Ejemplo

Calculemos:

$$\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx$$

Llamemos $P(x) = x^4+3x^2+x+1$ y $Q(x) = x^3+x$
Como $gr(P) > gr(Q)$, tenemos que hacer la división.

Resulta: $\frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x} = x + \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}$

Descomponemos entonces la segunda expresión en fracciones simples:

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x} = \frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Hallemos A,B y C.

$$\frac{2x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

de donde $A = B = C = 1$

Por lo tanto:

$$\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx = \int xdx + \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx$$

Calculemos la tercer integral.

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

La primera se resuelve con el cambio de variable $u = x^2+1$ y la segunda es directamente $\arctan(x)$. Resulta al final:

$$\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \arctan(x)$$

Ejemplo

Calculemos:

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx$$

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx = \int \frac{2x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \int \frac{A}{x-1}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}dx$$

Resulta que: $A = 1 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 2$

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{du}{u}$$

Donde hicimos el cambio de variable $u = x^2+x+1$. Por otro lado:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1\right]}$$

Hagamos $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2+1\right]} = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Por lo que finalmente llegamos a:

$$\int \frac{2x^2+2x-1}{x^3-1}dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})$$