

a) Sean u y $\tilde{u}$ soluciones de (1). La diferencia $u - \tilde{u}$ es solución de (1) con $u_o = 0$ y $u_1 = 0$.

Sea $U = u - \tilde{u}$. Consideremos

$$A(t)= \frac{1}{2} \iiint_\Omega (U(x,t))^2 \ dx, \ A(t) \geq 0$$

$$\frac{dA}{dt} = \iiint_\Omega U \frac{\partial U}{\partial t} \ dx = \iiint_\Omega U \ \Delta U \ dx =$$

$$= \iint_{\delta\Omega} U \frac{\partial U}{\partial N} \quad \iiint_\Omega |\text{grad } U|^2 \ dx$$

(ver comentarios al final del teorema para justificar la última igualdad)

Luego, como $\left.\frac{\partial U}{\partial N}\right|_{\partial\Omega} = 0$, concluímos que $\frac{dA}{dt} \leq 0$

Además, $A(0) = \frac{1}{2} \iiint_\Omega (U(x,0))^2 \ dx = 0$

Si A es decreciente y en 0 vale 0, $A(t) \leq 0$. Como además $A(t) \geq 0$ concluímos que $A(t) = 0$, $\forall$ t. Luego $\forall$ t se cumple $U(x,t) = 0$.

b) La demostración es idéntica, pues también

$$\iint_{\partial\Omega} U \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \text{ y } \frac{dA}{dt} \leq 0$$

en las misma forma.

Las siguientes identidades de Green son de uso permanente en esta teoría. En particular, la igualdad siguiente se deduce de la primera:

$$\iiint_{\Omega} U \, \Delta U = \iint_{\partial\Omega} U \frac{\partial U}{\partial N} - \iiint_{\Omega} |\text{grad } U|^2$$

Primera identidad de Green

Si $\Omega \subset R^3$ es como antes, y U y V son de clase C^2 en Ω y de clase C^1 en $\bar{\Omega}$ tenemos

$$\iiint_{\Omega} U \, \Delta V \, dx + \iiint_{\Omega} \langle \text{grad } U, \text{grad } V \rangle \, dx = \iint_{\partial\Omega} U \frac{\partial V}{\partial N}$$

(aplicando el teorema de la divergencia el campo $(U \frac{\partial V}{\partial x_1}, U \frac{\partial V}{\partial x_2}, U \frac{\partial V}{\partial x_3})$

Segunda identidad de Green.

Si U y V $\in C^2(\Omega)$, U y V $\in C^1(\bar{\Omega})$ y Ω es como antes tenemos que

$$\iiint_{\Omega} (U \, \Delta V - V \, \Delta U) \, dx = \iint_{\partial\Omega} (U \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial U}{\partial N})$$

8 - RESOLUCION POR SEPARACION DE VARIABLES

Consideremos una barra delgada de sección constante, y longitud l de material homogéneo, perfectamente aislada lateralmente de modo que el calor sólo fluya en la dirección longitudinal. Supongamos que la distribución inicial de temperaturas está dada por una función f(x) continua. En el instante t = 0 suponemos que la temperatura en los extremos es 0 y luego se les conserva a esa temperatura.

Queremos resolver un problema del tipo (2).

Sea (3):

a) $\frac{\partial u}{\partial t} - k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \; (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$

b) $u(0,t) = u(l,t) = 0 \;\; ; \forall \; t \geq 0$

c) $u(x,0)=f(x); \; \forall \; x \in [0,l]$ con las condiciones de compatibilidad $f(0) - f(l) = 0; \; f \in C([0,\pi])$

d) $u \in C([0,\pi] \times [0,\infty)) \cap C^2((0,\pi) \times (0,\infty))$

Usemos otra vez el método de separación de variables. Buscamos soluciones estacionarias

$$u(x,t) = X(x).T(t).$$

Concluímos que

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}$$

donde en esa igualdad un lado depende solo de x, y el otro solo de t. Asi,

$\exists\ \lambda$: $x'' + \lambda x = 0$; $\forall\ x \in (0,1)$ y $T' + \lambda\ k\ T = 0$; $\forall\ t > 0$.

Las condiciones de borde indican que si buscamos soluciones estacionarias no triviales $X(0) = X(1) = 0$, de ahi, $\lambda > 0$. Si $\lambda \leq 0$ la única solución de $x'' + \lambda x = 0$ que satisface $X(0) = X(1) = 0$ es la trivial. Concluímos pues, que $\lambda > 0$ y asi

$$x = \alpha \cos \sqrt{\lambda}\ x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\ x$$

y como $X(0) = X(1) = 0$, concluimos que $\alpha = 0$ y $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{2}$.-

Luego, tenemos una familia de funciones

$$x_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l}\ x\ ; \forall\ n > 0$$

que sirven para formar soluciones estacionarias.

Para

$$\lambda_n = \frac{n^2\ \pi^2}{l^2}$$

la solucion de $T' + \lambda_n k\ T = 0$ es

$$T_n(t) = e^{\frac{-n^2\ \pi^2}{l^2} kt}-$$

Buscamos pues, soluciones al problema (1) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\ \pi^2}{l^2} kt\right) \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ x$$

Queremos además que $u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ x$

Trabajando formalmente (sin preocuparnos por la convergencia tendríamos que $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ y\ dy$.

Sustituyendo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \left(f(y) \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ y\right) dy \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ x\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt} =$$

$$= \int_0^l f(y) \left(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ x \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ y\ e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt}\right) dy$$

Sea

$$H(x,y,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ x \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ y \exp\left(\frac{-n^2\ \pi^2}{l^2} kt\right)$$

Buscaríamos probar que $u(x,t) = \int_0^l f(y)\ H(x,y,t)\ dy$

(1) Sea $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,t) \longrightarrow H(x,y,t) =$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ x \operatorname{sen} \frac{n\ \pi}{l}\ y \exp\left(\frac{-n^2\ \pi^2}{l^2} kt\right)$$

Cualquier serie que se obtenga derivando la serie dada por H con relación a x y o t es uniformemente convergente en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [z,+\infty)$ $\forall$ $z > 0$.

$$\left| \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}}{\partial^{n_1}x\, \partial^{n_2}y\, \partial^{n_3}t} \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} y \exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt \right) \right] \right| \leq$$

$$\leq k\, n^{n_1} n^{n_2} n^{-2n_3} \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt}$$

$$= k\, n^{n_1+n_2+2n_3} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt \right)$$

Basta probar (por el criterio de la mayorante de Weierstrass) que una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p\, e^{-n\sigma^2}, \text{ con } \sigma > 0 \text{ es convergente.}$$

Usando el criterio integral para la convergencia

$$\int_1^{+\infty} x^p\, e^{-\sigma x^2} dx = \int_1^{+\infty} x^p\, (1 + x^2)\, e^{-\sigma x^2} \frac{1}{(1 + x^2)} dx$$

Si $x \to \infty$, $x^p\, (1 + x^2)\, e^{-\sigma x^2} \longrightarrow 0$

Luego, $x^p\, (1 + x^2)\, e^{-\sigma x^2} < k_o$, $\forall$ x, asi :

$$\int_o x^p\, e^{-\sigma x^2} dx < k_o \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} \text{ que es convergente.}$$

Una vez garantizada la convergencia uniforme en $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [z,+\infty)$ concluímos que:

$$\int_o^p f(y)\, H(x,y,t)\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{l^2} kt \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x$$

con $$b_n = \frac{2}{l} \int_o^p f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{l}\, dy$$

Queremos ver que u satisface las condiciones de (1). Consideremos entonces

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_c^l f(y) \frac{\partial H}{\partial t} (x,y,t)\, dy & \text{con } f > 0 \\ f(x) & \text{con } f = 0 \end{cases} \quad x \in [0,l]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} (x,t) = \int_o^l f(y) \frac{\partial H}{\partial t} (x,y,t)\, dy \qquad x \in (0,l) \text{ con } t > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_0^l f(y)\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y,t)\,dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_0^l f(y)\,\left(\frac{\partial H}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)(x,y,t)\,dy$$

Como los teoremas de derivación dentro de la serie que define H valen, concluímos que

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x,t) - k\,\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}\,y\left[\frac{\partial}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}\,x\; e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}kt}\right)\right]=0$$

por lo ya probado.

Si f es continua con derivada segunda continua, sabemos que los coeficientes b_n de Fourier de f son tales que $\sum |b_n| < \infty$

Luego, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{l^2}kt\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}\,x$$

tiene sus términos acotados en valor absoluto por $|b_n|$, que es el término general de una serie convergente. Asi, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{l^2}kt\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}\,x$$

converge absolutamente y uniformemente en $[0,l] \times [0,\infty)$

Luego, concluímos que u satisface $u(x,0) = f(x)$. Las otras condiciones son evidentes.

TEOREMA - Sea u definida por $(x,t) \in [0,l] \times [0,\infty)$ como

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^l f(y)\,H(x,y,t)dy & t > 0 \\ f(x) & t = 0 \end{cases}$$

entonces, $\forall\ t \geq 0$ se cumple

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2}{l^2}kt\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}\,x$$

con $b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}\,y\,dy$

Si además f es de clase C^2, en $[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$ en $[0,l]$ la función $u(x,t)$ es solución del problema con

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty)$

b) $u(0,t) = u(l,t),\ \forall\ t \geq 0$

c) $u(x,0) = f(x),\ x \in [0,l]$

d) $u \in C(\ [0,\pi] \times [0,\infty)\ ) \cap C^2(\ (0,\pi) \times (0,\infty)\ )$