Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2016**

Tercer parcial – Sábado 24 de septiembre de 2016

Número de parcial	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del parcial es 3 horas.
- El puntaje total es 30 puntos.

(I) Verdadero Falso. Total: 6 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Ejercicio 1: Sea V un espacio vectorial y $\{u, v, w\} \subset V$ un conjunto llinealmente independiente. Entonces $\{u + 2v, v + 2w, w + 2u\}$ también es linealmente independiente.

Ejercicio 2: Sea V un espacio vectorial. Si $A \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces toda base de V contiene al menos un elemento del conjunto A.

Ejercicio 3: Considere $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. El conjunto de las matrices no invertibles es un subespacio de V.

Ejercicio 4: Exsiten subespacios S_1 y S_2 tales que $dim(S_1 + S_2) > dim(S_1) + dim(S_2)$.

Ejercicio 5: Sean v_1, v_2, w_1 y w_2 vectores de un espacio vectorial V. Si el conjunto $A = \{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente y el conjunto $B = \{w_1, w_2\}$ es generador de V, entonces tanto A como B son bases de V.

Ejercicio 6: Si S_1 y S_2 son dos subespacios **no triviales** de $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$, entonces uno de esos subespacios tiene dimensión 1.

(II) Desarrollo. Total: 24 puntos

Ejercicio 1: (6 puntos)

Considere $V = \mathcal{P}_3$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Sea $S = \{p \in V : p(0) + p'(0) = 0\}$.

a) Pruebe que S es un subespacio de V.

b) Halle una base de S.

Solución:

a) Veamos que S es un subespacio:
Claramente el polinomio nulo pertenece a S; entonces $S \neq \emptyset$.
Consideremos p y q dos polinomios en S. Entonces $p+q \in S$ ya que:
$(p+q)(0)+(p+q)'(0) = p(0)+q(0)+p'(0)+q'(0) = (p(0)+p'(0))+(q(0)+q'(0)) = 0+0 = 0.$
Finalmente, si $p \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $(\lambda.p)(0)+(\lambda.p)'(0) = \lambda.p(0)+\lambda.p'(0) = \lambda.(p(0)+p'(0)) = \lambda 0 = 0$ y por lo tanto $\lambda.p \in S$.

b) Para hallar una base de S empecemos por encontrar la forma que tienen los polinomios de S. Si $p \in S$ entonces $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ y tales que $p(0)+p'(0) = 0$, o sea que $d+c = 0$ y por lo tanto $S = \{ax^3+bx^2+cx-c, \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}\}$.
De manera que, por ejemplo, $\mathcal{A} = \{x^3, x^2, x-1\}$ es una base de S.

Ejercicio 2: (6 puntos)

Sea V un espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$.

a) Escriba la condición que debe cumplir B para ser un conjunto linealmente independiente.
b) Escriba la condición que debe cumplir B para ser un generador de V.
c) Pruebe que B es una base de V si y sólo si todo elemento del espacio V se escribe de una única manera como combinación lineal de los elementos de B.

Solución: Ver Teórico.

Ejercicio 3: (6 puntos)

Considere $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de matrices 2×2 con coeficientes reales, y el conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \subset V.$$

Sea S el subespacio de V generado por el conjunto $\mathcal{A}$.

a) Halle una base de S y deduzca $dim(S)$.
b) Halle explícitamente las condiciones que deben cumplir los coeficientes de una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para que $M \in S$.

Solución:

a) Como $\mathcal{A}$ es un generador de S, para encontrar una base alcanza con obtener un subconjunto linealmente independiente maximal de $\mathcal{A}$.

Veamos si $\mathcal{A}$ es linelmente independiente:

$$\text{Si: } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \gamma.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces la solución del sistema es : $\alpha = -5\delta$, $\beta = 6\delta$ y $\gamma = 5\delta$. Además, de la matriz escalerizada del sistema vemos que $\mathcal{A}$ tiene rango 3. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es linealmente dependiente y podemos sacar una matriz cualquiera de $\mathcal{A}$ para obtener una base. Por ejemplo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } S \text{ y } dim(S) = 3.$$

b) Una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertenece a S si existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \beta. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \gamma. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta. \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema (que tiene la misma matriz que el sistema anterior) obtenemos que la condición de compatibilidad del sistema es $a + b - d = 0$, y por lo tanto $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertenece a S si y sólo si $d = a + b$, $c \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4: (6 puntos)

Considere $\mathbb{R}^4$ y los subespacios $S_1 = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, z - t = 0\}$ y $S_2 = \{(x, y, z, t) : x = z - t, y = 0\}$.

a) Halle $S_1 + S_2$.

b) ¿Es $S_1 + S_2$ una suma directa? Justifique su respuesta.

Solución:

a) $S_1 = \{(x, y, z, t) : x + y = 0, z - t = 0\} = \{(x, -x, z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{(x, y, z, t) : x = z - t, y = 0\} = \{(z - t, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$. Entonces $v = (a, b, c, d) \in S_1 + S_2$ si $v = (x, -x, z, z) + (z' - t', 0, z', t') = (x + z' - t', -x, z + z', z + t')$ con $x, z, z', t' \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $a = x + z' - t'$, $b = -x$, $c = z + z'$ y $d = z + t'$. Entonces $c = a + b + d$. Finalmente $S_1 + S_2 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c = a + b + d\}$.

Otra forma: De las condiciones que definen S_1 y S_2 se deduce que $B_1 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ son bases de S_1 y S_2 respectivamente. Consideramos $B_1 \cup B_2$ y elegimos un subconjunto linealmente independiente maximal, que será entonces una base de $S_1 + S_2$. Por ejemplo: $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0)\}$.

b) La suma no es directa porque $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 1, 1)\} \neq \{0\}$.