Facultad de Ingeniería - IIE
Modelado y análisis de redes de telecomunicaciones
Curso 2016
Práctico 4

Procesos Puntuales en el Plano (Geometría Aleatoria)

Ejercicio 1

1. **Simulación de un Proceso de Poisson**. Se considera un conjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ con área $\nu(W)$. Sea N una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $\lambda\nu(W)$. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, indénticamente distribuidas con distribución uniforme en W (esto es $P(X_1 \in B) = \frac{\nu(B)}{\nu(W)}$). Sea X el proceso estocástico definido por

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

   Probar que X es un proceso puntual Poisson con intensidad λ. Sugerencia: utilizar la transformada de Laplace.

2. **Superposición de Procesos de Poisson independientes**. Sean $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ procesos puntuales en $\mathbb{R}^d$ independientes. Se asume que Φ_i es p.p. Poisson de intensidad Λ_i $\forall\ i = 1 \ldots n$. Probar que $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{n} \Phi_k$ la superposición de dichos p.p., es también un p.p. Poisson de intensidad $\Lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} \Lambda_k$.

3. **Refinamientos de un Proceso de Poisson**. Sea $\Phi = \sum_i \delta_{x_i}$ un proceso puntual Poisson de intensidad Λ en $\mathbb{R}^d$. Sea $\Phi^p = \sum_i \epsilon_i \delta_{x_i}$ donde $P(\epsilon_i = 1|\Phi) = 1 - P(\epsilon_i = 0|\Phi) = p(x_i)$ un p-refinamiento (dependiente) de Φ:

   (a) Probar que Φ^p es un proceso puntual Poisson de intensidad $p\Lambda$ donde $p\Lambda(A) = \int_A p(x)\Lambda(dx)$.

   (b) Deducir que si Φ es un p.p. Poisson homogéneo de intensidad λ y Φ^p es un p-refinamiento independiente de Φ, esto es $p(x_i) = p\ \forall\ x_i \in \Phi$, entonces Φ^p es un proceso puntual Poisson de intensidad λp.

Ejercicio 2

En este ejercicio retomaremos el modelado de ALOHA que se hizo en un práctico anterior. Por comodidad y completitud repetiremos las hipótesis del mismo y la explicación del protocolo.

El protocolo ALOHA fue uno de los primeros algoritmos de Control de Acceso al Medio para redes inalámbricas. El mecanismo es de una sencillez extrema. Cuando una estación tiene un paquete para transmitir, simplemente lo hace. Si el paquete no fue correctamente recibido por el destinario (hecho que queda en evidencia al no recibirse un ACK de su parte) entonces se espera un cierto tiempo aleatorio antes de intentar enviar el paquete nuevamente.

En este ejercicio se estudiará el protocolo en sus dos versiones más “clásicas”: la no-ranurada y la ranurada.

Consideraremos el siguiente escenario:

- Todas las estaciones transmiten paquetes a un ínico nodo, llamado radiobase o simplemente base.
- Existe un canal separado para las comunicaciones uplink (de las estaciones a la base) y downlink (de la base a las estaciones).
- Nos ocuparemos del canal uplink, pues el downlink en este escenario no es de interés.
- No existe la denominada captura de canal. Es decir, cuando las señales de dos estaciones (o más) llegan a la radiobase a la misma vez (sea cual sea la distancia entre la radiobase y cualquiera de las estaciones) éstas interfieren de tal forma que no se puede decodificar. También asumiremos que para decodificar un paquete correctamente, el paquete debe ser recibido correctamente en su totalidad (i.e. no hay corrección de errores). Esto significa que para recibir un paquete de un estación correctamente, la radiobase debe recibir la señal de esa radiobase exclusivamente durante el tiempo T que dure el paquete (asumiremos $T = 1$).

Considere el siguiente modelo sencillo de ALOHA

- La red está formada por infinitas estaciones dispuestas sobre un segmento de recta de largo L. La velocidad de propagación de la señal es v.
- La estación base se encuentra en la mitad del segmento de recta
- Asumiremos que el proceso de los tiempos de intentos de transmisión (ya sean re-transmisiones o nuevos paquetes) es Poisson de parámetro λ. Este proceso será notado como T_n (n indexa los intentos de transmisión).
- Por cada intento de transmisión, la estación que generó este intento estará ubicada aleatoriamente en el segmento de recta, con distribución uniforme e independiente para cada intento de transmisión. Este proceso será notado como X_n.

Sea $Y_n = (T_n, X_n)$ un proceso puntual en $[0, \infty) \times [0, L]$ que indica para cada intento de conexión n el momento que se generó el intento y la ubicación de la estación responsable del intento. Un ejemplo de realización del proceso puede verse en la figura 1.

a) Demuestre que la condición para una correcta recepción del intento Y_n puede traducirse como la ausencia de otro punto del proceso en el área marcada en la figura 2 (la cual denominaremos A_n, o área de exclusión para el intento n).

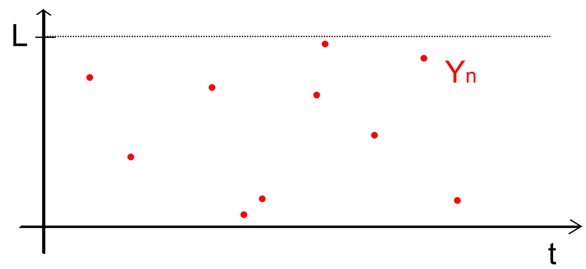

Figure 1: Ejempo de realización de Y_n

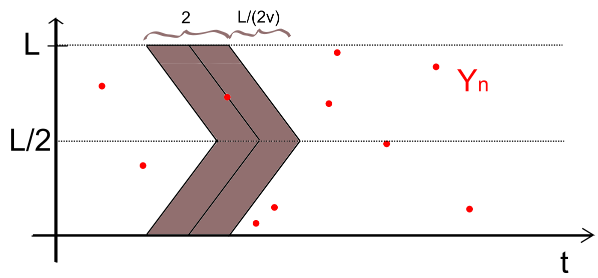

Figure 2: Ejempo de área de exclusión para un punto del proceso Y_n

b) Demuestre que Y_t es Poisson en $[0, \infty] \times [0, L]$ de parámetro λ/L. Sugerencia: Calcule la distribución de la cantidad de puntos del proceso en un rectángulo $A \in [0, \infty) \times [0, L]$ de lados $|A|_x$ y $|A|_t$. Para esto, aplique la fórmula de la probabilidad total con la partición *la cantidad de intentos en el intervalo* $|A|_t$ *es* n.

c) A partir de las dos partes anteriores deduzca la probabilidad de que la transmisión típica sea correctamente recibida. ¿Es importante la ubicación de la radiobase en el segmento de recta?

d) Calcule el throughput del sistema. Es decir, la tasa de transmisión de paquetes. Calcule los parámetros que maximizan el throughput.

Ejercicio 3

En este ejercicio modelaremos una red "celular" no planificada. Es decir, un conjunto de nodos (que denominaremos "clientes") se conectan a otro conjunto de nodos (que denominaremos "radiobases"). Ambos conjuntos serán modelados como procesos de Poisson en el plano (con intensidades λ_c y λ_r respectivamente). Un posible ejemplo de aplicación de este modelo es una red WiFi donde las radiobases son los APs (cuya ubicación generalmente no responde a una planificación muy detallada) y los clientes (sobre cuya ubicación puede decirse incluso menos que para los APs).

Asumiremos un modelo de propagación sencillo, donde la pérdida de camino será proporcional a la distancia. A su vez, asumiremos que los clientes se conectarán a la radiobase de la cual reciban la se al más potente. Por lo tanto, se conectarán a la radiobase más cercana. Se pide calcular:

1. La distribución de la distancia entre el cliente típico y la radiobase a la cual está conectado.

2. La distancia media entre el cliente típico y la radiobase a la cual está conectado.

3. Pruebe que el número medio de usuarios conectados a la radiobase típica es el cociente λ_c/λ_r.

Ejercicio 4

En redes ad-hoc es muy importante poder obtener a partir de información "local" grafos de conectividad planos. Es decir, que existe una forma de dibujarlo de manera que ninguna arista se cruce con otra (salvo los extremos de las mismas, claro está). A partir de este tipo de grafos se puede definir una estrategia de ruteo basado en información geográfica denominada "face routing" que evita que los paquetes no queden bloqueados (posibilidad que ocurre cuando la técnica de ruteo es simplemente "el vecino más próximo al destino").

Una posible construcción de este tipo de grafos es el Grafo de Gabriel ("Gabriel Graph"). En este caso, dos nodos u y v se encuentran conectados por una arista sii no hay otro nodo en el círculo que tiene como diámetro el segmento u-v (ver figura 3).

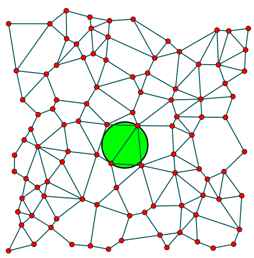

Figure 3: Ejempo de un grafo de Gabriel

En este ejercicio asumiremos que la posición de los nodos se puede modelar por un proceso de Poisson de intensidad λ. Se pide:

1. Calcular la función de distribución del largo de las aristas.

2. Calcular la esperanza del largo de las aristas.

3. Pruebe que la media de la conectividad del nodo típico es 4 independientemente de λ (es decir, que la media de la cantidad de nodos conectados al nodo típico es 4).