Teorema Espectral para Operadores Normales

El propósito de esta nota es analizar el teorema espectral en el caso complejo. Como hemos visto anteriormente en el caso real la clase de operadores que se diagonalizan en una base ortonormal es la de los autoadjuntos. En el caso complejo la clase es mas amplia, se trata de los operadores normales, de los cuales los operadores unitarios son una clase particular. En lo que sigue V es un espacio vectorial con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 1. *Un operador $T : V \to V$ es **normal** si conmuta con su adjunto, es decir si $T \circ T^* = T^* \circ T$*

Ejemplo 1. Si $T : V \to V$ es autoadjunta entonces es normal, en efecto, si T autoadjunta entonces $T = T^*$ y por lo tanto normal.

Ejemplo 2. Si T es unitaria entonces es normal, en efecto si T unitaria entonces $T^* = T^{-1}$ y por lo tanto $TT^* = TT^{-1} = T^{-1}T = T^*T$

Ejemplo 3. Veamos que hay ejemplos de operadores normales que no son ni unitarios ni autoadjuntos. En efecto, basta considerar $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que su matriz asociada en la base canónica sea ${}_B((T))_B = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ entonces

$$ {}_B((T^*))_B = \overline{{}_B((T))_B}^t = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} $$

Se observa que T no es ni autoadjunta, ni unitaria (los autovalores de T no tienen módulo 1) pero sin embargo

$$ TT^* = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|1+i\|^2 & 0 \\ 0 & \|1-i\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} $$

y por otro lado

$$ T^*T = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|1-i\|^2 & 0 \\ 0 & \|1+i\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} $$

con lo cual se deduce que T es normal.

1. Descomposición cartesiana de un operador

Si z es un numero complejo, entonces $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. Resulta inmediato observar que

$$ z = Re(z) + iIm(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) + i\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) $$

Esta es la conocida descomposición cartesiana de un número complejo. La observación que nos interesa hacer es que la misma se puede caracterizar en términos de la estructura algebraica de los números complejos y de la operación de conjugación. Es decir podemos definir la parte real y la pare imaginaria de un número complejo, sumando, multiplicando y conjugando. Existe una analogía posible entre los números complejos y los operadores, para observarla basta notar que el rol de la conjugación en el contexto de los operadores lo juega la operación de adjunto. Recordemos por ejemplo, que de la misma manera que el conjugado de una suma es la suma de los conjugados el adjunto de una suma

de operadores es la suma de los adjuntos. Del mismo modo, tal como $\overline{\overline{z}} = z$ se tiene que $(T^*)^* = T$.
Sea T un operador de un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V. Definimos la parte real e imaginaria del mismo como

$$Re(T) = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ y}$$
$$Im(T) = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Es inmediato verificar que:

$$T = Re(T) + iIm(T) = \frac{1}{2}(T + T^*) + i\frac{1}{2i}(T - T^*)$$

Por otra parte tanto la parte real como la parte imaginaria de un operador resulta ser operadores autoadjuntos, en efecto

$$(Re(T))^* = \left(\frac{1}{2}(T + T^*)\right)^* = \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T^* + T) = Re(T) \quad \text{ y}$$
$$(Im(T))^* = \left(\frac{1}{2i}(T - T^*)\right)^* = \frac{1}{\overline{2i}}(T^* - T^{**}) = -\frac{1}{2i}(T^* - T) = Im(T)$$

Por otra parte al ser T normal se verifica que la parte real e imaginaria conmutan:

Proposición 1. *Sea $T : V \to V$ un operador lineal normal entonces $Re(T) \circ Im(T) = Im(T) \circ Re(T)$.*

Demostración. Basta probar que $T + T^*$ y $T - T^*$ conmutan. Sabiendo que $TT^* = T^*T$ resulta que:

$$(T + T^*)(T - T^*) = TT - TT^* + T^*T - T^*T^* = TT - T^*T^*,$$

por otro lado

$$(T - T^*)(T + T^*) = TT + TT^* - T^*T - T^*T^* = TT - T^*T^*,$$

de donde

$$(T + T^*)(T - T^*) = (T - T^*)(T + T^*)$$

y por lo tanto parte real e imaginaria conmutan. □

2. Diagonalización simultanea

Definición 2. *Sea V de dimensiíon finita y sean T_1 y T_2 dos operadores lineales en V. Decimos que T_1 y T_2 se diagonalizan simultaneamente si y solo si existe $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V tal que $T_1(v_i) = \lambda_i v_i$ y $T_2(v_i) = \mu_i v_i$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, es decir dos transformaciones se diagonalizan simultaneamente si y solo si existe una base de vectores propios común para ambos operadores. Aunque no necesariamente con valores propios iguales.*

Proposición 2. *Sean T_1 y T_2 dos operadores lineales autoadjuntos en V, entonces T_1 y T_2 conmutan, es decir $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, si y solo si se diagonalizan simultáneamente en una base ortonormal.*

Demostración. Veamos el directo, como T_1 es autoadjunta entonces, en virtud del teorema espectral, se diagonaliza en una base ortonormal entonces $V = \bigoplus_i S_{\lambda_i}$ donde los subespacios S_{λ_i} son dos a dos ortogonales (por ser autoadjunta). Por lo tanto para probar que existe una base ortonormal común de vectores propios de ambos operadores bastara con probar que en cada subespacio propio S_{λ_i} de T_1 es posible construir una base ortonormal de vectores propios de T_2.
Consideremos entonces un subespacio propio de T_1, S_{λ_i} cualquiera. Tal subespacio no es necesariamente propio para T_2 pero si debe ser invariante por T_2. En efecto, sea $s \in S_{\lambda_i}$ queremos probar que $T_2(s) \in S_{\lambda_i}$, es decir queremos probar que $T_2(s)$ es vector propio de T_1 asociado al valor propio λ_i.

$$T_1(T_2(s)) = T_2(T_1(s)) = T_2(\lambda_i s) = \lambda_i T_2(s)$$

y por lo tanto $T_2(s) \in S_{\lambda_i}$.

Por ser S_{λ_i} invariante bajo T_2 resulta que la restricción de $T_2|S_{\lambda_i} : S_{\lambda_i} \to S_{\lambda_i}$ es un operador lineal, y como T_2 es autoadjunta, entonces la restricción también lo es. Por el teorema espectral existe B_i una base ortonormal de S_{λ_i} formada por vectores propios de T_2. Entonces en cada subespacio propio de de T_1 se puede construir una base ortonormal formada por vectores propios de T_2. Obviamente estos también serán vectores propios de T_1 pues $B_i \subset S_{\lambda_i}$. Como además $S_{\lambda_i} \perp S_{\lambda_j}$ si $i \neq j$ entonces $B = \cup B_i$ es base ortonormal de V formada por vectores propios de ambas transformaciones.
Recíprocamente, si ambas transformaciones se diagonalizan simultáneamente existe B base ortonormal de V tal que ${}_B((T_1))_B$ y ${}_B((T_2))_B$ son ambas diagonales y por lo tanto conmutan. Consecuentemente T_1 y T_2 también. □

3. Teorema espectral para operadores normales

Tenemos entonces todas las herramientas para poder probar el siguiente resultado:

Teorema 3. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador normal entonces existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Como T es normal es posible considerar la descomposición en parte real e imaginaria vista antes, es decir

$$T = Re(T) + iIm(T)$$

donde $Re(T)$ e $Im(T)$ son dos operadores autoadjuntos que conmutan. Por la proposición anterior existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V formada por vectores propios de $Re(T)$ e $Im(T)$, es decir:

$$Re(T)(v_j) = \alpha_j v_j$$
$$Im(T)(v_j) = \beta_j v_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Y como $T = Re(T) + iIm(T)$ resulta entonces que:

$$T(v_j) = Re(T)(v_j) + iIm(T)(v_j) = (\alpha_j + i\beta_j)v_j.$$

Por lo tanto v_j es vector propio de T asociado al valor propio $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Entonces B es, tal como queríamos, una base ortonormal de V formada por vectores propios de T. □

Observación 4. *Vale el recíproco, esto es, si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ es un operador lineal tal que existe B base ortonormal de V formada por vectores propios de T entonces T es normal.*

Demostración. Ejercicio. Sugerencia: mirar la demostración del recíproco del teorema espectral para operadores autoadjuntos. □

Corolario 5. *Sea V un un $\mathbb{C}$- espacio vectorial de dimensión finita. Sea $T : V \to V$ un operador unitario entonces existe $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V formada por vectores propios de T.*

Demostración. Basta observar que los operadores unitarios son normales. □