

Investigación

Teorema de Hall y un algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos

Edwin Carranza Vargas

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de abril de 2012

Resumen

Este trabajo presenta dos aportes a la combinatoria aplicada el primero la relación de equivalencia de los Teoremas de Ford- Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth y Hall, además presenta una nueva prueba al Teorema de Hall que sirve como algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos. En cada sección se establecen generalidades de los teoremas mencionados y finalmente el algoritmo con su respectiva justificación.

Palabras Clave: Teorema de Ford- Fulkerson, Teorema de Menger, Teorema de Köning, Teorema de Dilworth, Teorema de Hall.

1. Introducción

Este artículo representa por una parte un compendio de algunos teoremas importantes en el análisis combinatorio y más específicamente en la combinatoria aplicada, puesto que se recrean alguno de ellos y se muestra la equivalencia lógica entre ellos. Este resultado aparece en la sección 2 del artículo con definiciones que ayudan al lector a ubicarse en cada uno de los temas específicos donde cada teorema tiene su importancia.

En la sección 3, se muestra una nueva demostración del Teorema de Hall realizada por el autor que desprende en un algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos.

Este artículo está cargado de mucha teoría en la cual las demostraciones de los Teoremas de Ford-Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth son referenciadas para que el autor las consulte, las demostraciones de Hall y otras que son ne-

cesarias para la comprensión de la equivalencia entre los teoremas si están en el artículo.

2. Definiciones, Teorema y relación de equivalencia entre los Teoremas de Ford-Fulkerson, Menger, Köning, Dilworth y Hall

2.1. Definiciones

Definición 2.1.1. Un grafo G consiste de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas, y una asignación de cada arista $e \in E$ y una pareja no ordenada x, y de vértices llamados extremos de e .

Una arista se dice incidente con dos vértices si estos son extremos de la arista. Un punto se dice aislado si no posee aristas que incidan en él. Dos vértices son adyacentes si son diferentes y existe alguna arista que incide en ellos. $N(x)$ denota la vecindad de $x \in V$, como el conjunto de vértices adyacentes a x . El número de aristas incidentes con un vértice x se llama el grado o la valencia de x .

Definición 2.1.2. Un digrafo D o grafo dirigido consiste de un conjunto V de vértices, un conjunto A de arcos, y una asignación de cada arco $e \in A$ y una pareja ordenada de V .

En un digrafo el grado de un vértice x se descompone en dos cantidades; la primera es el grado de entrada que es el número de arcos que llegan al vértice, es decir el conjunto de arcos asociados a la forma (y, x) donde y es adyacentes a x y el grado de salida que es el número de arcos que salen de él, es decir el conjunto de arcos asociados a la forma (x, z) , donde z es adyacente a x .

Definición 2.1.3. Un grafo $G = (V, A)$ se dice bipartito si existe una partición del conjunto de vértices V en dos conjuntos A y B tal que cada $\{A, B\}$ es llamado una bipartición de G

Definición 2.1.4. En un grafo G , un emparejamiento es un conjunto de arcos disyuntos; y una cobertura es un conjunto C de vértices con la propiedad que cada arco posee un vértice de C .

Definición 2.1.5. Una red es un digrafo con una función entera c , conocida como función de capacidad, definida sobre el conjunto de arcos, además posee un par de vértices llamados fuente s y meta t

El grado de entrada de s es cero al igual que el grado de salida de t . Los demás vértices son llamados vértices intermedios. Asumimos que el conjunto de vértices es $\{1, 2, \dots, n\}$ donde el vértice 1 es la fuente y el vértice n es la meta. Si $e = (i, j)$ es un arco, el entero no negativo $c(e) = c(i, j)$ es la capacidad del arco.

Definición 2.1.6. Un flujo f en una red es una función entera definida sobre el conjunto de arcos, tal que $0 \leq f(e) \leq c(e)$ para cada arco e . El entero $f(e)$ es el flujo a lo largo de e . La suma de los flujos a lo largo de todos los arcos dirigidos al vértice i es el flujo de entrada en i , y la suma de los flujos a lo largo de todos los arcos dirigidos desde el vértice i es el flujo de salida desde i .

Un flujo se dice factible si se satisface la condición de conservación: El flujo de entrada en cualquier vértice intermedio i debe ser igual al flujo de salida desde i . Si f es un flujo factible en una red G , el valor $f(G)$ es el flujo de salida desde la fuente. Un flujo factible en una red tal que el valor del flujo sea lo mayor posible se llama flujo máximo. Al problema de hallar el mayor flujo posible en una red se le llama problema de máximo flujo. Consideremos una

partición del conjunto de vértices de una red $G = (V, E)$ en dos conjuntos S y T tal que la fuente esté en S y la meta en T . El conjunto $(S, T) = \{(i, j) : (i, j) \in E, i \in S, j \in T\}$ es llamado un corte. La suma de las capacidades de todos los arcos del corte (S, T) es la capacidad $c(S, T)$ del corte. Un corte es llamado mínimo corte si su capacidad no excede la capacidad de cualquier otro corte. Si f es un flujo factible en la red, la suma de los flujos a lo largo de todos los arcos en el corte (S, T) es el flujo $f(S, T)$ a lo largo del corte. Obviamente $0 \leq f(S, T) \leq c(S, T)$.

Definición 2.1.7. Un orden sobre un conjunto X es una relación R sobre X que satisface las siguientes propiedades.

- a) Reflexiva: $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$.
- b) Antisimétrica: $(x, y), (y, x) \in R$ implica que $x = y$
- c) Transitiva: $(x, y), (y, z) \in R$ implica que $(x, z) \in R$.

La pareja (X, R) es llamado conjunto parcialmente ordenado. Un conjunto parcialmente ordenado será llamado un Orden.

Un conjunto parcialmente ordenado (Orden) consiste de un conjunto X y una relación de orden (\leq). Dado un Orden con un número finito de elementos, es posible construir un digrafo G tal que exista una relación uno a uno entre el conjunto de elementos en el Orden y el conjunto de elementos del digrafo y tal que un arco se dibuja desde el vértice que corresponda al elemento x al vértice que corresponda al elemento y si y solo si $x \leq y$. Dos elementos x, y en

un Orden son comparables si $x \leq y$ ó $y \leq x$. De lo contrario se dice que son incomparables. Un conjunto de elementos que pertenecen al Orden se llama cadena en el Orden si cada par de elementos son comparables. Una anticadena en un Orden es un conjunto del cualquier par de elementos son incomparables.

2.2. Teoremas

Teorema 2.2.1. Si f es cualquier flujo factible en una red G y si (S, T) es cualquier corte

$$f(G) = f(S, T) - f(T, S)$$

Demostración. El conjunto de vértices es $V = \{1, 2, \dots, n\}$. S es cualquier conjunto de vértices que contiene a s , y T su complemento que contiene a t . Es de notar que $f(G) = \sum_j f(i, j) - \sum_j f(j, i)$, cuando $i = 1$ la segunda suma es cero. Ahora $f(G) = \sum_{i \in S} \sum_j f(i, j) - \sum_{i \in S} \sum_j f(j, i)$. Si i y j están ambos en S , el término $f(i, j)$ aparece en la primera suma al igual que en la segunda por ser el flujo factible. Así que podemos restringir i a S y a j en T y de esa manera queda demostrado. \square

Corolario 2.2.1. *El valor $f(G)$ de cualquier flujo factible f es igual al flujo de entrada de la meta.*

Demostración. Por el Teorema 2.2.1 Consideremos el conjunto $S = V - \{n\}$. En este caso $f(T, S) = 0$, y $f(S, T)$ es el flujo de entrada de t . \square

Corolario 2.2.2. *Si f es cualquier flujo factible y si (S, T) es cualquier corte,*

$$f(G) \leq c(S, T)$$

Demostración. Por el Teorema 2.2.1 $f(G) = f(S, T) - f(T, S) \leq f(S, T) \leq c(S, T)$. \square

Si f es un flujo factible en una red, el arco (i, j) es f -saturado si $f(i, j) = c(i, j)$, es f -cero si $f(i, j) = 0$, y es f -positivo si $0 < f(i, j) < c(i, j)$

Teorema 2.2.2. a) *Si f es flujo factible y (S, T) cualquier corte,*

$$f(G) = c(S, T)$$

si y solo si cada arco en (S, T) es f -saturado y cada arco en el corte (S, T) es f -cero.

b) *Si f es un flujo factible y si (S, T) es cualquier corte tal que*

$$f(G) = c(S, T)$$

f es un máximo flujo y (S, T) es un mínimo corte.

Demostración. a) $f(G) = c(S, T)$ si y solo si $f(S, T) - f(T, S) = c(S, T)$. Esto es posible si y solo si cada arco en el corte (T, S) es f -cero y cada arco en el corte (S, T) es f -saturado. b) Sea f' un flujo máximo y (S', T') un corte mínimo en

la red. Entonces por el corolario 2.2 se tiene que $f(G) \leq f'(G) \leq c(S', T') \leq c(S, T)$. Si $f(G) = c(S, T)$, tenemos que $f(G) = f'(G) = c(S', T') = c(S, T)$ lo cual implica que el máximo flujo es equivalente al mínimo corte. \square

Definición 2.2.1. *Una sucesión alternada P de vértices y arcos de la forma $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ en la cual ningún vértice es repetido es llamada una semiruta desde v_0 hasta v_k . Un arco e_i en esta ruta es arco delantero en P si éste es dirigido a v_i en caso contrario es arco trasero en la ruta P . Una semiruta es f -insaturada si ningún arco delantero es f -saturado y ningún arco trasero es f -cero. Una ruta f -insaturada desde s hasta t es llamada ruta f -aumentada.*

Para cada arco e_i en una ruta f -aumentada P , definimos $\delta_i(P) = c(e_i) - f(e_i)$ si e_i es arco delantero y $\delta_i(P) = f(e_i)$ si e_i es arco trasero. El exceso de capacidad de flujo de la semiruta P es $\delta(P) = \min\{\delta_i(P) : e_i \in P\}$. Si P es una ruta f -aumentada con exceso de capacidad de flujo $\delta(P)$, un nuevo flujo factible se obtiene si incrementamos el flujo a lo largo de cada arco delantero en $\delta(P)$ y al mismo tiempo reducimos el flujo a lo largo de cada arco trasero en $\delta(P)$, tal que $f'(G) = f(G) + \delta(P)$

Teorema 2.2.3. *Un flujo f en una red es máximo flujo si y solo si no existen rutas f -aumentadas.*

Demostración. Si existiera una ruta f -aumentada en la red, el valor de la corriente de flujo puede incrementarse usando esta ruta, además la corriente del flujo no es un flujo máximo. Así si la corriente del flujo f es un flujo máximo, no existen rutas f -aumentadas. Ahora mostraremos que si no existen rutas f -aumentadas con respecto al flujo f , f es en efecto un flujo máximo. Sea S el conjunto de todos los vértices i tales que existe una ruta f -insaturada desde s a i . Obviamente, s está en S y t no es vértice en S . Así que existe un corte (S, T) en la red. Sea (i, j) cualquier arco en este corte. Ya que no existen rutas f -insaturadas desde s a j , el arco (i, j) es necesariamente f -saturado. De igual forma, cualquier arco en el corte (S, T) es f -cero. así que el valor de la corriente de flujo es igual a la capacidad del corte (S, T) . Por lo tanto el flujo es máximo. \square

Teorema 2.2.4 (Teorema de Ford-Fulkerson). *En una red, el valor del máximo flujo es igual a la capacidad del mínimo corte. Este Teorema también es conocido como Teorema de máximo flujo y mínimo corte.*

(Hu & Shing, p 42. Wilson, p 133)

Definición 2.2.2. *Dos rutas desde s hasta t en una red son llamadas rutas disjuntas desde s a t si ellas no tienen vértices en común aparte de s y t . Cualquier par de rutas son llamadas arco-disjuntas si no existen arcos en común.*

Teorema 2.2.5 (Teorema de Menger (1)). *El máximo número de rutas disjuntas entre cualquier par de vértices no adyacentes es igual al mínimo número de vértices que pueden ser borrados para que no existan rutas entre ese par de vértices.*

Teorema 2.2.6 (Teorema de Menger (2)). *El máximo número de rutas arco-disyuntas desde s a t en un grafo es igual al mínimo número de arcos que pueden ser borrados para que no hayan tales rutas.*

(Wilson, pp 127, 128)

Teorema 2.2.7. *Teorema de Menger(1) implica Teorema de Menger(2).*

Demostración. Sea G un grafo no dirigido (Figura 1.) en el cual s y t son vértices. Introducimos dos nuevos vértices x e y , juntamos x con s e y con t . El grafo extendido es G' y en este $L(G')$ es el grafo de líneas. Sea s' un vértice en $L(G')$ que corresponde al arco que une x con s en G' . De igual forma sea t' el vértice en $L(G')$ que corresponde al arco (y, t) . Se logra notar que s' y t' no son adyacentes

ya que s y t son distintos. Cualquier corte en G corresponde a un conjunto de vértices en $L(G')$, la eliminación de estos en el grafo en el cual no existen rutas de s' a t' . Además cualquier par de aristas de rutas arco-disyuntas entre s y t se convierte en 2 rutas disyuntas entre s' y t' en $L(G')$. Así El teorema de Menger (1) implica el teorema de Menger(2). \square

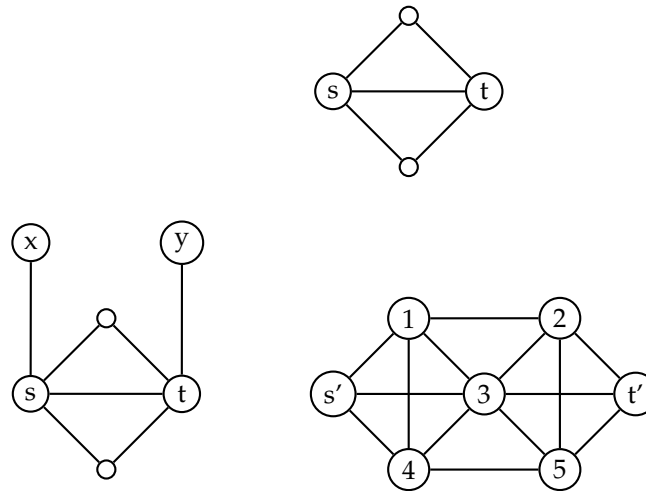


Figura 1.

Teorema 2.2.8. *Teorema de Ford-Fulkerson y los teoremas de Menger son equivalentes.*

Demostración. En la prueba de Menger(1), se muestra el uso del teorema de Ford-Fulkerson para conseguir el resultado, en el teorema 2.2.7 se muestra que el teorema de Menger(1) implica el teorema de Menger(2). Sólo falta probar que el teorema de Menger(2) implica el teorema de Ford-Fulkerson.

Sea G una red con s y t . La capacidad de cada arco (i, j) es el entero positivo c_{ij} . Reemplazando cada arco por c_{ij} arcos, resulta un multigrafo G' con una unidad de capacidad en cada arco. El valor del flujo p de máximo flujo en G es igual al número de rutas arco-disyuntas de s a t en G' . La capacidad q del mínimo corte en G es igual al número de arcos en un mínimo corte en G' . Por el teorema de Menger(2) se concluye que $p = q$. Así que se tiene el resultado del teorema de Ford-Fulkerson. \square

Teorema 2.2.9 (Teorema de König). *El máximo tamaño de un emparejamiento en un grafo bipartito G es igual al mínimo tamaño de una cobertura en G .*

(Cameron, p 178)

Teorema 2.2.10. *Teorema de Menger implica Teorema de König.*

Demostración. Dado un grafo bipartito, construimos un digrafo G' como anteriormente se hizo. Por Menger el máximo número de rutas disyuntas de s a t

es igual al mínimo número de vértices que pueden ser borrados para destruir los caminos de fuente a meta. Pero el primero es la cardinalidad del emparejamiento y el segundo la cardinalidad de la cobertura. \square

Teorema 2.2.11. *Teorema de König implica teorema de Menger.*

Demostración. Sea x e y dos vértices no adyacentes en un grafo $G = (V, A)$ con n vértices. La vecindad $N(x)$ de x es el conjunto de todos los vértices adyacentes a x , $N(y)$ es el conjunto de vértices adyacentes a y , la intersección $N(x) \cap N(y)$ es denotada por T . Sea $X = N(x) - T$ y $Y = N(y) - T$. Así tenemos una partición de V en cuatro conjuntos T, X, Y, U donde $U = V - T - X - Y$. El conjunto S de vértices en el grafo es llamado un conjunto separador de x, y si al borrar S del grafo no queden rutas de x a y . Obviamente, T es un subconjunto de de cualquier conjunto separador. Suponga que el tamaño de un conjunto mínimo separador de x, y es k . Así existe un camino de x a y , cuando cualquier conjunto de $k - 1$ vértices es borrado y existe un conjunto separador de x, y de cardinalidad k .

El conjunto S es la unión disjunta de T y $S - T$. Si $|T| = t$, existen t rutas disjuntas entre x, y usando los vértices en T . Se distinguen dos casos. (Figura 2.)

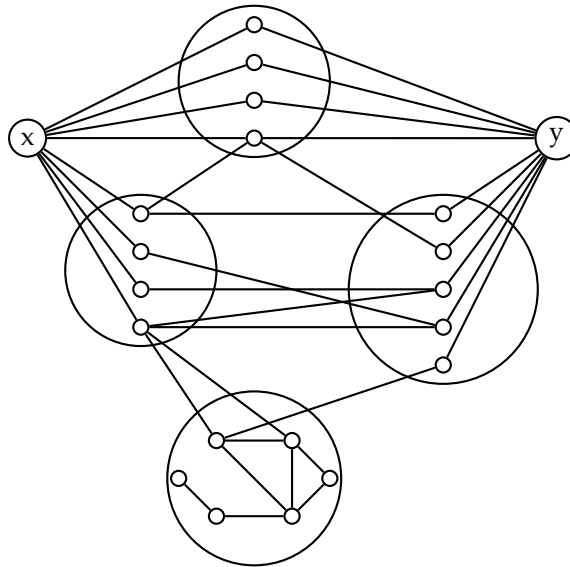


Figura 2.

Caso(i) Si S es un mínimo conjunto separador de x, y , $S \cap U = \emptyset$. Sea $G' = (X, Y, A')$ un grafo bipartito en el cual las aristas son precisamente las de G unidas a los vértices en X y Y . Ya que $(S - T)$ es un conjunto de vértices de cardinal mínimo en el grafo bipartito y ya que la exclusión de uno de estos vértices no aumenta el tamaño de S , $(S - T)$ es necesariamente una cobertura mínima en el grafo bipartito. Así por König existe un emparejamiento máximo de tamaño $(k - t)$, donde $(k - t)$ rutas disjuntas entre x, y usando los vértices

de $(S - T)$. Así que son k rutas disyuntas entre x, y , fuera de que hay t rutas que tienen dos aristas y el resto tiene tres.

Caso(ii) Existe un mínimo conjunto separador S de x, y de tamaño k tal que $S \cap U \neq \emptyset$. Esto puede ser probado por inducción sobre n , existen k rutas disyuntas entre x, y . Asumimos que Menger se cumple para todos los grafos de orden menor que n . Sea $G(x)$ un subgrafo de G que contiene todas las rutas entre x, y y los vértices en S , tal que no hay dos rutas que tengan otro vértice en común que x . Construimos el grafo $G'(x)$ introduciendo un vértice artificial x' a cada vértice en S . El tamaño del mínimo conjunto separador de x, x' en $G'(x)$ no puede ser más que k . Si este es más pequeño que k , los mínimos requerimientos de S son violados. Ya que las rutas escogidas al construir $G(x)$ son pares disjuntos, hay al menos un vértice en $N(x)$ que no es un vértice de $G'(x)$. Así este orden es menor que n . Por la hipótesis de inducción, hay k rutas disyuntas entre x, x' . Así hay k pares de rutas disyuntas entre x y S . Similarmente, se establece que hay k rutas entre y y S . Si unimos las k rutas de $G(x)$ y las k rutas de $G(y)$ tenemos k rutas disyuntas. \square

Para poder abordar el siguiente teorema es necesario definir algunos elementos matriciales.

Definición 2.2.3. Una línea en una matriz es una fila o columna. Suponga que P es una propiedad tal que un elemento en A puede no tener. Una colección de elementos en la matriz que satisfagan la propiedad P es P -independiente si no hay dos elementos con la propiedad P que estén en la misma línea. El P -rango de A es el conjunto P -independiente de mayor cardinal.

Teorema 2.2.12 (Teorema de König-Egervary). El P -rango de una matriz es igual al mínimo número de líneas que contienen todos los elementos de la matriz con la propiedad P .

(Wilson, p 123)

Teorema 2.2.13 (Teorema de Dilworth). En un Orden finito, el máximo tamaño de una anticadena es igual al mínimo número de cadenas que pueden particionar completamente al Orden.

(Anderson, p 31. Cameron p 196. Van Lint p 53)

Definición 2.2.4. Sea $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X . Un sistema de representantes distintos (SDR) para estos conjuntos es una n -tupla (x_1, x_2, \dots, x_n) de elementos con las siguientes propiedades.

- a) $x_i \in A_i$ para todo i (representante).
- b) $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ (distintos)

Definición 2.2.5. Condición de Hall (CH).

$$|\cup_{j \in J} A_j| \geq |J|$$

donde $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 2.2.14 (Teorema de Hall). *Dada una familia de subconjuntos de un conjunto determinado. La familia posee un SDR si y solo si satisface la condición de Hall.*

Demostración. La parte necesaria es obvia, la suficiente se hará por inducción sobre n . Para $n = 1$ obviamente se tiene. Si $|\cup_{j \in J} A_j| = |J|$ diremos que J es crítico, en este caso todo elemento de $\cup_{j \in J} A_j$ debe ser usado como un representante de uno de esos conjuntos. Si J no crítico excepto para $J = \emptyset$ y posiblemente $J = \{1, 2, \dots, n\}$. Sea x_n un punto cualquiera de A_n (note que $A_n \neq \emptyset$ por CH) y, para $i = 1, 2, \dots, n - 1$, se define $A'_i = A_i - \{x_n\}$. Verifiquemos que la familia (A'_1, \dots, A'_{n-1}) satisface CH. Tomemos $J \subseteq \{1, \dots, n - 1\}$, y suponga que $J \neq \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} |\cup_{j \in J} A'_j| &\geq |\cup_{j \in J} A_j| - 1 \\ &> |J| - 1 \end{aligned}$$

La primera desigualdad es porque se eliminó un elemento y la segunda es porque J no es crítico. Así que $|\cup_{j \in J} A'_j| \geq |J|$. Por inducción, (A'_1, \dots, A'_{n-1})

tiene un SDR (x_1, \dots, x_{n-1}) . Entonces (x_1, \dots, x_n) es un SDR para la familia original ya que claramente $x_n \neq x_j$ para $n \neq j$. \square

Teorema 2.2.15 (Teorema de König-Egervary). *El número de líneas de una matriz A de ceros y unos, que contiene a todos los 1's es igual al máximo número de 1's no dos en línea.*

Demostración. Sea m el mínimo número de líneas de A que contiene a todos los 1's de A y sea M el máximo número de 1's no dos en línea. Claramente $m \geq M$. Consideremos la mínima cobertura por línea que consiste en r filas y s columnas ($r + s = m$). Sin pérdida de generalidad esas son las primeras r filas y las primeras s columnas. Definamos los conjuntos A_i , $1 \leq i \leq r$ por $A_i = \{i > s; a_{ij} = 1\}$. Si alguna k -tupla de los A_i 's contienen menos de k elementos, entonces podría reemplazar las correspondientes k filas por $k - 1$ columnas, aún en la cobertura todos los 1's. Ya que esto es imposible, vemos que los A_i 's cumplen CH. Así que los A_i 's tienen un SDR. Esto significa que los 1's no dos en línea, en las primeras r filas y s columnas. Por el mismo argumento existe s 1's no dos en línea en las primeras s columnas y no hay en las primeras r filas. Esto es que $M \geq m$. Por lo tanto $M = m$. \square

Del teorema anterior se observa que el teorema de Hall implica el teorema de König-Egervary.

Teorema 2.2.16. *El teorema de König implica el teorema de Hall.*

Demostración. Sea $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ una familia de conjuntos y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ la unión de todos los conjuntos en la familia. En el grafo bipartito $G = (F, X, E)$ existe una arista entre A_i y x_j si y solo si $x_j \in A_i$. Supongamos que la familia cumple CH pero no posee un SDR. En este caso, consideremos la subfamilia más grande que tenga un SDR, consistente de r vértices en F , donde

$r < m$. Es decir, el tamaño del máximo emparejamiento es r , además por König, existe un cubrimiento W que consiste de r vértices que tienen más de un vértice de X .

Supongamos que $F - W = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ entonces $|X \cap W| = r - (m - k)$. Ahora la CH implica que la cardinalidad de la unión de los k conjuntos en la subfamilia $F - W$ es al menos k . Así que $|x \cap W| \geq k$, así $r - (m - k) \geq k$ lo cual contradice que $r < m$. \square

Otra demostración de Hall es usando el teorema de Dilworth.

Teorema 2.2.17. *El teorema de Dilworth implica el teorema de Hall.*

Demostración. Suponga que $\{A_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ una familia de subconjuntos de $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ que satisface CH.

Considere el conjunto $P = \{x_1, x_2, \dots, x_m, A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Sea $<$ una relación estricta de orden parcial en P , donde $x_i < A_j$ si y solo si $x_i \in A_j$. En este poset, X es una anticadena de cardinal m . Sea D una anticadena arbitraria en el Orden que consiste de p elementos de X y q elementos de la familia. Suponga que $D = \{x_1, x_2, \dots, x_p, A_1, A_2, \dots, A_q\}$ ya que ninguno de los p elementos pueden ser un elemento de la unión de los q conjuntos en D , la unión puede tener a lo más $m - p$ elementos. Pero la CH implica que esa unión tenga al menos q elementos. Así que $q \leq (m - p)$ implica que $p + q \leq m$. Así X es una máxima anticadena en el Orden. Por Dilworth existe una partición de el Orden en m cadenas. Cada cadena consiste de dos elementos, un elemento de la familia y un elemento de X . Lo cual significa que existe un SDR para la familia. \square

Con esta prueba se demuestra que los teoremas: Ford-fulkerson, Menger(1), Menger(2), König, König-Egervary, Dilworth y Hall son equivalentes.

3. Una nueva prueba del Teorema de Hall y algoritmo para detectar sistemas de representantes distintos

3.1. Teorema de Hall

Teorema 3.1.1. *Dada una familia de conjuntos que satisfacen CH. Si eliminamos un elemento cuya multiplicidad es máxima de uno de los conjuntos a los cuales él pertenece entonces la familia restante satisface CH. Se define multiplicidad al número de conjuntos al que el elemento pertenece.*

Demostración. Sea $F = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ una familia de conjuntos que satisfacen CH y supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in S_1$ y que la multiplicidad de x es grande, es decir $m(x) > 1$. Inicialmente si $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ tenemos que $|\bigcup_{i \in J} S_i| \geq |J|$ entonces $\bigcup_{i \in J, i \neq 1} (S_i - \{x\}) \cup S_1 = \bigcup_{i \in J} S_i$, por tanto $|\bigcup_{i \in J, i \neq 1} (S_i - \{x\}) \cup S_1| \geq |J|$. lo cual sigue cumpliendo Hall. \square

Corolario 3.1.1. *De una familia de subconjuntos de un conjunto que satisface la condición de Hall. Si se elimina un elemento de multiplicidad máxima en más de un subconjunto que lo contenga entonces la familia restante también cumple la condición de Hall.*

Demostración. La prueba de este corolario se basa en el teorema anterior. Sea $F = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que satisface Hall. Si seleccionamos un elemento x de máxima multiplicidad, lo eliminamos de uno de ellos, la familia de subconjuntos restantes sigue cumpliendo Hall por el teorema, si eliminamos x de otro subconjuntos la familia restante sigue cumpliendo Hall por el teorema y así sucesivamente. \square

Teorema 3.1.2 (Teorema de Hall). *Dada una familia de subconjuntos de un conjunto determinado. La familia posee un SDR si y solo si satisface la condición de Hall.*

Nueva Demostración. Dada una familia de m conjuntos no vacíos A_i 's cuyos elementos pertenecen a un conjunto X de n elementos $m \leq n$. Tal familia de conjuntos cumple la condición de Hall. Usando una forma matricial para representar los conjuntos, utilizamos las filas como los conjuntos y las columnas como los elementos, es decir $a_{ij} = 1$ si y solo si $x_j \in A_i$ y es cero en caso contrario, como la familia cumple Hall, debe existir un sdr del conjunto X . Una forma de determinar tal sdr es usar el siguiente algoritmo. Cada conjunto posee su

cardinal y a cada elemento se le asocia su multiplicidad que es el número de conjuntos a los cuales él pertenece, además a cada conjunto se le asocia un peso que estará determinado por la suma de las multiplicidades de sus elementos. Escogemos el conjunto con menor cardinal y de este escogemos el elemento de mayor multiplicidad, tal elemento representará al conjunto, después el elemento será quitado de los conjuntos a los cuales él pertenece y se quitará el conjunto representado o fila; como se escogió el conjunto de menor cardinal y elemento de mayor multiplicidad, se garantiza que los conjuntos restantes sean no vacíos y por el corolario anterior los nuevos conjuntos satisfacen Hall. Ahora bien, al quitar un elemento y un conjunto, se sigue preservando Hall, lo

cual indica que por cada paso del algoritmo se encuentra un elemento representante y por ende un sdr de la familia de subconjuntos. \square

Veamos si el algoritmo genera todos los sdr's posibles de una familia de conjuntos que satisfagan Hall. Supongamos que no es así que existe un sdr que no es generado por el algoritmo, lo cual indica que existe un elemento que no es descartado por algoritmo en todos los pasos, si el elemento nunca es elegido es porque su multiplicidad en cada paso es la menor, lo cual indica que debería tener la mínima multiplicidad que es 1, ahora en el último paso todos los elementos incluyendo a éste, tienen multiplicidad 1. Por lo tanto será en algún momento escogido. Ahora en caso que no sea elegido por otra razón, por ejemplo, pertenece a un conjunto cuyo cardinal en cada paso es mayor que los demás y no pertenece a ningún otro conjunto, entonces cuando se llegue al último paso tendrá que ser escogido. Por tal razón el algoritmo detecta todos los sdr's.

Ejemplo 3.1.1. Para el empleo del algoritmo, Sea $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$. donde

$$A_1 = \{a, b, c\}$$

$$A_2 = \{a, c\}$$

$$A_3 = \{a, d\}$$

$$A_4 = \{b, c\}$$

$$A_5 = \{e\}$$

$$A_6 = \{e, f, g\}$$

$$A_7 = \{d, g\}$$

Escogemos el conjunto de menor cardinal, en este caso es A_5 y de él escogemos a e , entonces e representa a A_5 , y e es eliminado de A_6 . Ahora existen 5 conjuntos con

cardinal 2, escogemos el elemento de mayor multiplicidad del conjunto de mayor peso en este caso es escoger a a o c de A_2 , escogamos a a . Al escoger a a lo eliminamos de los demás conjuntos a los cuales él pertenece y a queda como representante de A_2 . Por ende A_3 queda con sólo un elemento así que d lo representaría. Al eliminar a d , resulta que g representaría a A_7 , ya que queda con un solo elemento. Por la misma razón anterior a A_6 lo representaría f . Finalmente nos resta A_1 y A_4 , para los cuales coincide en cardinal, peso y multiplicidad de elementos, en este caso se puede asignar cualquier elemento a cualquier conjunto. Escogemos a b para representar a A_1 y a c para representar a A_4 . Así que el sdr que nos queda es (b, a, d, c, e, f, g) . Si se escogen en los otros casos se obtienen (c, a, d, b, e, f, g) , (a, c, d, b, e, f, g) .

4. Conclusiones

El trabajo aquí presentado presenta nuevas facetas del Teorema de Hall, presentándose una equivalencia lógica con otros teoremas que aparentemente no se conectan y además la presentación de un algoritmo que consiga de forma efectiva detectar los sistemas de representantes distintos permite hacer como estudio posterior el paso de los resultados de este algoritmo a los universos en los que habitan los otros teoremas equivalentes.

Referencias

- [1] ANDERSON, I. *Combinatorics of finite sets*, General Publishing Company Ltda, 1987.
- [2] CAMERON, P. *Combinatorics: Topic, Techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] HU, T.; SHING, M. *Combinatorial Algorithms*, General Publishing Company Ltda, 1982.

- [4] VAN LINT, H, T.; WILSON, R, M. *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, Second Edition, 2001.
- [5] WILSON, R. *Introduction to Graph Theory*, Third Edition, Longman, 1985.

Sobre el autor:

Nombre: Edwin Vargas Carranza

Correo Electrónico: edalcava@gmail.com

Institución: Profesor de la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.