Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal I**

Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso anual 2016**

Segundo parcial – Sábado 25 de junio de 2016

Número de parcial	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del parcial es 2 horas y media.
- El puntaje total es 20 puntos.

(I) Verdadero Falso. Total: 4 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
F	**F**	**V**	**V**

Ejercicio 1: Existen matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tales que A tiene rango $(n-1)$ y AB tiene rango n.

Ejercicio 2: Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$ entonces $\begin{vmatrix} a & d & g \\ 2b-3c & 2e-3f & 2h-3i \\ 2c & 2f & 2i \end{vmatrix} = -6$.

Ejercicio 3: La recta que pasa por el punto $P = (1, 0, -1)$ y tiene vector director $V = (0, 1, 1)$ corta al plano $-x + 2y + 3z = 6$.

Ejercicio 4: La distancia entre el punto R y la recta que pasa por los puntos P y Q es: $\frac{\|(Q-P)\wedge(R-P)\|}{\|Q-P\|}$.

(II) Desarrollo. Total: 16 puntos

Ejercicio 1: (4 puntos)

Sean A y B matrices 4×4 tales que $det(A) = 3$ y $det(B) = -4$. Halle $det(2A^tB^{-1})$, explicitando las propiedades que utiliza en cada paso.

Solución: Se trata de matrices 4×4 de manera que

$$det(2A^tB^{-1}) = 2^4 \frac{det(A)}{det(B)} = -12.$$

Ejercicio 2: (4 puntos)

Pruebe que para cualquier par de vectores $X, Y \in \mathbb{R}^3$ se cumple la identidad del paralelogramo:

$$\| X + Y \|^2 + \| X - Y \|^2 = 2 \| X \|^2 + 2 \| Y \|^2 .$$

Solución: Usando propiedades de linealidad del producto escalar se cumple:

$$\begin{aligned} \| X+Y \|^2 &= \langle X+Y, X+Y\rangle = \langle X,X\rangle + \langle X,Y\rangle + \langle Y,X\rangle + \langle Y,Y\rangle \\ &= \| X \|^2 + \langle X,Y\rangle + \langle Y,X\rangle + \| Y \|^2 \, . \end{aligned} \tag{1}$$

De manera análoga:

$$\begin{aligned} \| X-Y \|^2 &= \langle X-Y, X-Y\rangle = \langle X,X\rangle - \langle X,Y\rangle - \langle Y,X\rangle + \langle Y,Y\rangle \\ &= \| X \|^2 - \langle X,Y\rangle - \langle Y,X\rangle + \| Y \|^2 \, . \end{aligned} \tag{2}$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades (1) y (2) se obtiene la identidad enunciada.

Ejercicio 3: (4 puntos)

a) Halle las ecuaciones **paramétricas** de la recta r que pasa por el punto $(1,-1,0)$ y es paralela a la recta de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$r) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

b) Halle la ecuación **reducida** del plano π que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y que contiene a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 2 + 3\alpha \end{cases}$$

Solución: Puede por ejemplo obtenerse la normal al plano π a partir de dos vectores generadores (uno el vector generador de la propia recta y otro obtenido considerando la diferencia entre el punto P y un punto cualquiera de la recta). Resulta $n = (5,-1,-1)$. Considerando finalmente el punto de paso P para el plano se obtiene la ecuación reducida

$$5x - y - z = 3.$$

Ejercicio 4: (4 puntos)

Considere el plano π de ecuaciones paramétricas:

$$\pi)\left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda+2\mu \\ z = 1+\lambda+2\mu \end{array}\right. ,$$

la recta r de ecuaciones paramétricas:

$$r)\left\{\begin{array}{l} x = 1-2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1+\alpha \end{array}\right. ,$$

y el punto $A = (1, 1, 3)$.

a) Pruebe que el plano π y la recta r son ortogonales.
b) Halle $\pi \cap r$.
c) Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución:

a) Lo más sencillo es verificar que el vector generador de la recta r, $(-2, -1, 1)$, es ortogonal a los dos vectores generadores del plano π, $(1, -1, 1)$ y $(0, 2, 2)$.
b) Llevando las ecuaciones de la recta r a las ecuaciones del plano π y resolviendo el sistema resultante en las incógnitas α, λ y μ se obtiene:

$$\pi \cap r = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

(que corresponde a $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ y $\mu = -\frac{1}{2}$.)
c) Usando la fórmula para la distancia de un punto a un plano resulta:

$$d(A, \pi) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$