



Universidad de la República

Facultad de Ingeniería

Instituto de Matemática y Estadística

Notas del curso Cálculo 3

Ana González

Profesor del IMERL

Montevideo - 7 de junio de 2017

Índice general

1. Curvas paramétricas	5
1.1. Curvas	5
1.2. Longitud de arco	8
1.3. Teoría local de curvas	11
1.4. Triedro de Frenet	13
2. Integrales de línea	17
2.1. Integrales de línea de campos escalares	18
2.2. Integrales de línea de campos vectoriales	20
3. Campos de gradientes	23
3.1. Campos de gradientes	23
3.2. Integral de línea de un campo de gradientes	24
4. Teorema de Green	29
5. Rotor y campos conservativos	37
5.1. Rotor	37
6. Superficies	43
6.1. Superficies parametrizadas	43
6.2. Plano tangente	47
6.3. Área de superficies paramétricas	50
7. Integrales de superficies	55
7.1. Integrales de campos escalares sobre superficies	55
7.2. Integrales de campos vectoriales sobre superficies	59
7.2.1. Flujo a través de una superficie	59

7.2.2. Orientación	59
7.2.3. Integrales de campos vectoriales sobre superficies	61
8. Teorema de Stokes	67
8.1. Interpretación intrínseca del rotor	72
8.2. Aplicaciones del teorema de Stokes	73
9. Divergencia y campos solenoidales	77
9.1. Divergencia	77
9.2. Campos solenoidales	78
10. Teorema de Gauss	83
10.1. Teorema de Gauss	83
10.2. Ley de Gauss del electromagnetismo	87
10.3. Interpretación intrínseca de la divergencia	88
11. Ecuaciones de Maxwell	91
12. Formas diferenciales	95
12.1. Integrales de formas	98
12.1.1. Integrales de 1-formas	98
12.1.2. Integrales de 2-formas	98
12.1.3. Integrales de 3-formas	99
12.2. Producto exterior	100
12.3. Derivada exterior	102
12.4. Campos en \mathbb{R}^3	106
12.5. Formas cerradas versus formas exactas	107
12.6. Teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de formas	110

Curvas paramétricas

1.1. Curvas

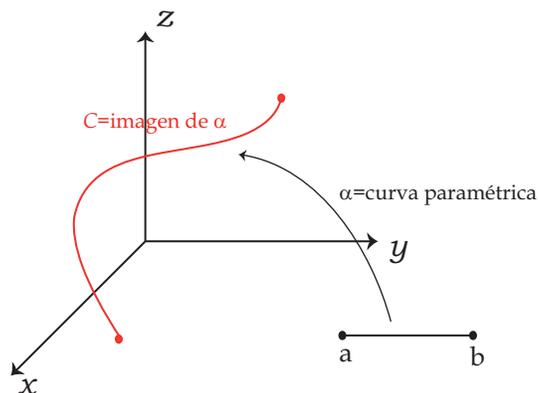
Definición 1.1.1. Una **curva paramétrica** es una función $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua a trozos ($n = 2, 3$).

$$\alpha) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} .$$

Una **curva** \mathcal{C} es la imagen de una curva paramétrica,

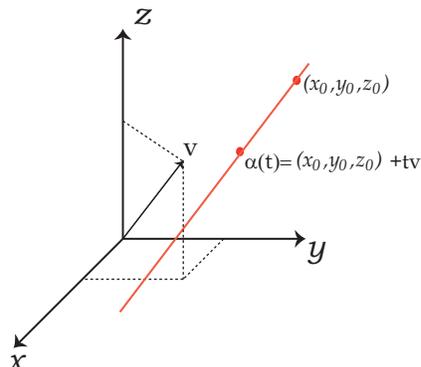
$$\mathcal{C} = \alpha(I).$$

Se llama **parametrización** de la curva \mathcal{C} a cualquier curva paramétrica α que cumpla que $\alpha(I) = \mathcal{C}$.



Ejemplo 1.1.1. 1. **Recta en el espacio.** Sea \mathcal{C} la recta pasando por el punto (x_0, y_0, z_0)

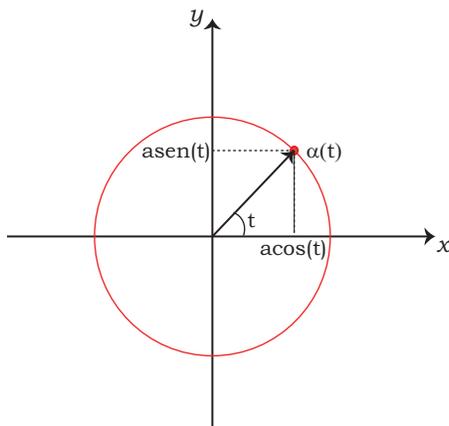
con dirección $\vec{v} = (a, b, c)$.



Una parametrización de la recta es

$$\alpha) \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} .$$

2. **Circunferencia en el plano.** Sea \mathcal{C} la circunferencia de centro el origen y radio a en el plano.



Sea $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ una parametrización de \mathcal{C} . Otra parametrización de la misma curva es $\beta(t) = (a \cos 2t, a \sin 2t)$, $t \in [0, \pi]$. La diferencias entre estas dos parametrizaciones es la velocidad con la cual recorren la curva.

Definición 1.1.2. Sea α una curva paramétrica de clase C^1 , $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Definimos el **vector velocidad** de la curva en un punto t como

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

La **velocidad** de α en t es el escalar

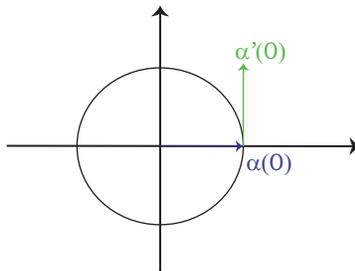
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

Observación 1.1.3. Si existe el vector velocidad y es no nulo entonces es tangente a la curva.

Ejemplo 1.1.2. Calcular el vector velocidad de la curva paramétrica $\alpha(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$, $t \in [0, 2\pi]$ en $t = 0$. Derivando obtenemos que

$$\alpha'(t) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

en $t = 0$ $\alpha(0) = (r, 0)$ y $\alpha'(0) = (0, r\omega)$.

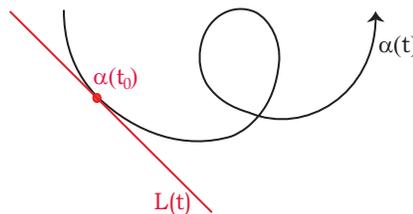


Definición 1.1.4. Sea α una curva paramétrica. Definimos el **vector tangente** como el vector tangente a la curva (si existe) con sentido que indica la orientación de la curva. Si existe $\alpha'(t)$ y es $\neq 0$, entonces el vector tangente es

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Definición 1.1.5. Sea α una curva paramétrica de clase C^1 con $\alpha'(t_0) \neq 0$. La **recta tangente** a α en $\alpha(t_0)$ es

$$L(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$$



Ejemplo 1.1.3. Sea α la curva que pasa en $t = 0$ por $(3, 6, 5)$ con vector tangente $(1, -1, 0)$. Calcular la recta tangente.

$$L(t) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0)$$

Observación 1.1.6. La tangente es la trayectoria que seguiría el punto si se "libera" de la curva en el instante t_0 .

Ejemplo 1.1.4. Una partícula sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos \pi t)$. Se va por la tangente en el instante $t = 1$. Donde está en el instante $t = 3$?

$\alpha'(1) = (e, -e^{-1}, 0)$ y $\alpha(1) = (e, e^{-1}, -1)$, entonces

$$L(t) = (e, e^{-1}, -1) + (t - 1)(e, -e^{-1}, 0)$$

y en $t = 3$ la partícula se encuentra en $L(3) = (3e, -e^{-1}, -1)$.

1.2. Longitud de arco

Considerar una curva paramétrica $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 regular ($\alpha'(t) \neq 0$ para todo t). Podemos pensar $\alpha(t)$ como la trayectoria de una partícula con rapidez $S(t) = \|\alpha'(t)\|$, esta trayectoria traza una curva en el espacio. ¿Cuál es la longitud de esta curva conforme t varía de, digamos, a a b ? Intuitivamente, esto debiera ser precisamente el total de la distancia recorrida, esto es $\int_a^b S(t) dt$. Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva paramétrica de clase C^1 regular. La **longitud de arco** de α está definida como

$$l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Para curvas en \mathbb{R}^3 , si notamos a la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la fórmula es

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt,$$

y para curvas en \mathbb{R}^2 , $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, la fórmula es

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ejemplo 1.2.1. La longitud de arco de la circunferencia de radio r , $\alpha(t) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t)$, para $t \in [0, 2\pi]$, es

$$l(\alpha) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \operatorname{sen} t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r,$$

lo cual no es más que la circunferencia de un círculo de radio r . Si permitimos que $0 \leq t \leq 4\pi$, hubiéramos obtenido $4\pi r$, pues la trayectoria recorrería dos veces el mismo círculo.

Ejemplo 1.2.2. Hallar la longitud de arco de la hélice definida por $\rho : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\rho(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, \sqrt{5}t)$.

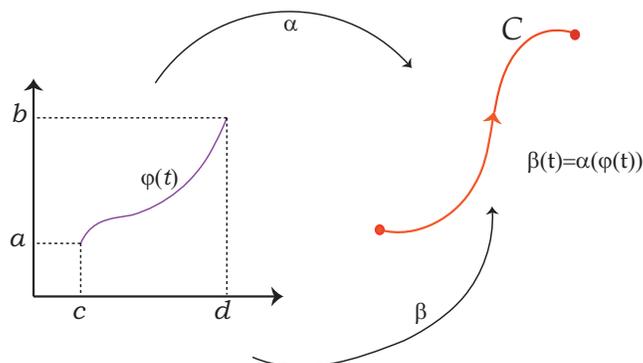
El vector velocidad es $\rho'(t) = (-2 \operatorname{sen} 2t, 2 \cos 2t, \sqrt{5})$ que tiene módulo

$$\|\rho'(t)\| = \sqrt{4(\operatorname{sen} 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} = \sqrt{9} = 3.$$

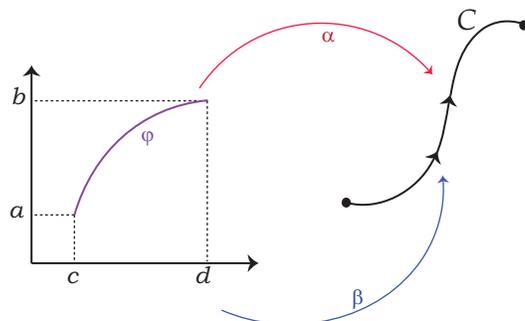
Entonces la longitud de arco de ρ es

$$l(\rho) = \int_0^{4\pi} \|\rho'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} 3 dt = 12\pi.$$

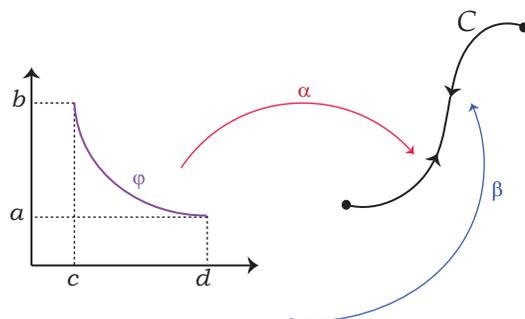
Definición 1.2.2. Sea \mathcal{C} una curva con parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una **reparametrización** de la curva \mathcal{C} si $\exists \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ de clase C^1 sobreyectiva con $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [c, d]$ y tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$.



Observación 1.2.3. Si $\varphi'(t) > 0$ entonces φ es creciente y β **preserva la orientación** de la curva \mathcal{C} .



Si $\varphi'(t) < 0$ entonces φ es decreciente y β **revierte la orientación** de la curva \mathcal{C} .



Definición 1.2.4. Sea \mathcal{C} una curva parametrizable. Decimos que dos parametrizaciones α y β son **equivalentes** si una es reparametrización de la otra mediante una función creciente.

Definición 1.2.5. Sea \mathcal{C} una curva parametrizable y $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización inyectiva de clase C^1 regular. La **longitud de arco** de \mathcal{C} está definida como

$$l(\mathcal{C}) = l(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Observación 1.2.6. Esta definición no depende de la parametrización escogida. Sea $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una reparametrización de α . entonces $\beta = \alpha \circ \varphi$, donde $\varphi'(t) \neq 0$.

$$l(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\| dt = \int_c^d \|(\alpha \circ \varphi)'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)\| dt = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| dt.$$

Vemos que pasa si φ es creciente, el caso decreciente queda a cargo del lector. Si φ es creciente, entonces $\varphi'(t) \geq 0$. Por lo tanto

$$l(\beta) = \int_c^d \|\alpha'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du = l(\alpha).$$

La última igualdad surge de hacer el cambio de variable $u = \varphi(t)$.

Definición 1.2.7. Sea α una curva paramétrica de clase C^1 regular. Definimos la **función de longitud de arco** $s(t)$ como

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau.$$

La función $s(t)$ nos da la longitud del arco recorrido entre los tiempos a y t . Observar que s es una función continua, con derivada

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

continua y positiva. Entonces, por el teorema de la función inversa, existe una función $t(s)$ diferenciable con derivada

$$t'(s) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'} = \frac{1}{\|\alpha'\|}.$$

Consideremos la reparametrización de la curva α por $\gamma(s) = \alpha(t(s))$, donde el nuevo parámetro es la longitud de arco. Aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \alpha'(t)t'(s) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \Rightarrow \|\gamma'(s)\| = 1, \forall s.$$

Parametrizar una curva por longitud de arco equivale a recorrer la curva con velocidad de módulo constante igual a 1.

Ejemplo 1.2.3. Consideremos la hélice $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Hallar la parametrización por longitud de arco de esta curva.

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Entonces

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} t \Rightarrow t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La parametrización de la hélice por longitud de arco es

$$\gamma(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.3. Teoría local de curvas

Estudio desde el punto de vista geométrico. Queremos definir parámetros locales que describan propiedades geométricas de las curvas.

Este estudio se realiza con curvas parametrizadas por longitud de arco.

Lema 1.3.1. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\|\beta(s)\| = c$ para todo $s \in I$. Entonces $\beta'(s) \perp \beta(s)$ para todo $s \in I$.

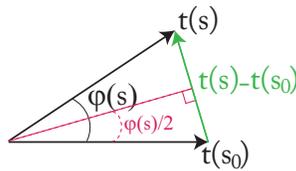
Demostración. $\|\beta(s)\| = c \Rightarrow \beta(s) \cdot \beta(s) = c^2$. Derivando obtenemos que

$$\beta'(s) \cdot \beta(s) + \beta(s) \cdot \beta'(s) = 0 \Rightarrow \beta'(s) \cdot \beta(s) = 0 \Rightarrow \beta'(s) \perp \beta(s) \forall s \in I.$$

□

Definición 1.3.2. Sea α parametrizada por longitud de arco de clase C^2 . El vector $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ se llama **vector tangente** a la curva en s . El número $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ se llama **curvatura** de α en s .

Observación 1.3.3. Veamos que $k(s)$ nos da una idea de la rapidez con que la curva cambia su dirección. Sean $s_0, s \in I$ y $\varphi(s)$ el ángulo que forman $t(s)$ y $t(s_0)$. Como $\|t(s)\| = \|t(s_0)\| = 1$ tenemos que $\|t(s) - t(s_0)\| = 2 \sin\left(\frac{\varphi(s)}{2}\right)$.



Si tomamos el límite cuando $s \rightarrow s_0$ tenemos que $\varphi(s) \rightarrow 0$ y $\|t(s) - t(s_0)\| \sim \varphi(s) = \varphi(s) - \varphi(s_0)$. Entonces

$$\|\alpha''(s_0)\| = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|t(s) - t(s_0)\|}{s - s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_0)}{s - s_0} = \varphi'(s_0).$$

Entonces $k(s_0) = \varphi'(s_0)$ mide la rapidez con que cambia el ángulo de la tangente en el punto s_0 .

Teorema 1.3.4. Sea $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 tal que $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in I$. Entonces

$$k(s) = 0 \text{ en } I \Leftrightarrow \beta(I) \text{ está contenida en una recta.}$$

Demostración. (\Rightarrow) $\alpha''(s) = 0$ en I entonces integrando $\alpha'(s) = \text{cte} = v$ en $I \Rightarrow \alpha(s) = vs + u$, con u, v constantes. Las ecuaciones $\alpha(s) = vs + u$, $s \in \mathbb{R}$ definen una recta en el espacio.

(\Leftarrow) $\alpha(I)$ contenido en una recta, puedo escoger dos versores u, v perpendiculares a la recta y entre sí. Se cumple

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot u = 0$$

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot v = 0$$

Derivando, obtenemos que $\alpha'(s) \cdot u = 0$, $\alpha'(s) \cdot v = 0$. Entonces $\alpha'(s) \perp u$, $\alpha'(s) \perp v \Rightarrow \alpha'(s)$ es colineal con $u \wedge v$

$$\alpha'(s) = \lambda(s)(u \wedge v), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\|\alpha'(s)\| = |\lambda(s)| = 1$ entonces $\lambda(s) = \mp 1$ para todo $s \in I$. Como $\lambda(s)$ es continua sólo se puede tomar uno de los dos valores, entonces $\lambda(s)$ es constante. Por lo tanto $\lambda'(s) = 0$ para todo $s \in I$. Entonces

$$\alpha''(s) = \lambda'(s)(u \wedge v) = 0 \Rightarrow k(s) = 0.$$

□

Ejemplo 1.3.1. Sea $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio R . La parametrización por longitud de arco es

$$\alpha(s) = \left(R \cos \left(\frac{s}{R} \right), R \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

Entonces

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R} \left(\cos \left(\frac{s}{R} \right), \sin \left(\frac{s}{R} \right) \right) \Rightarrow k(s) = \frac{1}{R}.$$

Cuanto mayor es el radio de la circunferencia más lentamente se curva y menor es la curvatura.

Definición 1.3.5. Sea α parametrizada por longitud de arco de clase C^2 , $k(s) \neq 0$. El número $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$ se llama **radio de curvatura**.

Definición 1.3.6. Sea α parametrizada por longitud de arco de clase C^2 , $k(s) \neq 0$. El versor $\vec{n}(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$ se llama versor **normal** a la curva.

Observación 1.3.7. Como $\vec{t}(s) = \alpha'(s)$ tiene módulo constante deducimos que $\alpha' \perp \alpha''$. Entonces $\vec{t}(s) \perp \vec{n}(s)$. El vector tangente a la curva y el normal son ortogonales.

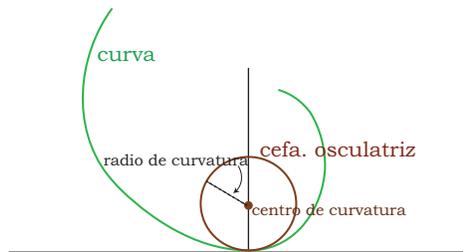
Ejemplo 1.3.2. Consideremos la curva $\alpha(s) = (R \cos(\frac{s}{R}), R \sin(\frac{s}{R}))$. Entonces

$$\alpha''(s) = -\frac{1}{R} \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right), \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right),$$

entonces $k(s) = \frac{1}{R}$ y $\vec{n}(s) = -\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right), \sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$.

Definición 1.3.8. El plano que pasa por $\alpha(s)$ determinado por los vectores \vec{t} y \vec{n} se llama **plano osculador**. Al punto $Q = \alpha(s) + \rho(s)\vec{n}(s)$ se llama **centro de curvatura**.

La circunferencia en plano osculador de centro Q y radio $\rho(s)$ se llama **circunferencia osculatriz**.



1.4. Triedro de Frenet

Definición 1.4.1. Dada una curva α de clase C^2 tal que $k(s) \neq 0$ definimos $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s)$ que completa una terna ortonormal. A este vector se lo llama **binormal** y al conjunto $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ se lo llama **triedro de Frenet** de la curva en s .

El plano por $\alpha(s)$ con vectores \vec{b} y \vec{n} se llama **plano normal** a la curva y el plano por $\alpha(s)$ con vectores \vec{t} y \vec{b} se llama **plano rectificante**.

Proposición 1.4.2. Sea α de clase C^2 tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$ y $k(s) \neq 0$ para todo s . Entonces el vector $\mathbf{b}'(s)$ es colineal con $\mathbf{n}(s)$.

Demostración. Como $\|\mathbf{b}(s)\| = 1$ tenemos que $\mathbf{b}' \perp \mathbf{b}$. Además $\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$, entonces $\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}' = k\mathbf{n} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}' = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}'$ por lo tanto $\mathbf{b}' \perp \mathbf{t}$. De estas dos propiedades concluimos que \mathbf{b}' es colineal con \mathbf{n} . \square

Definición 1.4.3. Como $\mathbf{b}'(s)$ es colineal con $\mathbf{n}(s)$ existe $\tau(s)$ escalar tal que

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s),$$

$\tau(s)$ se llama **torsión** de α en s .

Observar que la variación de \mathbf{b} con s corresponde a la variación del plano osculador (perpendicular a \mathbf{b}). Por lo tanto $\tau(s)$ mide la rapidez con la cual la curva $\alpha(s)$ “se sale” de un plano.

Teorema 1.4.4. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 tal que $\|\alpha'(s)\| = 1$, $k(s) \neq 0$ para todo s . Entonces

$\tau(s) = 0$ en $I \Leftrightarrow \alpha(I)$ está contenida en un plano.

Demostración. (\Rightarrow) $\tau = 0$ entonces $\mathbf{b}'(s) = 0$ entonces $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0$ constante. Consideremos

$$(\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0)' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 + \alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0' = \alpha'(s) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$

Entonces $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0 = d$ (constante), de lo cual deducimos que $\alpha(s) \cdot \mathbf{b}_0 - \alpha(s_0) \cdot \mathbf{b}_0 = 0 \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{b}_0 = 0$ para todo $s \in I$. Entonces $\alpha(s)$ está en el plano ortogonal a \mathbf{b}_0 pasando por $\alpha(s_0)$.

(\Leftarrow) Supongamos $\alpha(s)$ pertenece a un plano π para todo $s \in I$. Sea \mathbf{u} un versor normal al plano π . Entonces $\alpha(s) - \alpha(s_0) \perp \mathbf{u}$ para todo $s \in I$. Por lo tanto $(\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot \mathbf{u} = 0$, para todo $s \in I$.

Derivando esta igualdad obtenemos que $\alpha'(s) \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{u} = 0$ ($\mathbf{t} \perp \mathbf{u}$). Derivando nuevamente obtenemos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ por lo cual $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$. De estas dos condiciones deducimos que \mathbf{u} es colineal con $\mathbf{b}(s)$ para todo $s \in I$. Entonces $\mathbf{b}(s) = \pm \mathbf{u}$ para todo $s \in I$. Como $\mathbf{b}(s)$ es continua tenemos que $\mathbf{b}(s)$ es constante y por lo tanto $\mathbf{b}'(s) = 0$, de lo cual deducimos que $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$. \square

Fórmulas de Frenet: Las siguientes fórmulas nos dan las derivadas de los versores del triedro de Frenet

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = k\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} \end{cases} \quad \text{o también} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

La primera fórmula es la definición de \mathbf{n} ($\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$), la última es la definición de τ . Veamos como deducir la segunda fórmula.

Recordemos que $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$, si derivamos esta ecuación obtenemos que

$$\mathbf{n}' = \mathbf{b}' \wedge \mathbf{t} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}' = -\tau(\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) + \mathbf{b} \wedge (k\mathbf{n}) = \tau(\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) - k(\mathbf{n} \wedge \mathbf{b}) = \tau\mathbf{b} - k\mathbf{t}.$$

Cálculo explícito de la torsión:

$$\tau(s) = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{k(s)^2}.$$

Recordar que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

Para probar esto usaremos la segunda fórmula de Frenet:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{b} \cdot (-k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = -k\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \tau.$$

$$\begin{aligned}
\tau(s) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' &= (\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}) \cdot \left(\frac{\alpha''}{k}\right)' = \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \left(\frac{\alpha'''}{k} + \alpha'' \left(\frac{-k'}{k^2}\right)\right) \\
&= \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \frac{\alpha'''}{k} - \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \alpha'' \left(\frac{k'}{k^2}\right) \\
&= \left(\alpha' \wedge \frac{\alpha''}{k}\right) \cdot \frac{\alpha'''}{k} = \frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{k^2} \\
&= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{k^2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.1. Consideremos la hélice parametrizada por longitud de arco

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b \frac{s}{c} \right),$$

donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right),$$

$$\alpha''(s) = -\frac{a}{c^2} \left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) \Rightarrow k(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$\mathbf{n}(s) = -\left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) \quad \text{paralelo al plano } xy,$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right) & \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right) & \frac{b}{c} \\ -\cos\left(\frac{s}{c}\right) & -\sin\left(\frac{s}{c}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right),$$

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{b}{c^2} \left(\cos\left(\frac{s}{c}\right), \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right) = -\frac{b}{c^2} \mathbf{n}(s),$$

Entonces

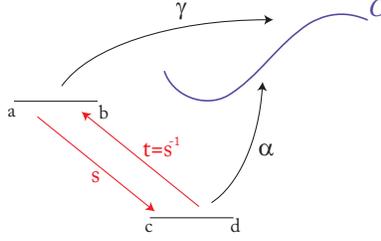
$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

En este ejemplo tanto la torsión como la curvatura son constantes.

Cálculo para curvas cualesquiera: Sea $\gamma(t)$ una curva cualquiera, el camino para hallar $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, k, \tau$ sería reparametrizar la curva por longitud de arco y luego aplicar las fórmulas anteriores. Es más cómodo, sin embargo, tener fórmulas explícitas.

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{t}} &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, & \vec{\mathbf{b}} &= \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}, & \vec{\mathbf{n}} &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} = \frac{(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'}{\|(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'\|}, \\
k &= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, & \tau &= \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}.
\end{aligned}$$

Veamos como deducir estas fórmulas: $\gamma(t) = \alpha(s(t))$ donde s es la longitud de arco ($s'(t) = \|\gamma'(t)\|$).



Derivando, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\gamma' = \alpha' s' = \vec{t} \|\gamma'\| \Rightarrow \vec{t} = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}.$$

Derivando nuevamente tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \alpha'' s'^2 + \alpha' s'' = k \vec{n} \|\gamma'\|^2 + \vec{t} s'' \\ \Rightarrow \gamma' \wedge \gamma'' &= \vec{t} \|\gamma'\| \wedge (k \vec{n} \|\gamma'\|^2 + \vec{t} s'') = k \|\gamma'\|^3 (\vec{t} \wedge \vec{n}) = k \|\gamma'\|^3 \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{b} &= \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|} \quad y \quad \|\gamma' \wedge \gamma''\| = k \|\gamma'\|^3 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} k &= \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}, \\ (\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma' &= k \|\gamma'\|^3 \vec{b} \wedge \vec{t} \|\gamma'\| = k \|\gamma'\|^4 \vec{b} \wedge \vec{t} = k \|\gamma'\|^4 \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{n} &= \frac{(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'}{\|(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'\|} \quad y \quad \|(\gamma' \wedge \gamma'') \wedge \gamma'\| = k \|\gamma'\|^4. \end{aligned}$$

Para deducir la fórmula de τ hay que calcular $(\gamma', \gamma'', \gamma''')$ en función de $(\alpha', \alpha'', \alpha''')$.

Integrales de línea

Definición 2.0.5. Una curva diferenciable $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es **cerrada** si $\alpha(a) = \alpha(b)$. Si además, la función α es inyectiva en el intervalo (a, b) entonces se dice que la curva es una curva **cerrada simple**.

Observación 2.0.6. Una curva cerrada simple es homeomorfa al círculo S^1 , es decir, tiene la misma topología de un anillo. La curva $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\alpha(t) = (a \cos(2\pi t), b \sin(2\pi t))$$

es una curva diferenciable cerrada, de hecho dicha curva resulta ser una elipse de semiejes a y b .

Definición 2.0.7. Un **campo escalar** es una función

$$f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un **campo vectorial** es una función vectorial

$$F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Ejemplo 2.0.2. ■ Campos escalares:

1. los campos que proporcionan la densidad,
2. los campos que proporcionan la temperatura,
3. los campos que proporcionan la altura.

■ Campos vectoriales:

1. Campos de fuerzas: campos eléctricos, campos gravitatorios.
2. Campos de velocidades: corrientes oceánicas, velocidad de un fluido, movimiento del viento junto a una superficie aerodinámica.
3. Campos de flujos: el que describe el flujo del calor.

Ejemplo 2.0.3 (Campo gravitacional). La ley de gravitación de Newton establece que

$$\|F\| = \frac{mMG}{r^2}.$$

Sea (x, y, z) el vector posición del objeto de masa m , y M concentrada en el centro de la Tierra (origen de coordenadas), entonces $r = \|(x, y, z)\|$, por tanto la fuerza de gravedad que actúa sobre el objeto de masa m es

$$F(x, y, z) = -\|F\| \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|} = \frac{-mMG}{\|(x, y, z)\|^3} (x, y, z).$$

2.1. Integrales de línea de campos escalares

Definición 2.1.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ una curva paramétrica de clase C^1 y sea $C = \text{Im}(\alpha)$ la curva descrita por α . La **integral de línea** de f a lo largo de C se define por

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt.$$

Si la curva es cerrada representamos la integral sobre esta curva como \oint_C .

Observación 2.1.2. ■ Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable y $f(x, y, z)$ densidad de masa en $(x, y, z) \Rightarrow \int_C f ds$ es la masa total del cable.

■ Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable y $f(x, y, z)$ temperatura en $(x, y, z) \Rightarrow$ La temperatura promedio del cable α es

$$\frac{1}{\text{long}(C)} \int_C f ds.$$

Ejemplo 2.1.1. Consideremos el campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definido en todo \mathbb{R}^3 y la hélice dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Hallar $\int_C f ds$.

$$f(\gamma(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

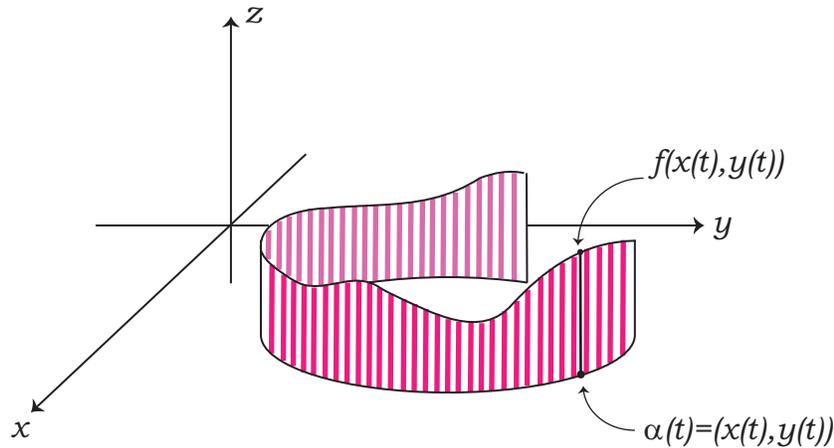
y

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Por lo tanto

$$\int_C f ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1 + t^2) dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} 1 + t^2 dt = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi \left(1 + \frac{4}{3}\pi^2 \right).$$

Interpretación geométrica: Si $f(x, y) \geq 0$ sobre los puntos de la curva C , entonces la integral se puede interpretar como el área lateral de la porción de superficie que tiene como base en $z = 0$ la curva C y como altura $z = f(x, y)$ para los $(x, y) \in C$, como se muestra en la figura.



Propiedades

1. **Linealidad:** Para cualesquiera escalares λ, μ ,

$$\int_C (\lambda f + \mu g) ds = \lambda \int_C f ds + \mu \int_C g ds.$$

2. **Aditividad:** Si C_1, C_2 son tales que $C = C_1 \cup C_2$, entonces

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

3. **Independencia de la parametrización:** Sean $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ dos parametrizaciones de la misma curva C y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo, entonces

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_c^d f(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt.$$

Ejemplo 2.1.2. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y, z) = \frac{4 + x^2 + y^2 + z^2}{3 - x^2 - y^2 - z^2}$$

done U es la bola de centro $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{3}$ y C la curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sqrt{2} \sin t, \cos t)$, $t \in [0, \sqrt{2}]$. Entonces

$$f(\alpha(t)) = \frac{4+2}{3-2} = 6, \quad \|\alpha'(t)\| = \|(-\sin t, \sqrt{2} \cos t, -\sin t)\| = \sqrt{2}$$

$$\int_C f ds = \int_0^{\sqrt{2}} f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\sqrt{2}} 6\sqrt{2} dt = 12.$$

2.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Ejemplo 2.2.1. La fuerza gravitacional de la Tierra sobre un objeto de masa m es un ejemplo de campo vectorial

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z).$$

Donde M es la masa de la Tierra y G la constante de gravitación universal.

Definición 2.2.1. Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ y C una curva de clase C^1 en U (con parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow U$). Definimos la **integral de línea de X a lo largo de C** como

$$\int_C X \cdot ds = \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el campo vectorial en \mathbb{R}^3 definido por $X(x, y, z) = (x, y, z)$ y la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, 4\pi]$.

Entonces que $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) = t$. Por lo cual

$$\int_C X \cdot ds = \int_0^{4\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2.$$

Interpretación física: Si X es un campo de fuerzas y (x, y, z) representa una partícula que se desplaza a lo largo de la curva C entonces

$$\int_C X \cdot ds \quad \text{es el trabajo de la fuerza a lo largo de la curva.}$$

Notación clásica: Sea $X = (P, Q, R)$ un campo vectorial en el espacio continuo sobre una curva de clase C^1 , C , parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in [a, b]$. Se tiene por definición:

$$\int_C X \cdot ds = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

lo que explica que frecuentemente se use la notación:

$$\int_C X \cdot ds = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

Las expresiones $\omega = P dx + Q dy + R dz$ se denominan **1-formas diferenciales** o **formas diferenciales de grado 1**.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos la integral de línea $\int_C x^2 dx + xy dy + dz$ donde C tiene la siguiente parametrización, $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$. Entonces $X(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$ y

$$\int_C x^2 dx + xy dy + dz = \int_0^1 t^2 + 2t^4 dt = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}2t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

Proposición 2.2.2. Sean $(\alpha, [a, b])$ y $(\beta, [c, d])$ parametrizaciones de \mathcal{C} que preservan orientación y $X: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo, entonces

$$\int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt.$$

Demostración. Como α y β preservan orientación $\exists \varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva creciente de clase C^1 tal que $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$, entonces

$$X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) = X(\alpha(\varphi(t))) \cdot (\alpha(\varphi(t)))' = X(\alpha(\varphi(t))) \cdot \alpha'(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Entonces

$$\int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_c^d X(\alpha(\varphi(t))) \cdot \alpha'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Haciendo el cambio de variable $u = \varphi(t)$ ($du = \varphi'(t) dt$) tenemos que

$$\int_c^d X(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt = \int_a^b X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du.$$

□

Cambio de orientación:

$$\int_{-\mathcal{C}} X \cdot ds = - \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds,$$

donde $-\mathcal{C}$ es la misma curva pero recorrida en sentido contrario.

Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de \mathcal{C} , definimos $-\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$-\alpha(t) = \alpha(a + b - t).$$

Observar que $-\alpha$ es una reparametrización de \mathcal{C} que revierte la orientación, donde la función φ es $\varphi(t) = a + b - t$. Entonces $-\alpha$ es una parametrización de \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} \int_{-\mathcal{C}} X \cdot ds &= \int_a^b X(-\alpha(t)) \cdot (-\alpha'(t)) dt = - \int_a^b X(\alpha(a + b - t)) \cdot \alpha'(a + b - t) dt \\ &= \int_b^a X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_a^b X(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) du = - \int_{\mathcal{C}} X \cdot ds, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = a + b - t$.

Propiedades: Sea C la curva en \mathbb{R}^3 y α definida sobre $[a, b]$ una parametrización de clase C^1 . Consideremos X, Y campos vectoriales definidos y acotados sobre C . Entonces:

(i) (**Linealidad respecto del integrando**) Para cualesquiera escalares λ, μ ,

$$\int_C (\lambda X + \mu Y) \cdot ds = \lambda \int_C X \cdot ds + \mu \int_C X \cdot ds.$$

(ii) (**Aditividad respecto al camino de integración**) Si C_1, C_2 son tales que $C = C_1 \cup C_2$ (si $\alpha(t)$ parametrización de C entonces al variar t en $[a, c]$ tenemos una parametrización de C_1 y al variar t en $[c, b]$ tenemos una parametrización de C_2 , con $a < c < b$), entonces

$$\int_C X \cdot ds = \int_{C_1} X \cdot ds + \int_{C_2} X \cdot ds$$

(iii) (**Continuidad**) $\left| \int_C X \cdot ds \right| \leq Ml(C)$. Donde $M = \max\{\|X(p)\| : p \in C\}$ y $l(C)$ es la longitud de arco de la curva C .

$$\begin{aligned} \left| \int_C X \cdot ds \right| &= \left| \int_a^b X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \right| \leq \int_a^b |X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|X(\alpha(t))\| \|\alpha'(t)\| dt \leq \int_a^b M \|\alpha'(t)\| dt = Ml(C). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4. Consideremos el campo vectorial $X(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y \geq 0$. Calcular la integral de línea de X desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$ a lo largo de las siguientes curvas:

(a) La recta $x(t) = t, y(t) = t$ con $0 \leq t \leq 1$.

Parametrización $\alpha(t) = (t, t) \Rightarrow \alpha'(t) = (1, 1)$ y $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\sqrt{t}, t^3 + t) \cdot (1, 1) = \sqrt{t} + t^3 + t$. Entonces

$$\int_C X \cdot ds = \int_0^1 \sqrt{t} + t^3 + t dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^1 = \frac{17}{12}.$$

(b) El camino $x(t) = t^2, y(t) = t^3, 0 \leq t \leq 1$.

Parametrización $\alpha(t) = (t^2, t^3) \Rightarrow \alpha'(t) = (2t, 3t^2)$ y $X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (t^{3/2}, t^6 + t^3) \cdot (2t, 3t^2) = 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5$. Entonces

$$\int_C X \cdot ds = \int_0^1 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5 dt = \frac{59}{42}.$$

Campos de gradientes

3.1. Campos de gradientes

Definición 3.1.1. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. El **gradiente** de f en $p \in U$ es el vector

$$\nabla_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right).$$

$\nabla f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $(\nabla f)(p) = \nabla_p f$ es un campo vectorial.

Ejemplo 3.1.1. 1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y) e^{5z}$. Entonces

$$\nabla(f) = (\operatorname{sen}(y)e^{5z}, x \cos(y)e^{5z}, x \operatorname{sen}(y)5e^{5z}).$$

Definición 3.1.2. Un campo vectorial $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo es un **campo de gradientes** si existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $X = \nabla f$ en U . Se dice que f es el **potencial escalar** de X .

Observación 3.1.3. Si U es conexo entonces dos potenciales de un campo de gradientes difieren en una constante:

$X = \nabla f$ y $X = \nabla g$ en U entonces $\nabla(f - g) = 0$ en U , entonces $f - g = \text{cte}$ y por lo tanto $f = g + \text{cte}$.

Ejemplo 3.1.2 (Campo eléctrico de una carga puntual). El campo eléctrico generado por una carga puntual en el origen está dado por

$$E(x, y, z) = k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

De forma sencilla se deduce que la función

$$f(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

verifica que $\nabla f = E$ de donde resulta que E es de gradientes.

El **potencial eléctrico** es la función V que verifica $E = \nabla V$ y $V(\infty) = 0$, con lo cual

$$V(x, y, z) = -k \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

3.2. Integral de línea de un campo de gradientes

El siguiente resultado puede entenderse como una versión de la Regla de Barrow para integrales de línea, o como una versión “vectorial” de dicha regla.

Teorema 3.2.1 (Regla de Barrow para integrales de línea). *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial escalar de un campo X de clase C^1 definido en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ y C una curva contenida en U de origen A y extremo B . Entonces:*

$$\int_C X \cdot ds = f(B) - f(A).$$

En particular, si el camino C es cerrado, se tendrá:

$$\oint_C X \cdot ds = 0.$$

Demostración. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ una parametrización de C . La integral de línea de X entre a y b a lo largo de α viene dada por

$$\begin{aligned} \int_C X \cdot ds &= \int_a^b \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (f(\alpha(t)))' dt \\ &= f(\alpha(t)) \Big|_a^b = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

En particular, si C es cerrada concluimos que

$$\oint_C X \cdot ds = f(B) - f(A) = 0.$$

□

Definición 3.2.2. Una curva C es **cerrada simple** si existe una parametrización $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva y $\alpha(t) \neq \alpha(a) = \alpha(b)$ para todo $t \in (a, b)$.

Teorema 3.2.3. *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo continuo en U . Son equivalentes*

1. *Existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\nabla f = X$. (X es de **gradientes**).*
2. $\oint_C X \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada simple C^1 en U .

3. $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}$ para todo par de curvas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 con el mismo origen y el mismo extremo. (\mathbf{X} es **conservativo**).

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ una parametrización de \mathcal{C} . Como \mathbf{X} es de gradientes tenemos que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0.$$

(2) \Rightarrow (3) Sean \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 dos curvas con el mismo origen y el mismo extremo. Entonces consideremos la curva cerrada $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$, y por la afirmación (2) tenemos que

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}.$$

(3) \Rightarrow (1) Sea $p_0 \in D$ fijo, donde D es una componente conexa de \mathcal{U} . Definimos el campo escalar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ como

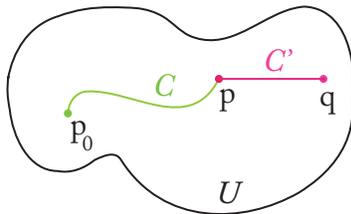
$$f(x, y, z) = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s},$$

donde \mathcal{C} es una curva cualquiera simple con origen p_0 y extremo $p = (x, y, z)$ contenida en D . (Dicha curva existe porque D es abierto y conexo).

Diremos que un subconjunto de \mathcal{U} es **conexo** si dados dos puntos cualesquiera del mismo existe una curva que los conecta contenida en el subconjunto. Este concepto es el de arco conexo, concepto más fuerte que el de conexión (ya que arco conexo implica conexo).

Tenemos que probar que $\nabla f = \mathbf{X}$ de lo cual deducimos en particular que f es \mathcal{C}^1 en D .

Sea $q = (x + h, y, z)$, con h suficientemente pequeño para garantizar que el segmento $pq \in D$.



Tomemos la curva \mathcal{C}' con parametrización $\alpha(t) = (x + th, y, z)$, si $\mathbf{X} = (P, Q, R)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x + h, y, z) - f(x, y, z) &= \int_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{C}'} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 \mathbf{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= h \int_0^1 P(x + th, y, z) dt = hP(x + \theta h, y, z), \quad \text{para algún } \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

El valor θ existe por el teorema de valor medio para integrales.

Entonces $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$. De donde se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ en D .

De forma análoga se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = R$ en D .

Trabajando de modo análogo en cada componente conexa de U se obtiene el resultado. \square

Observación 3.2.4. Si $\oint_C X \cdot ds \neq 0$ para alguna curva cerrada, entonces X no es de gradientes.

Por otra parte, no es suficiente que $\oint_C X \cdot ds = 0$ para infinitas curvas para concluir que el campo es de gradientes como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1. Sea $X(x, y) = (x, xy)$ y C_r la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r parametrizada por $\alpha_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} X \cdot ds &= \int_0^{2\pi} (r \cos t, r^2 \sin t \cos t) (-r \sin t, r \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-r^2 \cos t \sin t + r^3 \sin t \cos^2 t) dt \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin t dt + r^3 \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt = -\frac{r^2}{2} \cos^2 t \Big|_0^{2\pi} - \frac{r^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo $\frac{\partial xy}{\partial x} = y \neq 0 = \frac{\partial x}{\partial y}$, que es una condición necesaria para que sea de gradientes (como veremos en el siguiente teorema).

Teorema 3.2.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $X = (P, Q, R)$ un campo vectorial de clase C^1 en U . Si X es de gradientes en U entonces

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Demostración. Como $X = (P, Q, R)$, campo vectorial de clase C^1 , es de gradientes existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f = X$. Entonces

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

De lo cual se deduce que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Para garantizar que las derivadas segundas cruzadas de f coinciden estamos usando que f es de clase C^2 y el teorema de Schwartz. De igual forma se deducen las otras dos igualdades. \square

El siguiente ejemplo muestra que las condiciones del teorema previo no siempre son suficientes para que un campo vectorial sea de gradientes.

Ejemplo 3.2.2. Sea $S = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y $X: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por

$$X(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Veamos que las derivadas cruzadas coinciden pero sin embargo X no es de gradientes.

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ para todo $(x, y) \in S$.

Para ver que X no es de gradientes en S calculemos la integral de línea de X a lo largo de la circunferencia unidad dada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_C X \cdot ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Entonces X no es de gradientes.

Teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Este tipo de teoremas resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre el recinto que delimita la curva. Por otro lado, la relación así establecida entre la integral de línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a esta permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un recinto a partir del comportamiento de la función sobre la frontera de dicho recinto.

Antes de enunciar el teorema de Green vamos a precisar qué entendemos por una curva cerrada simple **orientada positivamente**. Sabemos ya que toda curva simple tiene dos posibles orientaciones, y que éstas son invariantes por reparametrizaciones cuyas funciones de cambio de variables tienen derivada positiva. Ahora bien, ¿cómo distinguir entre una y otra orientación? ¿Qué hacer para privilegiar y reconocer una de las dos? Hay varios procedimientos para conseguir esto.

Para distinguir el sentido de recorrido de la curva cerrada \mathcal{C} en un dibujo hacen falta tres puntos: indicando el orden por el que se debe pasar por tres puntos. Esto determina unívocamente la orientación de la curva.

Cuando se trata de curvas planas, hay además otros criterios clásicos: se puede decidir si la curva debe recorrerse en sentido horario o en sentido anti-horario. Por convención se suele considerar que el sentido anti-horario es el sentido positivo, y el sentido horario es el negativo. Y como este criterio es difícil de distinguir si la curva es muy grande, o muy complicada, también se puede decidir indicando si la región acotada por la curva debe quedar a la izquierda según se recorre la curva (sentido positivo) o a la derecha (sentido negativo).

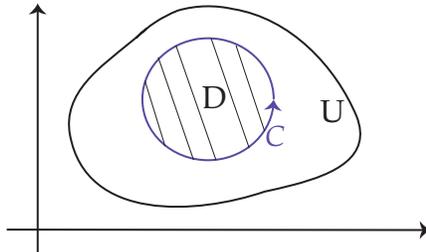
Diremos que una curva cerrada simple $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ es **regular a trozos** si se puede parametrizar mediante un camino γ que a su vez puede escribirse como concatenación $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ de una cantidad finita de caminos $\gamma_j : [a_j, b_j] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cada uno de los cuales es de clase C^1 y satisface que $\gamma_j'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a_j, b_j]$ (en particular, podrá dejar de ser diferenciable en una cantidad finita de puntos, pero incluso en estos tendrá derivadas laterales). Para esta clase de curvas cerradas simples enunciaremos y demostraremos el

teorema de Green.

Teorema 4.0.6 (Teorema de Green). *Sea \mathcal{C} una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada, en \mathbb{R}^2 y sea D la unión de la región interior a \mathcal{C} con la curva \mathcal{C} . Sea $X = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contenga a D . Entonces*

$$\oint_{\mathcal{C}} X \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy. \quad (4.1)$$

Demostración.



Probar (6.2.2) es equivalente a probar las dos siguientes igualdades

$$\oint_{\mathcal{C}} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (4.2)$$

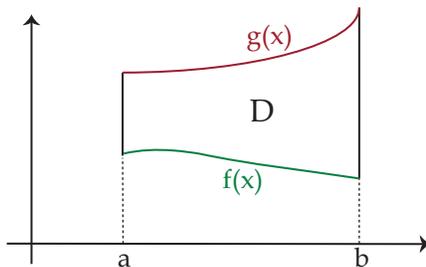
$$\oint_{\mathcal{C}} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (4.3)$$

En efecto, si estas fórmulas son válidas, obtenemos (6.2.2) sumándolas. Recíprocamente, si (6.2.2) es cierta podemos obtener (4.2) tomando $Q = 0$ en (6.2.2), y de forma análoga obtenemos (4.3), tomando $P = 0$ en (6.2.2).

Veamos (4.2) para una clase especial de regiones D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde f y g son funciones reales de clase C^1 a trozos.



Esta región D está limitada por una curva cerrada simple $C = \partial D$ regular a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos:

$$C = C_1 + C_2 - C_3 - C_4,$$

(como es costumbre, los signos negativos que preceden a un camino denotan que se recorre el camino en sentido opuesto al especificado); aquí, C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$; C_2 lo está por $\gamma_2(t) = (b, t)$, con $f(b) \leq t \leq g(b)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (t, g(t))$, $a \leq t \leq b$; y C_4 viene dado por $\gamma_4(t) = (a, t)$, $f(a) \leq t \leq g(a)$. Nótese que, a lo largo de C_2 y de C_4 , $x = x(t)$ es constante, luego $dx = 0$ sobre estos caminos, y las correspondientes integrales de línea se anularán, mientras que sobre los restantes caminos es $dx = 1$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx - \int_{C_3} P dx - \int_{C_4} P dx = \\ &= \int_{C_1} P dx - \int_{C_3} P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt, \end{aligned}$$

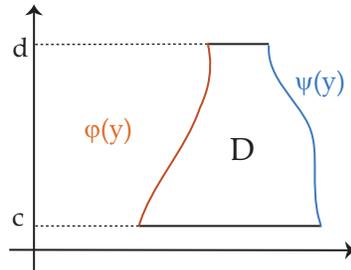
y por otra parte, aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo,

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] dx \\ &= \int_a^b P(t, f(t)) dt - \int_a^b P(t, g(t)) dt. \end{aligned}$$

Combinando estas igualdades se obtiene (4,2).

Ahora probaremos (4.3) para otra clase especial de región D , limitada por las gráficas de dos funciones $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, con $\varphi \leq \psi$. Es decir, ahora tenemos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$



con φ, ψ funciones reales de clase C^1 . Como antes, D está limitado por una curva cerrada simple $C = \partial D \in C^1$ a trozos que puede expresarse como concatenación de cuatro caminos regulares a trozos:

$$C = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4,$$

donde C_1 está parametrizado por $\gamma_1(t) = (\varphi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; C_2 es $\gamma_2(t) = (t, c)$, con $\varphi(c) \leq t \leq \psi(c)$; C_3 es $\gamma_3(t) = (\psi(t), t)$, $c \leq t \leq d$; y C_4 es $\gamma_4(t) = (t, d)$, con $\varphi(d) \leq t \leq \psi(d)$. A lo largo de C_2 y de C_4 , $y = y(t)$ es constante, luego $dy = 0$ sobre

estos caminos, y las correspondientes integrales de línea son cero; para C_1 y C_3 se tiene $dy = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} Q dy &= - \int_{C_1} Q dy + \int_{C_2} Q dy + \int_{C_3} Q dy - \int_{C_4} Q dy = \\ &= - \int_{C_1} Q dy + \int_{C_3} Q dy = - \int_c^d Q(\varphi(t), t) dt + \int_c^d Q(\psi(t), t) dt, \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d [Q(\psi(y), y) - Q(\varphi(y), y)] dy \\ &= \int_c^d Q(\psi(t), t) dt - \int_c^d Q(\varphi(t), t) dt; \end{aligned}$$

luego, juntando estas igualdades, obtenemos (4.3).

Con lo probado en los pasos 1 y 2, la fórmula de Green es válida para toda región D que sea a la vez de tipo I y de tipo II. Todos los círculos, los rectángulos y los triángulos constituyen ejemplos de regiones que son de tipo I y II simultáneamente.

Para dar la demostración del teorema en una región R se efectúa la descomposición de R en un número finito de regiones de tipo I y II, se aplica el teorema a cada una y se suman los resultados miembro a miembro. Las integrales a lo largo de las fronteras interiores de las distintas subregiones se cancelan dos a dos (pues se recorren dos veces en sentidos opuestos), y la suma de las integrales a lo largo de las fronteras exteriores de dichas subregiones proporciona la integral de línea a lo largo de \mathcal{C} . Por tanto, el teorema de Green es válido para todos estos tipos de curvas. Por otra parte, la suma de las integrales dobles sobre cada una de las subregiones proporciona la integral doble extendida a todo R . Esto terminaría de demostrar el teorema. \square

Ejemplo 4.0.3. Integrar el campo $F(x, y) = (x, xy)$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido positivo.

Ejemplo 4.0.4. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Ejemplo 4.0.5. Hallar el valor de la integral

$$\int_{\mathcal{C}} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy,$$

donde \mathcal{C} es el borde del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Una aplicación muy importante del teorema de Green es el cálculo de áreas de recintos delimitados por curvas cerradas simples mediante una integral de línea sobre el borde de dichas curvas.

Corolario 4.0.7 (Cálculo de Áreas). Si $X = (P, Q)$ tales que $Q_x - P_y = 1$ entonces $\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = \iint_D dx dy = A(D)$ y por lo tanto (aplicando Green)

$$A(D) = \oint_{\partial D} X \cdot ds.$$

Podemos considerar cualquiera de los siguientes campos para hallar el área de D .

- (i) $X(x, y) = (0, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) $X(x, y) = (-y, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (iii) $X(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Entonces

$$A(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

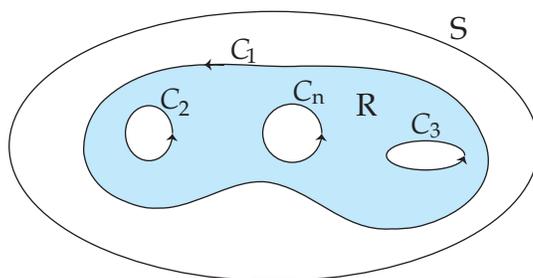
Ejemplo 4.0.6. Hallar el área de la elipse $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$, con $a, b > 0$. Consideremos la siguiente parametrización $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t + ab \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

Definición 4.0.8. Una curva es de **Jordan** si es plana, cerrada, simple y C^1 a trozos.

Teorema 4.0.9 (Teorema de Green generalizado). Sean C_1, \dots, C_n n curvas de Jordan, satisfaciendo:

- (i) Dos curvas cualesquiera no se cortan.
- (ii) Todas las curvas C_2, \dots, C_n están en el interior de C_1 .
- (iii) Cada C_i está en el exterior de C_j ($i \neq j, i, j = 2, \dots, n$).

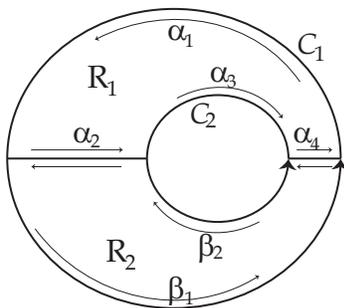


Sea R la unión de C_1 con la porción interior a C_1 que no está dentro de ninguna C_j ($j = 2, \dots, n$). Si $X = (P, Q)$ es de clase C^1 en un abierto S que contiene a R , se verifica:

$$\iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \oint_{C_1} X \cdot ds - \sum_{j=2}^n \oint_{C_j} X \cdot ds,$$

donde las curvas se consideran con orientación antihoraria.

Demostración. Se introducen cortes que transformen R en una reunión finita de regiones simplemente conexas limitadas por curvas de Jordan, se aplica a cada una el teorema de Green, y se suman miembro a miembro los resultados. Este procedimiento puede justificarse fácilmente para $n = 2$; el caso general sigue por inducción.



Sea C la curva dada por $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ y R_1 la región limitada por C . Como R_1 es simplemente conexa podemos aplicar el teorema de Green y obtenemos

$$\oint_C X \cdot ds = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dx dy$$

La integral del lado izquierdo se descompone en cuatro integrales, usando al parametrización de C :

$$\oint_C X \cdot ds = \int_{\alpha_1} X \cdot ds + \int_{\alpha_2} X \cdot ds + \int_{\alpha_3} X \cdot ds + \int_{\alpha_4} X \cdot ds.$$

Sea C' la curva dada por $\beta_1 - \alpha_4 + \beta_2 - \alpha_2$ y R_2 la región limitada por ella. Nuevamente, aplicando Green tenemos que

$$\oint_{C'} X \cdot ds = \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dx dy$$

La integral del lado izquierdo se descompone en cuatro integrales, usando al parametrización de C' :

$$\oint_{C'} X \cdot ds = \int_{\beta_1} X \cdot ds - \int_{\alpha_4} X \cdot ds + \int_{\beta_2} X \cdot ds - \int_{\alpha_2} X \cdot ds.$$

Sumando ambas igualdades obtenemos que:

$$\int_{\alpha_1} X \cdot ds + \int_{\beta_1} X \cdot ds + \int_{\alpha_3} X \cdot ds + \int_{\beta_2} X \cdot ds = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dx dy + \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dx dy$$

Entonces

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy.$$

□

Teorema 4.0.10. Sea $\mathbf{X} = (P, Q)$ de clase C^1 en un abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, y supongamos que $Q_x - P_y = 0$ en S .

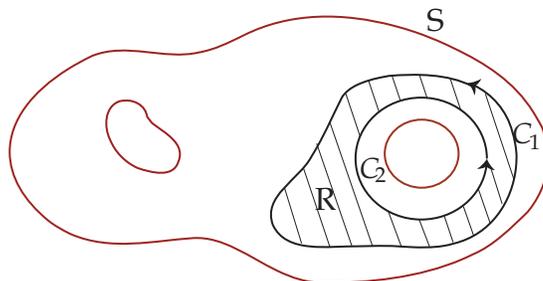
Sean C_1 y C_2 dos curvas de Jordan contenidas en S , satisfaciendo:

- (i) C_2 está en el interior de C_1 .
- (ii) Los puntos interiores a C_1 que son exteriores a C_2 están en S .

Si ambas curvas se recorren en el mismo sentido, entonces

$$\oint_{C_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}.$$

Demostración.



Basta aplicar el teorema de Green generalizado con $n = 2$ a la región R constituida por los puntos situados entre C_1 y C_2 junto con las propias curvas:

$$\oint_{C_1} - \oint_{C_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \iint_R (Q_x - P_y) dx dy = \iint_R 0 dx dy = 0$$

Entonces

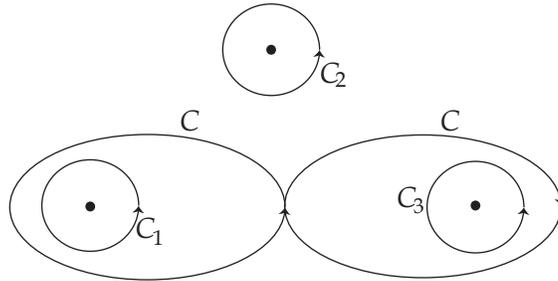
$$\oint_{C_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}.$$

□

Este resultado se puede expresar diciendo que si $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en S entonces el valor de una integral de línea a lo largo de una curva de Jordan contenida en S no varía cuando ésta se deforma en otra curva de Jordan en S de manera que todas las curvas intermedias permanezcan dentro de S .

Ejemplo 4.0.7. Sean P, Q dos campos escalares de clase C^1 que satisfacen $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ en todo el plano excepto en tres puntos. Sean C_1, C_2, C_3 las tres circunferencias centradas en dichos puntos y C la curva que rodea a C_1 y C_3 que se muestran en la

siguiente figura, y sea $I_k = \oint_{C_k} Pdx + Qdy$ ($k = 1, 2, 3$). Supongamos que $I_1 = 12$, $I_2 = 10$ e $I_3 = 15$.



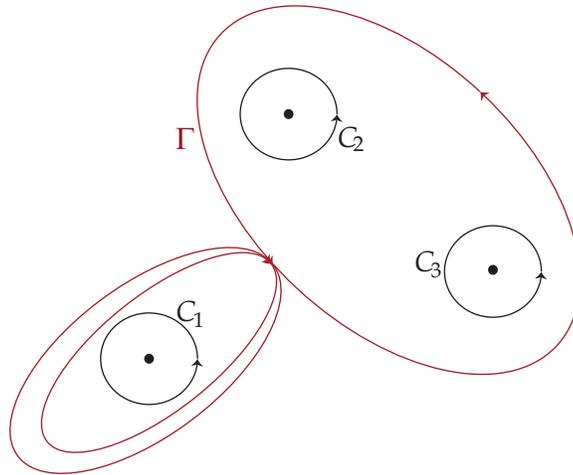
(i) Hallar $\oint_C Pdx + Qdy$.

(ii) Dibujar una curva cerrada Γ a lo largo de la cual $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 1$.

(iii) Si $I_1 = 12$, $I_2 = 9$ e $I_3 = 15$, ¿puede existir alguna curva cerrada Γ tal que $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 1$?

(i) $\oint_C Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_3} Pdx + Qdy = I_1 - I_3 = 12 - 15 = -3$.

(ii) Basta considerar Γ como se muestra en la siguiente figura



$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = I_2 + I_3 - I_1 - I_1 = 10 + 15 - 12 - 12 = 1.$$

(iii) Si existe tal curva entonces deben existir $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $aI_1 + bI_2 + cI_3 = 12a + 9b + 15c = 1$, entonces $4a + 3b + 5c = \frac{1}{3}$, donde el primer término está en \mathbb{Z} y el segundo en $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ lo cual no admite solución. Entonces no existe una curva Γ con esa propiedad.

Rotor y campos conservativos

5.1. Rotor

Definición 5.1.1. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos el **rotor** de X como el campo vectorial $\text{rot } X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\text{rot } X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

si $X = (P, Q, R)$.

Para recordar la fórmula usaremos la notación de “operador”. Símbolo nula: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Utilizando este operador podemos considerar el siguiente producto vectorial que coincide con el rotor de X

$$\nabla \wedge X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Entonces $\text{rot } X = \nabla \wedge X$.

Ejemplo 5.1.1. Sea $X(x, y, z) = (xz, y, z)$ definido en todo el espacio. Hallar $\text{rot } X$.

$$\text{rot } X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & y & z \end{vmatrix} = (0, x, 0).$$

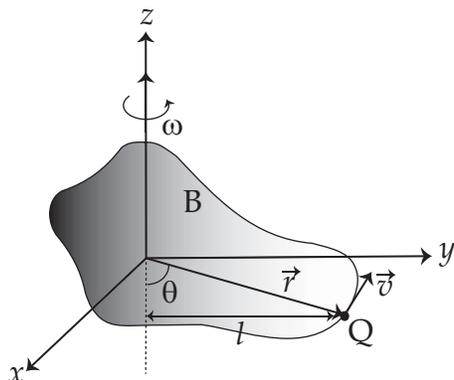
Entonces $\text{rot } X = (0, x, 0)$.

Observación 5.1.2. Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, lo podemos pensar como un campo en \mathbb{R}^3 con tercer componente nula, es decir, $X = (P, Q, 0)$. Ahora le podemos calcular su rotor

$$\text{rot } X = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, Q_x - P_y).$$

Entonces $\text{rot } X = (0, 0, Q_x - P_y)$.

Observación 5.1.3 (Interpretación física del rotor).



Consideremos un rígido B que gira alrededor del eje z . La rotación se puede describir mediante un vector $\vec{\omega}$ a lo largo del eje de rotación, la dirección se escoge de manera que el cuerpo gire alrededor de $\vec{\omega}$ como en la figura, con longitud $\omega = \|\vec{\omega}\|$, velocidad angular del cuerpo B , esto es, la velocidad tangencial de cualquier punto en B dividida entre su distancia al eje z de rotación. Sea Q cualquier punto en B y sea l la distancia de Q a z

$$l = \|\vec{r}\| \sin \theta,$$

donde \vec{r} es el vector cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es Q . La velocidad tangencial \vec{v} de Q se dirige en sentido antihorario, a lo largo de la tangente a un círculo paralelo al plano xy con radio l , con magnitud

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| \sin \theta &= \omega l = \omega \|\vec{r}\| \sin \theta = \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\| \sin \theta \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{\omega} \wedge \vec{r}. \end{aligned}$$

Debido a la selección de ejes, podemos escribir $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, de modo que

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

y más aún

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Por lo tanto, para la rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo vectorial de velocidad es un campo vectorial dirigido paralelo al eje de rotación con magnitud igual al doble de la velocidad angular.

Si un campo vectorial X representa el flujo de un fluido, entonces $\text{rot } X = \vec{0}$ en P significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones o es irrotacional en P ; esto es, no tiene remolinos.

Definición 5.1.4. Un campo vectorial X es **irrotacional** si $\text{rot } X = \vec{0}$.

Ejemplo 5.1.2. Los siguientes campos son irrotacionales.

1. $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (x, y, z)$.
2. $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (y, x, 0)$.
3. $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (x, z, y)$.

Propiedades

1. $\text{rot}(aX + bY) = a \text{rot } X + b \text{rot } Y$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\text{rot}(fX) = f \text{rot } X + \nabla f \wedge X$, f campo escalar.
3. $\text{rot}(\nabla f) = 0$ si f es de clase C^2 .

Demostración. 1. $\text{rot}(aX + bY) = \nabla \wedge (aX + bY) = a \nabla \wedge X + b \nabla \wedge Y = a \text{rot } X + b \text{rot } Y$.

$$\begin{aligned} 2. \text{rot}(fX) &= \nabla \wedge (fX) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ fP & fQ & fR \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial fR}{\partial y} - \frac{\partial fQ}{\partial z}, \frac{\partial fP}{\partial z} - \frac{\partial fR}{\partial x}, \frac{\partial fQ}{\partial x} - \frac{\partial fP}{\partial y} \right) \\ &= \left(f_y R + f \frac{\partial R}{\partial y} - f_y P - f \frac{\partial Q}{\partial z}, f_z P + f \frac{\partial P}{\partial z} - f_x R - f \frac{\partial R}{\partial x}, f_x Q + f \frac{\partial Q}{\partial x} - f_y P - f \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= (f_y R - f_z Q, f_z P - f_x R, f_x Q - f_y P) + f \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \nabla f \wedge X + f \text{rot } X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{rot}(\nabla f) &= \nabla \wedge \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= (0, 0, 0) \text{ porque } f \text{ es de clase } C^2. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.1.5. Si X es un campo C^1 de gradientes entonces es irrotacional.

El recíproco en general no se cumple, basta considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1.3. Sea $X(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$, y $\text{rot } X = (0, 0, Q_x - P_y) = 0$ porque $Q_x = P_y$. Entonces X es irrotacional. Sin embargo este campo no es de gradientes, basta considerar C la circunferencia de centro el origen y radio 1 en el plano xy y calcular la circulación de X a lo largo de C .

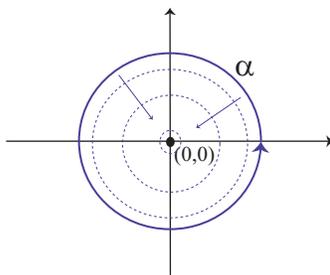
$$\oint_C X \cdot ds = \int_0^{2\pi} X(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Entonces X no es conservativo y por lo tanto no es de gradientes.

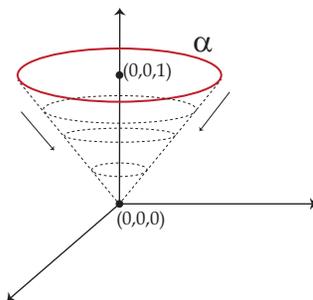
Definición 5.1.6. Una curva C cerrada (parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow U$) contenida en U es **homotópica a un punto** P en U si existe $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$ continua tal que $H(s, a) = H(s, b)$ para todo $s \in [0, 1]$, $H(0, t) = \alpha(t) : [a, b] \rightarrow U$ y $H(1, t) = P$ para todo $t \in [a, b]$.

Intuitivamente, esto quiere decir que C puede deformarse en U de forma continua a un punto P .

Ejemplo 5.1.4. 1. Si consideramos $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, veamos que es homotópica a $(0, 0)$. Definimos $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $H(s, t) = ((1 - s) \cos t, (1 - s) \sin t)$, fijando s tenemos que $H(s, 0) = ((1 - s), 0) = H(s, 2\pi)$, además $H(0, t) = (\cos t, \sin t) = \alpha(t)$ y $H(1, t) = (0, 0)$. Entonces H es una homotopía entre la cfa. unidad y el origen del plano.



2. Consideremos $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$ y sea $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$ curva que rodea a la singularidad. definimos $H : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 - (0, 0, 1)$ por $H(s, t) = ((1 - s) \cos t, (1 - s) \sin t, 1 - s)$, es una función continua y verifica que $H(s, 0) = (1 - s, 0, 1 - s) = H(s, 2\pi)$, $H(0, t) = \alpha(t)$ y $H(1, t) = (0, 0, 0)$. entonces H es una homotopía entre la circunferencia y el origen del espacio.



Definición 5.1.7. Un conjunto U es **simplemente conexo** si es abierto, conexo y toda curva cerrada contenida U es homotópica a un punto en U .

Ejemplo 5.1.5. 1. \mathbb{R}^2 es simplemente conexo. Basta generalizar la construcción que vimos en el ejemplo anterior, para probar que toda curva cerrada del plano se puede contraer a un punto.

2. $\mathbb{R}^2 - \{P\}$ no es simplemente conexo. Si tomamos una curva cerrada que encierre al punto P no vamos a poder construir una homotopía que la lleve a un punto ya que la singularidad nos obstruye el proceso.
3. $\mathbb{R}^3 - \{P\}$ es simplemente conexo. Al tener una dimensión mas podemos evitar la singularidad y contraer cualquier curva cerrada a un punto, repitiendo el razonamiento visto en el ejemplo anterior.
4. $\mathbb{R}^3 - \{P_1, \dots, P_k\}$ es simplemente conexo. Vale igual argumento que el caso anterior.

Teorema 5.1.8. Si $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo C^1 irrotacional y U es simplemente conexo, entonces X es un campo de gradientes.

Demostración. Veremos la demostración para $X = (P, Q)$ plano. Para ver que es de gradientes vamos a probar que $\oint_C X \cdot ds = 0$ para toda curva cerrada simple regular a trozos en U .

Sea D la unión de C con la región interior a C . Como U es simplemente conexo resulta que $D \subset U$. Aplicando el teorema de Green tenemos que

$$\oint_C X \cdot ds = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

Como X es irrotacional tenemos que $\text{rot } X = (Q_x - P_y) \vec{k} = \vec{0}$, entonces $Q_x - P_y = 0$. De lo cual deducimos que

$$\iint_D (Q_x - P_y) dx dy = 0 \Rightarrow \oint_C X \cdot ds = 0.$$

□

Corolario 5.1.9. Si $X : \mathbb{R}^3 - \{P_1, \dots, P_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo C^1 irrotacional, entonces X es un campo de gradientes (conservativo).

Ejemplo 5.1.6. Consideremos el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (y, z \cos(yz) + x, y \cos(yz))$.

1. Veamos que F es de gradientes. Basta probar que es irrotacional ya que \mathbb{R}^3 es simplemente conexo.

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z \cos(yz) + x & y \cos(yz) \end{vmatrix} =$$

$$(\cos(yz) - zy \sin(yz) - \cos(yz) + yz \sin(yz), 0, 1 - 1) = (0, 0, 0).$$

2. Hallemos un potencial escalar f , es decir $\nabla f = F$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f(x, y, z) = xy + h(y, z),$$

por otro lado

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \cos(yz) + x \Rightarrow x + \frac{\partial h}{\partial y} = z \cos(yz) + x \Rightarrow h(y, z) = \sin(yz) + l(z)$$

finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cos(yz) \Rightarrow y \cos(yz) + l'(z) = y \cos(yz).$$

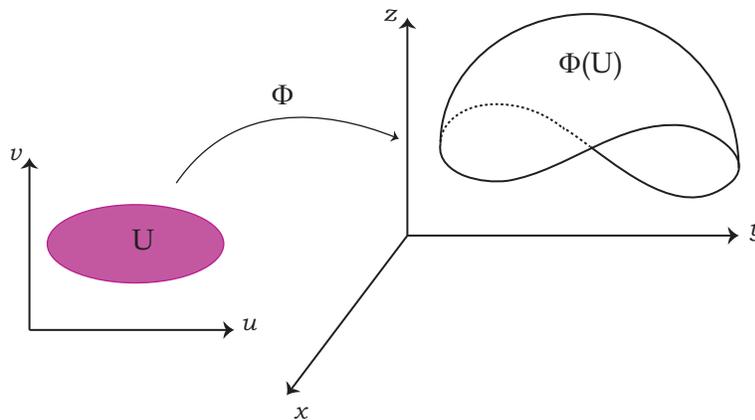
Por lo tanto, podemos tomar $f(x, y, z) = xy + \sin(yz)$.

6.1. Superficies parametrizadas

Definición 6.1.1. Sea U un conjunto conexo de \mathbb{R}^2 . Una **parametrización** es una función continua e inyectiva

$$\begin{aligned}\Phi : U &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))\end{aligned}$$

Su imagen $\text{Im}\Phi$ se llama **superficie parametrizada** en \mathbb{R}^3 .

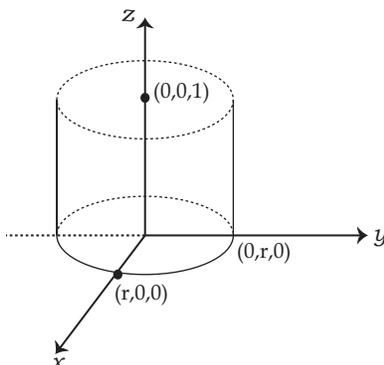


Ejemplo 6.1.1. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(u, v) = (4 + 3u - v, 5 + 2u + 2v, u - v)$, claramente es continua. Observar que

$$\text{Im}\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4 + 3u - v, y = 5 + 2u + 2v, z = u - v, \text{ para algún } (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

Entonces $\text{Im}\Phi$ es el plano por el punto $(4, 5, 0)$ y con dirección $(3, 2, 1)$ y $(-1, 2, -1)$.
Los planos son superficies parametrizadas.

Ejemplo 6.1.2 (Cilindro). Consideremos el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq z < 1$.

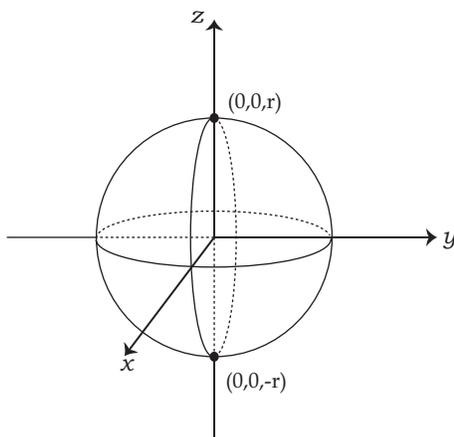


Sea $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Phi(\mathbf{u}, v) = (r \cos u, r \sin u, v).$$

Entonces $\text{Im}\Phi = \text{Cilindro}$. Además, es claro que Φ es continua e inyectiva, por lo cual concluimos que el cilindro es una superficie parametrizada.

Ejemplo 6.1.3 (Esfera). Veamos que la esfera $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, menos los puntos $(0, 0, r)$, $(0, 0, -r)$ es una superficie parametrizada.

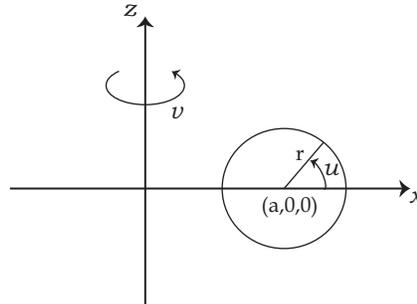


Consideremos la parametrización $\Phi : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\mathbf{u}, v) \mapsto \begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases}$$

$\text{Im}\Phi = S^2 - \{(0, 0, r), (0, 0, -r)\}$ y Φ es continua e inyectiva.

Ejemplo 6.1.4 (Toro T^2). Superficie generada al girar alrededor del eje Oz una circunferencia de centro $(a, 0, 0)$ y radio $r < a$.



Parametrizamos primero la circunferencia: un punto genérico de ella es de la forma $(a + r \cos u, 0, r \sin u)$ con $u \in [0, 2\pi)$. La matriz de giro de ángulo v en torno al eje Oz es

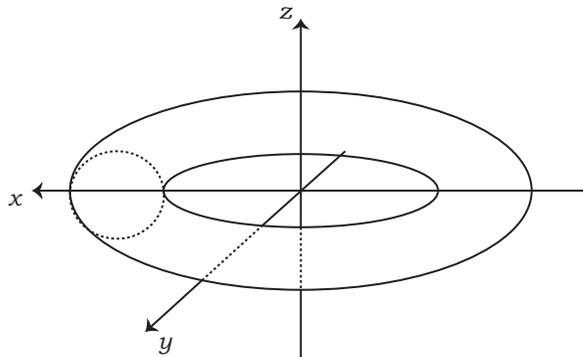
$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces al girar la circunferencia en torno al eje Oz tenemos

$$\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cos u \\ 0 \\ r \sin u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + r \cos u) \cos v \\ (a + r \cos u) \sin v \\ r \sin u \end{pmatrix}$$

Entonces una parametrización del toro es

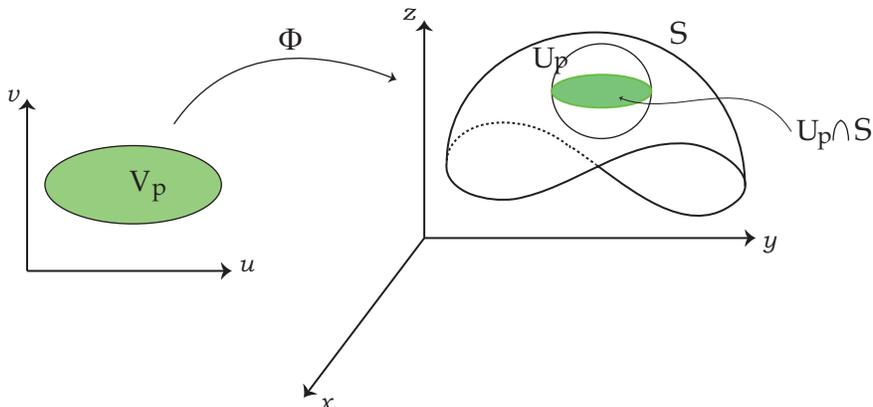
$$\begin{aligned} \Phi : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u) \end{aligned}$$



Observemos que $\text{Im}\Phi = T^2$ Entonces T^2 es una superficie parametrizada.

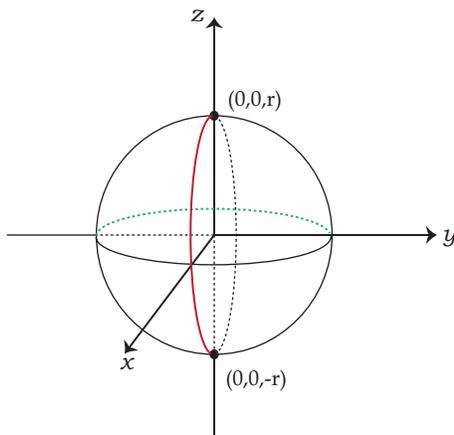
Hay muchas superficies que no se pueden escribir como la imagen de una función continua e inyectiva definida en un conexo de \mathbb{R}^2 . Por tal motivo damos la siguiente definición.

Definición 6.1.2. Una **superficie** es un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para todo $p \in S$ existe $U_p \ni p$ abierto de \mathbb{R}^3 tal que $U_p \cap S$ es una superficie parametrizada. Es decir, $\forall p \in S$ $\exists U_p \subset \mathbb{R}^3$ y $\Phi : V_p \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua tal que $\text{Im}\Phi = U_p \cap S$.



Esto quiere decir que una superficie es el solapamiento de varias superficies parametrizadas.

Ejemplo 6.1.5 (Esfera). La esfera $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es una superficie. Veamos como cubrirla por parametrizaciones.



Consideremos la parametrización $\Phi_1 : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \begin{cases} x = r \cos \mathbf{u} \sin \mathbf{v} \\ y = r \sin \mathbf{u} \sin \mathbf{v} \\ z = r \cos \mathbf{v} \end{cases}$$

$\text{Im}\Phi_1 = S^2 - \{(x, 0, z) : x^2 + z^2 = r^2, x \geq 0\}$ y Φ_1 es continua e inyectiva.

Ahora consideremos $\Phi_2 : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \begin{cases} x = -r \cos \mathbf{u} \sin \mathbf{v} \\ y = r \cos \mathbf{v} \\ z = r \sin \mathbf{u} \sin \mathbf{v} \end{cases}$$

$\text{Im}\Phi_2 = S^2 - \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = r^2, x \leq 0\}$.

Entonces $S^2 = \text{Im}\Phi_1 \cup \text{Im}\Phi_2$ y Φ_2 es continua e inyectiva.. Entonces S^2 es una superficie.

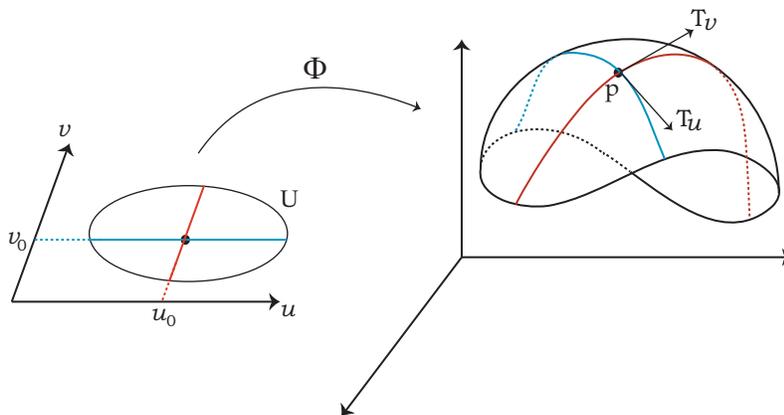
6.2. Plano tangente

Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Fijando la coordenada u en u_0 obtenemos una función $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto \Phi(u_0, t)$, cuya imagen es una curva sobre la superficie ($S = \text{Im}\Phi$). Sabemos que el vector tangente a esta curva en el punto $\Phi(u_0, v_0)$ está dado por

$$T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial Y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial Z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

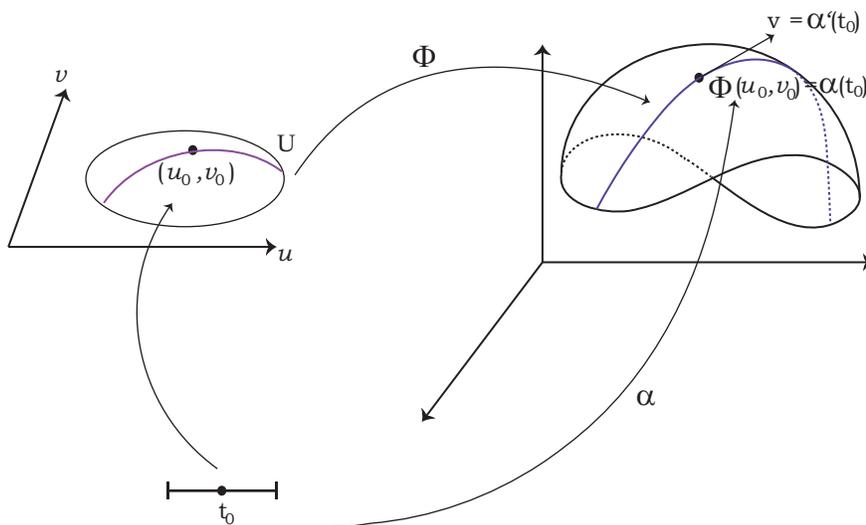
De manera análoga, si fijamos la coordenada v y consideramos la curva $t \mapsto \Phi(t, v_0)$, obtenemos el vector tangente a esta curva en $\Phi(u_0, v_0)$, dado por

$$T_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial Y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial Z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$



Definición 6.2.1. Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Decimos que \vec{v} es un **vector tangente** a la superficie en el punto $\Phi(u_0, v_0)$ si existe una curva \mathcal{C} contenida en la superficie parametrizada por $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$ tal que

$$\alpha(t_0) = \Phi(u_0, v_0) \text{ y } \alpha'(t_0) = v.$$



Proposición 6.2.2. Todos los vectores tangentes a S por $\Phi(u_0, v_0)$ son combinación lineal de T_u y T_v .

Demostración. $\vec{v} = \alpha'(t_0)$, donde $\alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))$. Entonces

$$\alpha'(t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)u'(t_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)v'(t_0) = u'(t_0)T_u + v'(t_0)T_v.$$

Entonces $\vec{v} = u'(t_0)T_u + v'(t_0)T_v$. Por lo tanto \vec{v} es combinación lineal de T_u y T_v . \square

Definición 6.2.3. Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Decimos que $\Phi(u_0, v_0)$ es un **punto regular** de la superficie si

$$T_u \wedge T_v = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0.$$

Ejemplo 6.2.1 (Cono). Consideremos el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \geq 0$. Podemos considerar la siguiente parametrización

$$\begin{aligned} \Phi : (0, 2\pi) \times [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (v \cos u, v \sin u, v) \end{aligned}$$

$$\Phi_u(u, v) = (-v \sin u, v \cos u, 0) \text{ y } \Phi_v(u, v) = (\cos u, \sin u, 1)$$

$$\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v) = v(\cos u, \sin u, -1) = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

Entonces el punto $P = (0, 0, 0)$ es un punto singular (es decir, no es un punto regular).

Definición 6.2.4. Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Llamaremos **versor normal** a la superficie $S = \text{Im } \Phi$, en el punto $\Phi(u_0, v_0)$, al vector

$$\vec{n} = \frac{\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)}{\|\Phi_u(u_0, v_0) \wedge \Phi_v(u_0, v_0)\|}.$$

Ejemplo 6.2.2. Consideremos la superficie con ecuación implícita $z = x^2 - y^2$. Hallar el versor normal en el punto $P = (-1, 1, 0)$.

Consideramos la parametrización de la superficie dada por $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$, entonces $\Phi_u(u, v) = (1, 0, 2u)$ y $\Phi_v(u, v) = (0, 1, -2v)$, entonces

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = (-2u, 2v, 1).$$

Por lo tanto en el punto $P = \Phi(-1, 1)$ tenemos que

$$\vec{n} = \frac{1}{3}(2, 2, 1).$$

Proposición 6.2.5. Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, el espacio de vectores tangentes a la superficie es un plano. Más aún, es el plano que pasa por el punto $\Phi(u_0, v_0)$ generado por los vectores T_u y T_v .

Demostración. Por lo que vimos en la proposición anterior todo vector tangente por el punto $\Phi(u_0, v_0)$ es CL de T_u y T_v . Además, como Φ es regular en (u_0, v_0) tenemos que $\{T_u, T_v\}$ es LI. Por lo tanto este espacio es un plano. Todavía más, es el plano por $\Phi(u_0, v_0)$ generado por los vectores T_u y T_v . \square

Notación: $T_P S$ es el plano tangente a la superficie S por el punto P . Por lo probado anteriormente:

$$T_P S : (X - P) \cdot (T_u \wedge T_v) = 0.$$

O usando la noción de versor normal

$$T_P S : (X - P) \cdot \vec{n} = 0.$$

Donde $X = (x, y, z)$ y $P = \Phi(u_0, v_0)$.

Ejemplo 6.2.3. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación implícita $z = x^2 - y^2$ en el punto $P = (-1, 1, 0)$.

Por lo visto en el ejemplo 6.2.2 sabemos que el versor normal a S por P es $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$. Entonces

$$T_P S : ((x, y, z) - (-1, 1, 0)) \cdot \frac{1}{3}(2, 2, 1) = 0,$$

simplificando, concluimos que $T_P S : 2x + 2y + z = 0$.

Ejemplo 6.2.4 (Semiesfera). Consideremos la semiesfera superior de radio r y con centro en el origen: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z > 0$ y tomemos la siguiente parametrización:

$$\begin{aligned} \Phi : [0, 2\pi) \times (0, \pi/2) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v) \end{aligned}$$

$\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-r \sin u \sin v, r \cos u \sin v, 0)$ y $\Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v)$. Entonces

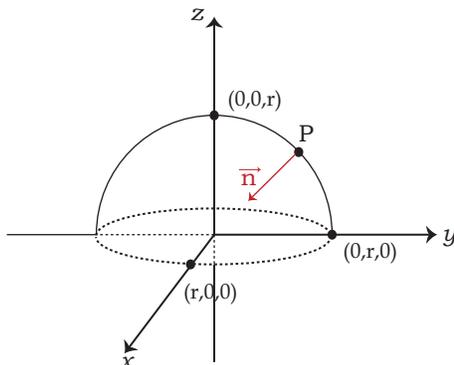
$$\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -r^2 \sin v (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

$\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow v = 0$. Entonces la parametrización es regular.

Veamos cual es el versor normal a la esfera en un punto arbitrario: $\|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| = r^2 \sin v$. Entonces

$$\vec{\mathbf{n}} = -(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

Es un vector radial que apunta al centro de la esfera.



Calculemos el plano tangente a la superficie en el punto $P = (1, 1, \sqrt{2})$, para $u = v = \pi/4$ y $r = 2$.

En este caso tenemos que $\vec{\mathbf{n}} = \frac{-1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$, entonces

$$T_P S^2 : ((x, y, z) - (1, 1, \sqrt{2})) \cdot \frac{-1}{2}(1, 1, \sqrt{2}) = 0$$

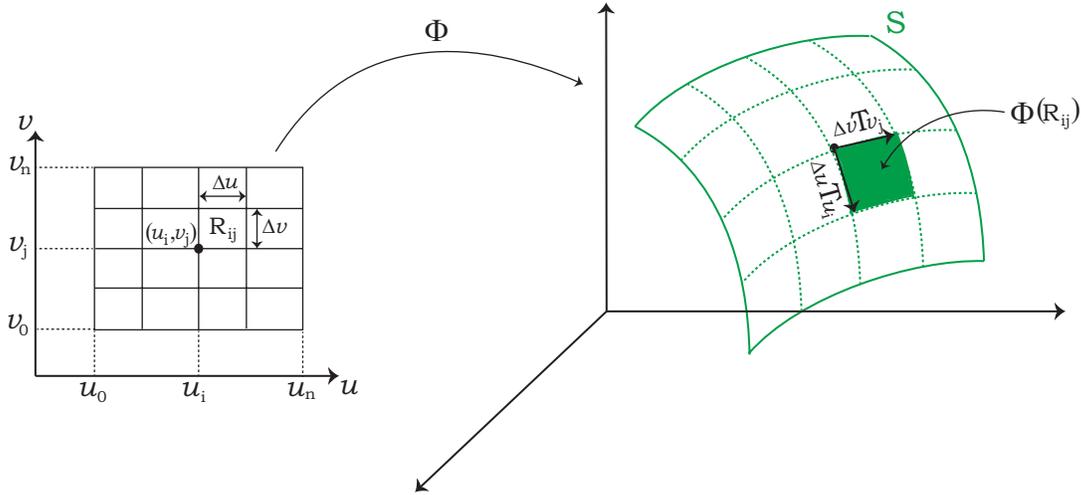
$$T_P S^2 : x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0.$$

6.3. Área de superficies paramétricas

Definición 6.3.1. Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular de una superficie S . Definimos el **área de S** como:

$$A(S) = \iint_U \|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \, du \, dv.$$

Veamos la justificación de esta definición.



$$A(\Phi(R_{ij})) \approx \|\Delta u \Phi_u \wedge \Delta v \Phi_v(u_i, v_j)\| = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

$$A(\Phi(R_{ij})) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

$$A(\Phi(U)) = \lim_{R_{ij} \rightarrow 0} \sum_{i,j} A(\Phi(R_{ij})) = \iint_U \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv.$$

Ejemplo 6.3.1 (Esfera). Consideremos la parametrización de la esfera dada por

$$\begin{aligned} \Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v) \end{aligned}$$

Entonces $\Phi_u = (-r \sin u \sin v, r \cos u \sin v, 0)$ y $\Phi_v = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v)$.

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r^2 \sin v.$$

Entonces, $A(S^2) = \iint_U \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \sin v dv = 4\pi r^2$.

$$A(S^2) = 4\pi r^2.$$

Ejemplo 6.3.2 (Toro). Consideremos la parametrización $\Phi(u, v) = ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$, $u, v \in (0, 2\pi)$.

Entonces $\Phi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$, $\Phi_v = (-(a+r \cos u) \sin v, (a+r \cos u) \cos v, 0)$.

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r(a+r \cos u).$$

$$A(T^2) = r \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a+r \cos u) du = 4a\pi^2 r.$$

Otra notación

Si representamos a $\Phi = (X, Y, Z)$, entonces $\Phi_u = (X_u, Y_u, Z_u)$ y $\Phi_v = (X_v, Y_v, Z_v)$.

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} Y_u & Z_u \\ Y_v & Z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{vmatrix} \right).$$

Notamos $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{vmatrix}$, $\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} Y_u & Z_u \\ Y_v & Z_v \end{vmatrix}$ y $\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} Z_u & X_u \\ Z_v & X_v \end{vmatrix}$. Entonces

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right]^2}$$

Ejemplo 6.3.3 (Cono). Consideremos la parametrización

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \\ z = r \end{cases}$$

donde $r \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, 2\pi)$.

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -r \sen \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r, \quad \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sen \theta & 1 \\ r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -r \cos \theta \text{ y}$$

$$\frac{\partial(Z, X)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & -r \sen \theta \end{vmatrix} = -r \sen \theta.$$

$$\text{Entonces } \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sen^2 \theta} = \sqrt{2}r.$$

$$A(\text{Cono}) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r dr d\theta = 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 r dr = \sqrt{2}\pi r^2.$$

Ejemplo 6.3.4 (Helicoide). Consideremos la parametrización

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sen \theta \\ z = \theta \end{cases}$$

donde $r \in (0, 1)$ y $\theta \in (0, 2\pi)$.

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -r \sen \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r, \quad \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sen \theta & 0 \\ r \cos \theta & 1 \end{vmatrix} = \sen \theta \text{ y}$$

$$\frac{\partial(Z, X)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \theta \\ 1 & -r \sen \theta \end{vmatrix} = -\cos \theta.$$

$$\text{Entonces } \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{r^2 + \cos^2 \theta + \sen^2 \theta} = \sqrt{r^2 + 1}.$$

$$A(\text{Cono}) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} dr = \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})).$$

Área de una gráfica Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$. Entonces

$$A(S) = \iint_U \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

Veamos de donde se deduce esta fórmula. Consideremos la parametrización dada por

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$$

$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = 1$, $\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & g_u \\ 1 & g_v \end{vmatrix} = -g_u$ y $\frac{\partial(Z, X)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} g_u & 1 \\ g_v & 0 \end{vmatrix} = -g_v$. Entonces

$$A(S) = \iint_U \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2} du dv.$$

Ejemplo 6.3.5. Sea S la superficie dada por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < 1$. Entonces

$$A(S) = \iint_U \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Área de superficies de revolución Sea S la superficie que se obtiene al girar el gráfico de $y = f(x)$.

- Alrededor del eje x .

$$A(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Para ver esto consideremos la parametrización dada por

$$\begin{cases} x = u \\ y = f(u) \cos v \\ z = f(u) \sin v \end{cases}$$

donde $u \in [a, b]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Entonces $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = -f(u) \sin v$, $\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} = f(u) f'(u)$

y $\frac{\partial(Z, X)}{\partial(r, \theta)} = f(u) \cos v$. De lo que deducimos que

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \sqrt{f(u)^2 \sin^2 v + f(u)^2 f'(u)^2 + f(u)^2 \cos^2 v} du dv = 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} du.$$

- Alrededor del eje y .

$$A(S) = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Integrales de superficies

7.1. Integrales de campos escalares sobre superficies

Definición 7.1.1. Sea S una superficie paramétrica con parametrización $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido sobre S . Definimos la **integral** de f sobre S como

$$\iint_S f dS = \iint_U f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv.$$

Las interpretaciones físicas de estas integrales son variadas. Por ejemplo, un campo escalar $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ puede representar la densidad de masa por unidad de superficie de un material de grosor despreciable que está distribuido sobre una superficie S , y entonces $\iint_S f dS$ sería la masa total de dicho material.

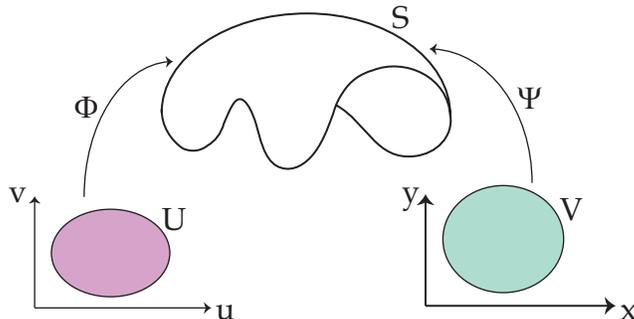
Estudiemos ahora la invariancia de estas integrales respecto de la parametrización escogida de S .

Lema 7.1.2. Sean $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica S , y sea $h : V \rightarrow U$ el difeomorfismo de clase C^1 definido por $h = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Denotemos $(h_1(x, y), h_2(x, y)) = h(x, y)$. Entonces

$$\Psi_x \wedge \Psi_y = (\Phi_u \wedge \Phi_v) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}$$

donde $\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)}$ denota el jacobiano de h .

Demostración.



Por la regla de la cadena tenemos

$$\Psi_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

y también

$$\Psi_y = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y}.$$

Multiplicando vectorialmente los miembros de la derecha de ambas igualdades, y utilizando las propiedades del producto vectorial tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi_x \wedge \Psi_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial h_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \frac{\partial (h_1, h_2)}{\partial (x, y)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 7.1.3. Sean $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ y $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una misma superficie paramétrica S , y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Entonces

$$\iint_U f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv = \iint_V f(\Psi(x, y)) \|\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)\| dx dy.$$

Es decir, la integral $\iint_S f dS$ no depende de la parametrización escogida.

Demostración. Denotemos $(h_1, h_2) = h(x, y)$ donde $h = \Phi^{-1} \circ \Psi$. Se tiene que $\Psi = \Phi \circ h$, y aplicando el teorema del cambio de variables junto con el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned} & \iint_U f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)\| du dv = \\ & \iint_V f(\Phi(h(x, y))) \|\Phi_u(h(x, y)) \wedge \Phi_v(h(x, y))\| \left| \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = \\ & \iint_V f(\Psi(x, y)) \|\Psi_x(x, y) \wedge \Psi_y(x, y)\| dx dy. \end{aligned}$$

□

Proposición 7.1.4 (Propiedades de las integrales de superficie). *1. Linealidad:* Sea S una superficie paramétrica, f, g dos campos escalares continuos en S , y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_S f dS + \beta \iint_S g dS.$$

2. Continuidad: Sean S una superficie paramétrica y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Tomemos una constante $M > 0$ de forma que $|f(x, y, z)| \leq M$ para todo punto $(x, y, z) \in S$. Entonces

$$\left| \iint_S f dS \right| \leq M \text{Área}(S).$$

Ejemplo 7.1.1. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ un campo escalar y

$$S = \{(x, y, z) : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta : \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}.$$

Hallar $\iint_S f dS$.

Consideremos la parametrización $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi_r(r, \theta) &= (\cos \theta, \sin \theta, 0), & \Phi_\theta(r, \theta) &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1) \\ \Rightarrow \Phi_r \wedge \Phi_\theta &= (\sin \theta, -\cos \theta, r) \text{ y } \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| &= \sqrt{1 + r^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado $f(\Phi(r, \theta)) = \sqrt{1 + r^2}$. Entonces

$$\iint_S f dS = \iint_U f(\Phi(r, \theta)) \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r^2) dr d\theta = 2\pi \left(r + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}\pi.$$

Ejemplo 7.1.2. Sea S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hallar

$$\iint_S z^2 dS.$$

Consideremos la parametrización

$$\begin{aligned}\Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto (\cos u \sen v, \sen u \sen v, r \cos v)\end{aligned}$$

Para esta parametrización sabemos que

$$\|\Phi_{\mathbf{u}} \wedge \Phi_{\mathbf{v}}\| = \sen v,$$

y $f(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \cos^2 v$. Entonces

$$\iint_S z^2 dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 v \sen v du dv = 2\pi \int_0^\pi \cos^2 v \sen v dv = \frac{4\pi}{3}.$$

Observación 7.1.5. Si S es una superficie dada por la gráfica de $z = g(x, y)$ con f función continua sobre S entonces:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy.$$

Ejemplo 7.1.3. Sea S la superficie dada por $z = x^2 + y$ en $[0, 1] \times [-1, 1]$, encontrar

$$\iint_S x dS.$$

$$\begin{aligned}\iint_S x dS &= \iint_D x \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{1 + (2x)^2 + 1^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx dy = 2 \int_0^1 x \sqrt{2 + 4x^2} dx \\ &= \frac{2}{8} \int_2^6 \sqrt{u} du = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Observación 7.1.6. Si S tiene densidad de masa $m(x, y, z)$ en (x, y, z) . Entonces su masa total es:

$$M(S) = \iint_S m(x, y, z) dS.$$

Ejemplo 7.1.4. Sea S el helicoido con parametrización $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cos v, \mathbf{u} \sen v, v)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$ con densidad de masa en (x, y, z) igual al doble de la distancia al eje central. Hallar la masa total de S .

$m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\|\Phi_{\mathbf{u}} \wedge \Phi_{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1 + u^2}$. Entonces

$$M(S) = \iint_S 2u dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2u \sqrt{1 + u^2} du dv = 2\pi \int_0^1 2u \sqrt{1 + u^2} du = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1).$$

7.2. Integrales de campos vectoriales sobre superficies

7.2.1. Flujo a través de una superficie

Definición 7.2.1. Sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de S y $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos el **flujo** de X a través de S como

$$\iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S} = \iint_U X(\Phi(u, v)) \cdot (\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v)) du dv.$$

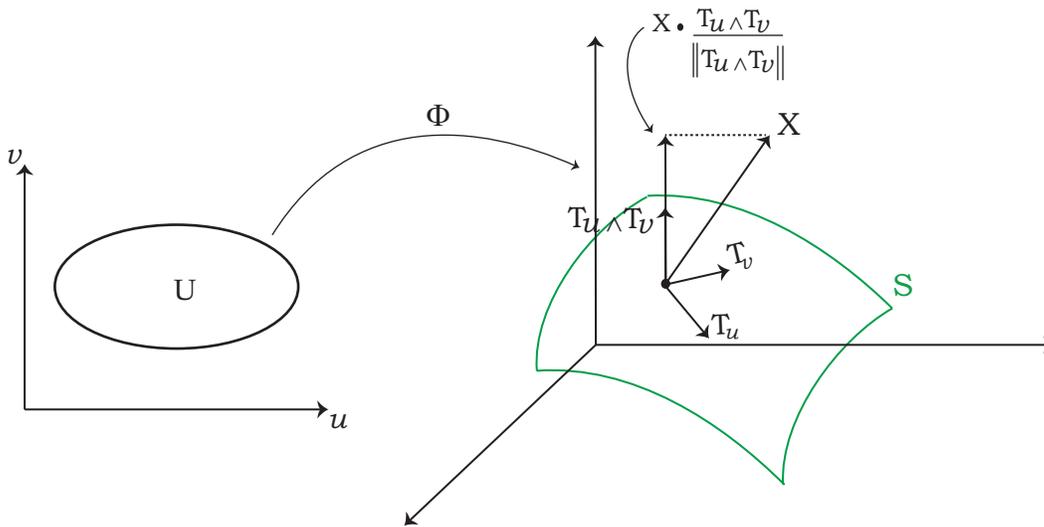


Figura 7.1: Significado geométrico de $X \cdot (\Phi_u(u, v) \wedge \Phi_v(u, v))$

Ejemplo 7.2.1. Sea $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, donde $\Phi(\theta, \phi) = (\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi)$. Calcular $\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

$$\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(\Phi(\theta, \phi)) \cdot (\Phi_{\theta} \wedge \Phi_{\phi}) d\theta d\phi.$$

$$\mathbf{r}(\Phi(\theta, \phi)) \cdot (\Phi_{\theta} \wedge \Phi_{\phi}) = \begin{vmatrix} \cos \theta \operatorname{sen} \phi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \cos \phi \\ -\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \cos \theta \operatorname{sen} \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \operatorname{sen} \theta \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} \phi.$$

Entonces $\iint_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi d\theta d\phi = 2\pi \cos \phi \Big|_0^{\pi} = -4\pi.$

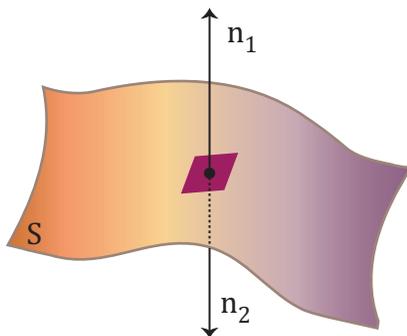
7.2.2. Orientación

Se puede esbozar una analogía entre la integral de superficie $\iint_{\Phi} X \cdot d\mathbf{S}$ y la integral de línea $\int_C X \cdot ds$. Recordar que la integral de línea es una integral orientada. Necesitábamos el

concepto de orientación de una curva para entender la definición de $\int_C X \cdot ds$ sobre curvas orientadas. Extendemos la definición de $\iint_{\Phi} X \cdot dS$ a superficies orientadas de manera similar; esto es, dada una superficie S parametrizada por una función Φ , queremos definir $\iint_S X \cdot dS = \iint_{\Phi} X \cdot dS$ y mostrar que es independiente de la parametrización, excepto, quizás, por el signo. Para lograrlo necesitamos el concepto de orientación de una superficie.

Sea S una superficie parametrizada por $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular en todo U .

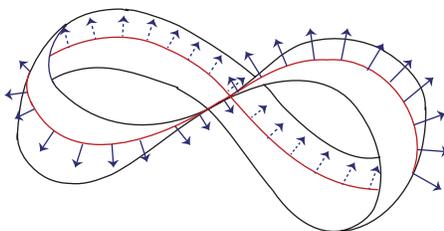
Definición 7.2.2. Dar una **orientación** en una superficie S es elegir en cada punto $p \in S$ uno sólo de los dos versores normales a S en p , $n(p)$ de modo que varíe continuamente con p (esta elección puede o no apuntar para el mismo lado que $\Phi_u \wedge \Phi_v$).



Definición 7.2.3. Una superficie es **orientable** si admite una orientación.

Una superficie S de \mathbb{R}^3 se dice orientable, si es posible determinar en ella dos lados, el lado exterior (o positivo) y el lado interior (o negativo).

Ejemplo 7.2.2. La banda de Möbius es una superficie no orientable.



Definición 7.2.4. Sea S una superficie regular orientada y sea $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de S . Decimos que Φ **preserva orientación** si

$$n \cdot (\Phi_u \wedge \Phi_v) > 0,$$

de lo contrario ($n \cdot (\Phi_u \wedge \Phi_v) < 0$) decimos que Φ **revierte orientación**.

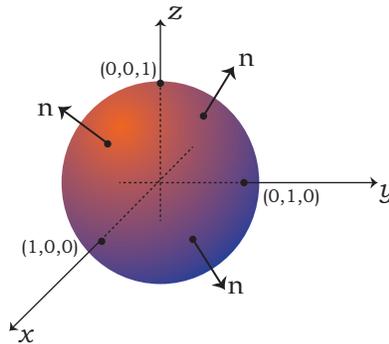
Observación 7.2.5. Sea $S = \Phi(U)$ una superficie regular orientada. Entonces

$$n = \pm \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}.$$

Si es $+$ $\Rightarrow \Phi$ preserva orientación.

Si es $-$ $\Rightarrow \Phi$ revierte orientación.

Ejemplo 7.2.3. Consideremos la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con la normal exterior $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}$.



La parametrización $\Phi(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$ preserva o revierte orientación?

$$\mathbf{n} \cdot (\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = \mathbf{r} \cdot (\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = -\sin \phi$$

donde $\phi \in (0, \pi)$. Entonces $\mathbf{n} \cdot (\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) < 0$, por lo tanto Φ revierte orientación.

7.2.3. Integrales de campos vectoriales sobre superficies

Teorema 7.2.6. Sea S una superficie orientada y $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $\Psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ dos parametrizaciones regulares que preservan orientación. Si X es un campo vectorial continuo entonces

$$\iint_U X \cdot d\mathbf{S} = \iint_V X \cdot d\mathbf{S}.$$

Demostración. Como las dos parametrizaciones preservan la orientación, aplicando la observación 7.2.5 tenemos que

$$\frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} = \mathbf{n} = \frac{\Psi_x \wedge \Psi_y}{\|\Psi_x \wedge \Psi_y\|}.$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Phi} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{U}} \mathbf{X}(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot (\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \, d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\
&= \iint_{\mathbf{U}} \mathbf{X}(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot \mathbf{n} \|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \, d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\
&= \iint_{\mathbf{U}} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \, d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\
&= \iint_{\mathbf{V}} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})(\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \|\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\
&= \iint_{\mathbf{V}} \mathbf{X}(\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{n} \|\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\
&= \iint_{\mathbf{V}} \mathbf{X}(\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot (\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\
&= \iint_{\Psi} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 7.2.7. Sea S una superficie orientada, $\Phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular que preserva orientación y $\Psi : \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular que revierte orientación. Si \mathbf{X} es un campo vectorial continuo entonces

$$\iint_{\Phi} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{\Psi} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}.$$

Definición 7.2.8. Sea S una superficie orientada y $\Phi : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización regular que preserva orientación. Si \mathbf{X} un campo vectorial continuo definido sobre S definimos la **integral de \mathbf{X} sobre S** como:

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}.$$

Teorema 7.2.9. Si S es una superficie orientada y \mathbf{X} es un campo continuo definido sobre S entonces

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Demostración. Sea Φ una parametrización que preserva orientación.

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Phi} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \iint_{\mathbf{U}} \mathbf{X}(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot (\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \, d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\
&= \iint_{\mathbf{U}} \mathbf{X}(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \cdot \frac{(\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))}{\|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\|} \|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \, d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\
&= \iint_{\mathbf{U}} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{n})(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \|\Phi_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \wedge \Phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\| \, d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\
&= \iint_S \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS.
\end{aligned}$$

□

Proposición 7.2.10 (Propiedades de las integrales de superficie). 1. **Linealidad:** Sea S una superficie paramétrica orientada, X, Y dos campos vectoriales continuos en S y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_S (\alpha X + \beta Y) \cdot d\mathbf{S} = \alpha \iint_S X \cdot d\mathbf{S} + \beta \iint_S Y \cdot d\mathbf{S}.$$

2. **Continuidad:** Sean S una superficie paramétrica orientada y X un campo vectorial continuo en S . Sea K tal que $\|X(x, y, z)\| \leq K$ para todo $(x, y, z) \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se comprueba que

$$\left| \iint_S X \cdot \mathbf{S} \right| \leq K \text{Área}(S).$$

La integral de un campo vectorial sobre una superficie S suele interpretarse como el flujo de un fluido que pasa a través de S . Puede imaginarse que S es una membrana porosa y que el campo vectorial $X(x, y, z) = \rho(x, y, z)V(x, y, z)$, donde $V(x, y, z)$ es la velocidad del fluido y $\rho(x, y, z)$ es su densidad de masa, es el vector que nos dice cuánta masa de fluido pasa por el punto (x, y, z) en la dirección en que se mueve el fluido, por unidad de área y de tiempo. Entonces el producto escalar $X \cdot \mathbf{n}$ representa la componente del vector densidad de flujo en la dirección de \mathbf{n} , y la masa de fluido que pasa a través de toda S por unidad de tiempo estará determinada por $\iint_S X \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S X \cdot d\mathbf{S}$.

Ejemplo 7.2.4 (Aplicación física: flujo de calor). Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in S \subset \mathbb{R}^3$, S una superficie. Si T es C^1 entonces

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

es el gradiente de temperatura, y el calor fluye según el campo vectorial $X = -k\nabla T$ donde k es una constante positiva llamada **conductividad**. Notar que el flujo de calor, como cabe esperar, se produce de las zonas calientes hacia las frías, pues $-\nabla T$ apunta en la dirección donde T decrece.

La tasa total de flujo o flujo de calor a través de la superficie S viene dada por

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S}.$$

Consideremos la siguiente función de temperatura, $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada según la normal exterior. Hallar el flujo de calor a través de S suponiendo que $k = 1$.

Se tiene que $X(x, y, z) = -\nabla T(x, y, z) = -2(x, y, z)$. Como $\mathbf{n} = \mathbf{r} = (x, y, z)$ se sigue que $X \cdot \mathbf{n} = -2(x^2 + y^2 + z^2) = -2$. Entonces

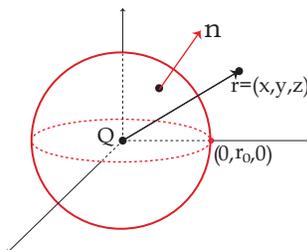
$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_S X \cdot \mathbf{n} dS = -2 \iint_S dS = -8\pi.$$

El flujo de calor es negativo, entonces la temperatura fluye en sentido contrario a la normal \mathbf{n} , por lo tanto X apunta en promedio hacia adentro, es decir el centro se calienta, hay ganancia de temperatura.

Ejemplo 7.2.5 (Aplicación física: ley de Gauss). El flujo del campo eléctrico sobre cualquier superficie cerrada (con normal saliente) es igual a la carga neta encerrada en esa superficie dividida por la permitividad del vacío.

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Consideremos el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k\frac{Q}{r^3}\vec{\mathbf{r}}$ a través de la esfera de centro \mathbf{q} , radio r_0 con la normal \mathbf{n} saliente.



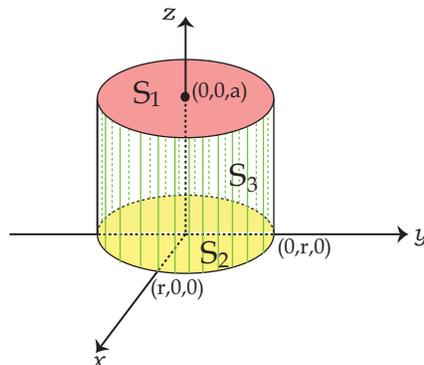
En este caso

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= \frac{kQ}{r_0^2} \\ \Rightarrow \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{kQ}{r_0^2} \iint_S dS = \frac{kQ}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi kQ = \frac{Q}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Definición 7.2.11. Sea S una superficie que es unión finita de superficies paramétricas, S_1, \dots, S_n dos a dos disjuntas o tales que su intersección es unión finita de curvas regulares a trozos. Entonces, si $X: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo definimos el **flujo de X sobre S** como:

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X \cdot d\mathbf{S} + \dots + \iint_{S_n} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Ejemplo 7.2.6. Sea S el cilindro con tapas, como se muestra en la siguiente figura, orientado con la normal saliente.



Esta superficie se obtiene como la unión de tres superficies paramétricas, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, donde

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = a\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, z = 0\} \text{ y}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq a\}$$

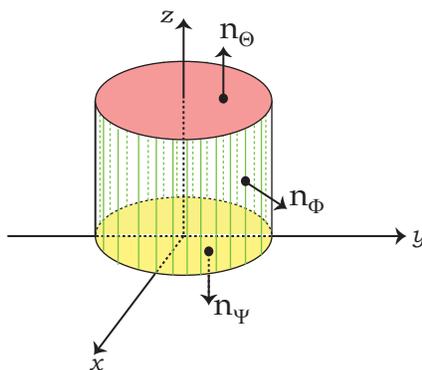
Veamos como parametrizar a S de forma que las parametrizaciones sean compatibles con la orientación de la superficie. Sean $\Theta, \Psi : [0, 2\pi) \times (0, r] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $\Theta(u, v) = (v \sin u, v \cos u, a)$, $\Psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$ y $\Phi : [0, 2\pi) \times [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\Phi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$, parametrizaciones de S_1 , S_2 y S_3 respectivamente. Veamos que los vectores normales son salientes.

$$\mathbf{n}_{\Theta(u,v)} = \frac{(v \cos u, -v \sin u, 0) \wedge (\sin u, \cos u, 0)}{\| (v \cos u, -v \sin u, 0) \wedge (\sin u, \cos u, 0) \|} = \frac{(0, 0, v)}{v} = (0, 0, 1).$$

$$\mathbf{n}_{\Psi(u,v)} = \frac{(-v \sin u, v \cos u, 0) \wedge (\cos u, \sin u, 0)}{\| (-v \sin u, v \cos u, 0) \wedge (\cos u, \sin u, 0) \|} = \frac{(0, 0, -v)}{v} = (0, 0, -1).$$

$$\mathbf{n}_{\Phi(u,v)} = \frac{(-r \sin u, r \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1)}{\| (-r \sin u, r \cos u, 0) \wedge (0, 0, 1) \|} = \frac{(r \cos u, r \sin u, 0)}{r} = (\cos u, \sin u, 0).$$

Por lo tanto estas son parametrizaciones que preservan la orientación de S , con normal exterior.



Consideremos el campo $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (0, 0, z)$. Hallar $\iint_S X \cdot d\mathbf{S}$.

$$\iint_S X \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Como $X \perp \mathbf{n}_\Phi$ tenemos que $\iint_{S_3} X \cdot d\mathbf{S} = 0$.

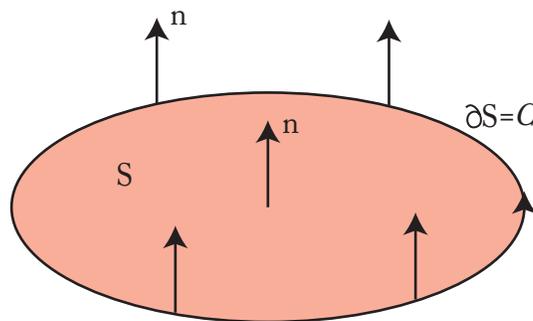
Por otro lado, si calculamos $\mathbf{X}(\Psi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (0, 0, 0)$, entonces $\iint_{S_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} a dS = a\pi r^2.$$

Teorema de Stokes

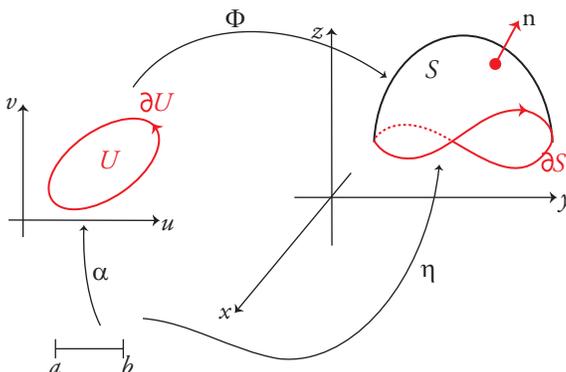
El teorema de Stokes es una generalización del teorema de Green en cuanto que relaciona la integral de un campo vectorial sobre una curva cerrada que es borde de una superficie global con la integral de su rotor en dicha superficie.

Si S es una superficie orientada con borde ∂S , la **orientación del borde coherente** con la orientación de la superficie se puede caracterizar informalmente como aquella en la que: “Al andar sobre el borde con el vector normal a la superficie apuntando a la cabeza, la superficie queda a la izquierda”.



Si $\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización y S es una superficie paramétrica dada por $\Phi(U) = S$ donde $U \subset V$, definimos la **frontera** de S como $\partial S = \Phi(\partial U)$. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂U con orientación positiva, ∂S es la curva cerrada simple regular (o regular a trozos) orientada que es la imagen de la función $\eta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por la composición $\eta(t) = \Phi(\alpha(t))$, con la orientación inducida por la de η . Si S es orientada y Φ preserva la orientación, entonces, la orientación de ∂S inducida

por η es **coherente** con la de S .



Teorema 8.0.12 (de Stokes). *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 , regular, orientada según el vector normal unitario \mathbf{n} , con borde una curva regular o regular a trozos, cerrada, simple, orientada coherentemente con la orientación de S (regla de la mano derecha). Si X es un campo vectorial C^1 en algún abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces*

$$\iint_S \operatorname{rot} X \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} X \cdot ds.$$

Teorema 8.0.13 (de Stokes para superficies parametrizadas). *Sea C es una curva plana, regular a trozos, cerrada, simple, orientada en sentido antihorario y designamos por U a la componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 - C$. Supongamos que $\Phi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización en algún abierto V que contiene a $U \cup C$ y sea $S = \Phi(U)$. S es una superficie paramétrica y $\partial S = \Phi(C)$ una curva regular a trozos, simple, cerrada que llamamos el borde de S . La orientación de ∂S queda determinada por la de $C = \partial U$ vía Φ y S está orientada con vector normal dado por Φ . Si X es un campo vectorial C^2 en algún abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces*

$$\iint_S \operatorname{rot} X \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} X \cdot ds.$$

Demostración. Sea α la parametrización de C dada por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ($t \in [a, b]$). Si $X = (P, Q, R)$ entonces

$$\operatorname{rot} X = \nabla \wedge X = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Por otra parte, si $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ ($(u, v) \in U$) entonces

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right).$$

Necesitamos probar

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} X \cdot d\mathbf{S} &= \iint_U \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right) du dv \\ &= \int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz. \end{aligned}$$

y para esto basta demostrar las tres igualdades siguientes

$$\iint_U \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \int_{\partial S} P dx,$$

$$\iint_U \left[\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \int_{\partial S} Q dy,$$

$$\iint_U \left[\frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \int_{\partial S} R dz.$$

Probaremos sólo la primera igualdad, ya que las dos restantes admiten un razonamiento análogo.

Como $\eta(t) = \Phi(\alpha(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)), Z(u(t), v(t)))$ ($t \in [a, b]$), se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} P dx &= \int_a^b (P(\eta(t)), 0, 0) \cdot \eta'(t) dt \\ &= \int_a^b P(\Phi(\alpha(t))) \left(\frac{\partial X}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} v'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b p(\alpha(t)) \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right) \Big|_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t) dt = \int_C p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right), \end{aligned}$$

siendo $p = P \circ \Phi$.

Ahora aplicamos el teorema de Green al campo plano $p \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right)$ sobre la curva C y la región U de la cual es frontera.

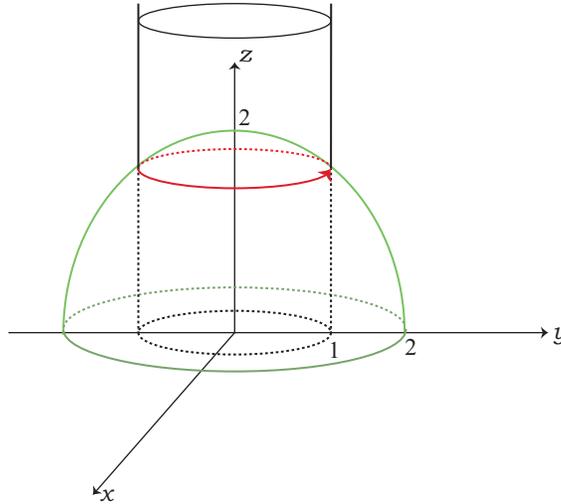
$$\begin{aligned} \int_C p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right) &= \iint_U \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right] dudv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - p \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv \\ &= \iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv \end{aligned}$$

Recordando que $p(u, v) = P(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint_U \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) dudv = \\ &= \iint_U \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial v} \right) \frac{\partial X}{\partial u} \right] dudv \\ &= \iint_U \left[\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right] dudv. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 8.0.7. Calcular la circulación del campo de velocidades de un fluido $F(x, y, z) = (\tan^{-1}(x^2), 3x, e^{3z} \tan z)$ a lo largo de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z > 0$.



Apliquemos el teorema de Stokes. Para ello veamos que da el rotor de F :

$$\text{rot}(F) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tan^{-1}(x^2) & 3x & e^{3z} \tan z \end{vmatrix} = (0, 0, 3).$$

La superficie sobre la cual vamos a trabajar es el casquete que resulta de intersectar la media esfera con el cilindro, que admite la siguiente parametrización:

$$\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{4 - r^2}), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El vector normal a la superficie es

$$\Psi_r \wedge \Psi_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -r/\sqrt{4 - r^2} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \cos \theta, \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \sin \theta, r \right).$$

Como la coordenada en z es positiva el vector normal es saliente a la superficie que es la orientación compatible con la orientación dada en la curva.

$$\int_C F \cdot ds = \iint_S \text{rot } F \cdot \mathbf{n} = \iint_D \text{rot } F \cdot (\Psi_r \wedge \Psi_\theta) dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r dr d\theta = 3\pi.$$

Ejemplo 8.0.8 (Ley de Faraday). Una ley básica de la teoría electromagnética es que si $E(t, x, y, z)$ y $B(t, x, y, z)$ representan los campos eléctrico y magnético en el tiempo t , entonces

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

donde $\text{rot } \mathbf{E}$ se calcula manteniendo \mathbf{t} fijo. Esta es una de las ecuaciones de Maxwell.

Usemos el teorema de Stokes para determinar lo que esto significa físicamente. Supongamos que S es una superficie a la que se aplica el teorema de Stokes. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

(La última igualdad se puede justificar si \mathbf{B} es de clase C^1). Así, obtenemos

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Esta igualdad se conoce como ley de Faraday. La cantidad $\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ representa el voltaje alrededor de ∂S . Además, $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ se llama flujo de \mathbf{B} , o flujo magnético. Si ∂S representa un cable, la ley de Faraday dice que el voltaje inducido en el cable es directamente proporcional a la rapidez con la que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera que tiene por borde a dicho cable.

Ejemplo 8.0.9 (Ley de Ampère). La circulación de un campo magnético a lo largo de una línea cerrada es proporcional a la intensidad neta que atraviesa el área limitada por dicha línea.

Si \mathbf{J} densidad de corriente eléctrica, \mathbf{B} campo magnético inducido y S superficie con borde C , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \text{circulación del campo magnético alrededor de } C, \\ I &= \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \text{corriente total que atraviesa } S, \end{aligned}$$

la ley de Ampère dice que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I,$$

donde μ_0 es la constante de permeabilidad magnética del vacío.

Una de las ecuaciones de Maxwell establece que

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Veamos como deducir la ley de Ampère de esta ecuación, usando el teorema de Stokes.

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I.$$

Teorema 8.0.14. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo C^1 , donde U es simplemente conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\int_C \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = 0$, para toda curva cerrada simple contenida en U
2. El campo \mathbf{X} es de gradientes, es decir, existe $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , tal que $\nabla f = \mathbf{X}$.
3. \mathbf{X} es un campo irrotacional, es decir, $\text{rot } \mathbf{X} = 0$.

Demostración. 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3), ya lo sabemos. Sólo falta probar que 3) \Rightarrow 1).

Sea C curva cerrada simple contenida en U , como U es simplemente conexo existe una superficie S contenida en U con borde C . Por lo tanto, aplicando el teorema de Sotokes, concluimos que

$$\int_C \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot } \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

□

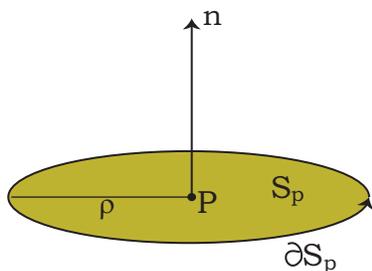
8.1. Interpretación intrínseca del rotor

Existe una fórmula intrínseca del rotacional, que en ocasiones se usa como definición del rotor. Dicha fórmula es:

$$\mathbf{n}(P) \cdot \text{rot } \mathbf{X}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Area } S_\rho} \int_{C_\rho} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s},$$

donde S_ρ y C_ρ son una superficie que contiene al punto P y su frontera respectivamente.

Consideremos un punto P y un vector unitario \mathbf{n} . Denotemos por S_ρ el disco de radio ρ y centro P , el cual es perpendicular a \mathbf{n} .



Por el teorema de Stokes:

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S_\rho} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s},$$

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por \mathbf{n} . No es difícil mostrar que existe un punto Q en S_ρ tal que

$$\iint_{S_\rho} \text{rot } \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} dS = [\text{rot } \mathbf{X}(Q) \cdot \mathbf{n}(Q)] A(S_\rho)$$

(éste es el teorema del valor medio para integrales). Entonces

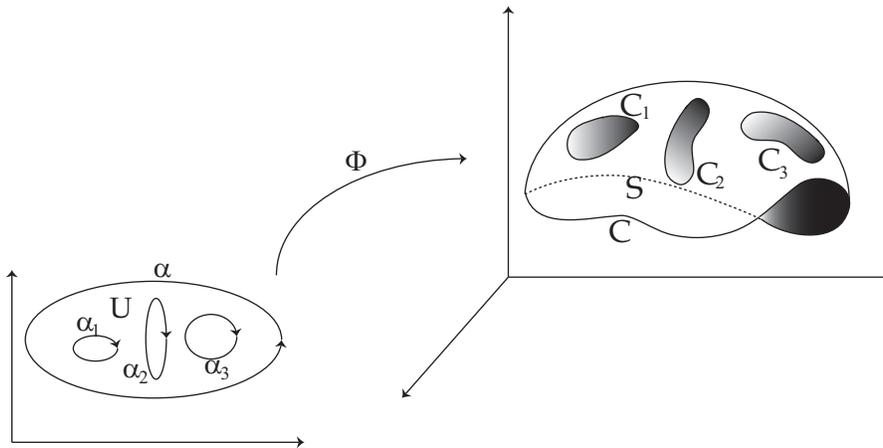
$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{rot} \mathbf{X}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{Q}) \\ &= \operatorname{rot} \mathbf{X}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$\operatorname{rot} \mathbf{X}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{P}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}.$$

8.2. Aplicaciones del teorema de Stokes

El teorema de Stokes puede extenderse a regiones regulares simples más generales. Si \mathbf{U} es una región múltiplemente conexa (con un número finito de agujeros) y $\Phi: \mathbf{U} \rightarrow S$ es una parametrización. Entonces S tendrá la misma cantidad de agujeros.

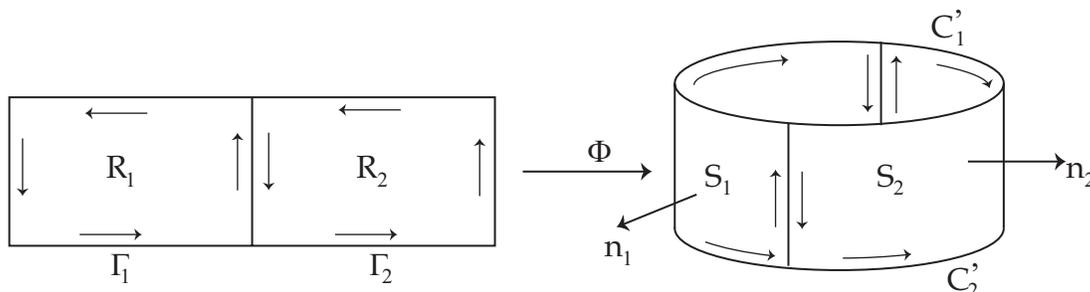


Siguiendo el mismo razonamiento usado en la demostración del teorema de Stokes, pero aplicando el teorema de Green generalizado, la suma de las integrales sobre las componentes frontera de la superficie con los signos adecuados (dependiendo de la orientación de la superficie), tomadas sobre las imágenes de las curvas que forman parte de la frontera de \mathbf{U} coincide con la integral sobre la superficie del rotor del campo. Por ejemplo, si \mathbf{U} tiene frontera como se muestra en la figura y las curvas se recorren en el sentido que se ilustra, donde la parametrización Φ es compatible con la orientación de S , la identidad del teorema de Stokes toma la forma

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_1} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_3} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{s}.$$

Consideremos superficies regulares no simples y veamos como aplicar el teorema de Stokes en ellas.

Consideremos primero el cilindro dibujado en la siguiente figura.



Es la reunión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 imágenes de dos rectángulos adyacentes R_1 y R_2 a través de las aplicaciones Φ_1 y Φ_2 , respectivamente. Si γ_1 describe la frontera Γ_1 de R_1 positivamente orientada y γ_2 la frontera Γ_2 de R_2 también orientada positivamente, las funciones ρ_1 y ρ_2 definidas por

$$\rho_1(t) = \Phi_1(\gamma_1(t)), \quad \rho_2(t) = \Phi_2(\gamma_2(t)),$$

describen las imágenes C_1 y C_2 , de Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Si aplicamos el teorema de Stokes a S_1 y a S_2 y sumamos las dos identidades obtenemos:

$$\iint_{S_1} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_1} X \cdot ds + \int_{C_2} X \cdot ds. \quad (8.1)$$

Representemos con Φ la aplicación de $R_1 \cup R_2$ que coincide con Φ_1 en R_1 y con Φ_2 en R_2 . Por consiguiente, la suma de las integrales de superficie del primer miembro de 8.1 es igual a

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S}.$$

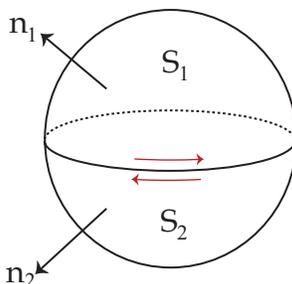
En este ejemplo, las representaciones Φ_1 y Φ_2 pueden elegirse de modo que ρ_1 y ρ_2 determinen direcciones opuestas en cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$, como indican las flechas en la figura. Las dos integrales de línea del segundo miembro de 8.1 pueden reemplazarse por una suma de integrales de línea a lo largo de las dos circunferencias C_1' y C_2' que forman el borde superior e inferior de $S_1 \cup S_2$, puesto que las integrales de línea a lo largo de cada arco de la intersección $C_1 \cap C_2$ se cancelan. Por lo tanto, la ecuación 8.1 puede escribirse como

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_1'} X \cdot ds + \int_{C_2'} X \cdot ds. \quad (8.2)$$

Las dos circunferencias C_1' y C_2' forman la frontera completa de $S_1 \cup S_2$. La ecuación 8.2 expresa la integral de superficie de $\text{rot } X$ sobre $S_1 \cup S_2$ como una integral de línea sobre

la frontera completa de $S_1 \cup S_2$. Esa ecuación es la extensión del teorema de Stokes a un cilindro.

Otra superficie orientable es la esfera dibujada en la siguiente figura.



Es la unión de dos superficies paramétricas simples (hemisferios) S_1 y S_2 , que pueden considerarse imágenes de un disco circular del plano xy a través de las aplicaciones Φ_1 y Φ_2 , respectivamente. Damos a Ψ , ρ_1 , ρ_2 , C_1 , C_2 con el mismo significado que en el ejemplo anterior. En este caso las curvas C_1 y C_2 están identificadas por la aplicación Φ (coinciden a lo largo del ecuador), y la superficie $S_1 \cup S_2$ se llama **cerrada**. Además, N_1 (orientación de S_1) y N_2 (orientación de S_2) pueden elegirse de modo que las direcciones determinadas por ρ_1 y ρ_2 sean opuestas en C_1 y C_2 , como se indica con flechas en la figura. (Esto ocurre porque $S_1 \cup S_2$ es orientable). Si aplicamos el teorema de Stokes a cada hemisferio y sumamos los resultados obtenemos la ecuación 8.1, como antes. Las normales N_1 y N_2 coinciden en la intersección $C_1 \cap C_2$, y podemos reunir las integrales sobre S_1 y S_2 en una sobre toda la esfera.

Las dos integrales de línea del segundo miembro de 8.1 se cancelan, y nos queda la fórmula

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Este resultado es válido para toda superficie cerrada orientable.

Divergencia y campos solenoidales

9.1. Divergencia

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente en una superficie que encierra un fluido.

Si el volumen elegido solamente contiene fuentes o sumideros su divergencia es siempre distinta de cero.

La divergencia de un campo vectorial en un punto es un campo escalar, que se puede definir como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen conforme el volumen alrededor del punto tiende a cero.

Definición 9.1.1. Sea $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Definimos la **divergencia** de X como el campo escalar $\operatorname{div} X : U \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

siendo $X = (P, Q, R)$.

Notación: $\operatorname{div} X = \nabla \cdot X$.

Propiedades

1. $\operatorname{div}(aX + bY) = a \operatorname{div} X + b \operatorname{div} Y$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \nabla f \cdot X$, f campo escalar de clase C^1 .
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$ si X es de clase C^2 .

Demostración. 1. $\operatorname{div}(aX + bY) = \nabla \cdot (aX + bY) = a\nabla \cdot X + b\nabla \cdot Y = a \operatorname{div} X + b \operatorname{div} Y$.

$$\begin{aligned} 2. \operatorname{div}(fX) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) = f_x P + f \frac{\partial P}{\partial x} + f_y Q + f \frac{\partial Q}{\partial y} + f_z R + f \frac{\partial R}{\partial z} = \\ &= (f_x P + f_y Q + f_z R) + f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \nabla f \cdot X + f \operatorname{div} X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) &= \nabla \cdot \nabla \wedge X = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0, \text{ porque } X \text{ es de clase } C^2.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 9.1.1. Sea el campo vectorial $X(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, z)$, hallar su divergencia.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y} (e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial z} (z) \\
&= e^x \sin y - e^x \sin y + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Interpretación física de la divergencia

Si X representa el campo de velocidades de un fluido en movimiento entonces la divergencia de X en un punto P de coordenadas (x, y, z) dice que:

1. El fluido tiende a alejarse del punto P si: $\operatorname{div} X(x, y, z) > 0$.
2. El fluido tiende a acumularse alrededor del punto P si: $\operatorname{div} X(x, y, z) < 0$.

9.2. Campos solenoidales

Definición 9.2.1. Un campo vectorial $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 es **solenoidal** si $\operatorname{div} X = 0$.

Ejemplo 9.2.1. Probar que cualquier campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (f(y, z), g(x, z), h(x, y))$$

es solenoidal.

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (f(y, z)) + \frac{\partial}{\partial y} (g(x, z)) + \frac{\partial}{\partial z} (h(x, y)) = 0.$$

Al estudiar el gradiente de un campo escalar vimos criterios que permiten determinar si un campo vectorial es o no un gradientes. Consideramos ahora la pregunta análoga relativa al rotor de un campo vectorial. Dado un campo vectorial Y , ¿hay un campo X tal que $\operatorname{rot} X = Y$?

Supongamos que $Y = (P, Q, R)$ y $X = (L, M, N)$. Para resolver la ecuación $\operatorname{rot} X = Y$ tenemos que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R \quad (9.1)$$

en las que P, Q y R son conocidas y L, M, N son las funciones incógnitas.

No siempre es posible resolver tal sistema. Por ejemplo, demostramos en la sección 9.1 que la divergencia de un rotor es siempre cero. Por tanto, para que el sistema 9.1 tenga solución en un cierto conjunto abierto S es necesario que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad (9.2)$$

en todo S . Esta condición es también suficiente si restringimos convenientemente el conjunto S en el que se verifica 9.2.

Definición 9.2.2. Sea $Y : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, decimos que $X : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un **potencial vectorial** de Y si:

$$\text{rot } X = Y.$$

Teorema 9.2.3. Si $Y : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 , entonces existe un campo vectorial X tal que $\text{rot } X = Y$ si y sólo si Y es solenoidal (es decir si $\text{div } Y = 0$ en todo \mathbb{R}^3).

Demostración. La necesidad de la condición $\text{div } Y = 0$ ha sido ya establecida, puesto que la divergencia de un rotor siempre es cero. Para probar la suficiencia tenemos que encontrar tres funciones L , M y N que satisfagan las tres ecuaciones 9.1. Intentemos resolver el problema tomando $L = 0$. Entonces la segunda y tercera ecuaciones 9.1 se transforman en

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -Q, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = R.$$

Entonces

$$N(x, y, z) = - \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt + f(y, z)$$

y

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt + g(y, z)$$

donde cada integración se efectúa a lo largo de un segmento rectilíneo y las “constantes de integración” $f(y, z)$ y $g(y, z)$ son independientes de x .

Para hallar una solución supongamos $f(y, z) = 0$. La primera ecuación de 9.1 exige

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P \quad (9.3)$$

Según la elección de M y N tenemos

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt - \frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z}. \quad (9.4)$$

Intercambiando las operaciones de derivación parcial e integración tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} Q(t, y, z) dt$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial z} R(t, y, z) dt$$

Con ello la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x \left[-\frac{\partial}{\partial y} Q(t, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} R(t, y, z) \right] dt - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Como la divergencia es cero, tenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} P(t, y, z) dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Por consiguiente, 9.3 se verifica si elegimos g de modo que $\frac{\partial g}{\partial z} = -P(x_0, y, z)$. Así, por ejemplo, podemos tomar

$$g(y, z) = - \int_{z_0}^z P(x_0, y, u) du.$$

Este razonamiento nos lleva a considerar el campo vectorial $X = (L, M, N)$, donde $L(x, y, z) = 0$ y

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^x R(t, y, z) dt - \int_{z_0}^z P(x_0, y, u) du, \quad N(x, y, z) = - \int_{x_0}^x Q(t, y, z) dt$$

□

Observar que la demostración anterior no sólo establece la existencia de un campo vectorial X cuyo rotor es Y , sino que también proporciona un método directo para determinar X por medio de integrales calculadas con las componentes de Y .

Para una Y dada, el campo vectorial X que hemos construido no es la única solución de la ecuación $\text{rot } X = Y$. Si sumamos a X cualquier gradiente derivable ∇f obtenemos otra solución ya que

$$\text{rot}(X + \nabla f) = \text{rot } X + \text{rot}(\nabla f) = \text{rot } X = Y,$$

puesto que $\text{rot}(\nabla f) = 0$. Además, es fácil demostrar que todas las soluciones de clase C^2 deben ser de la forma $X + \nabla f$. En realidad, si Z es otra solución, entonces $\text{rot } Z = \text{rot } X$, de manera que $\text{rot}(Z - X) = 0$. Entonces $Z - X = \nabla f$ para algún gradiente de clase C^2 . Luego $Z = X + \nabla f$, como se afirmó.

Ejemplo 9.2.2. Averiguar si existe potencial vector Y de $X = (x - 1, -y, 2x)$ con $Y = (L, M, N)$ tal que

- $L \equiv 0$.
- $M(1, y, z) = 1 + y^2 + z$.
- $N(1, 0, z) = e^z$.

$$\operatorname{div} Y = (x-1)_x + (-y)_y + (2x)_z = 0,$$

entonces existe un potencial vector, pero no sabemos si hay uno que verifique todas las restricciones pedidas.

Veamos cuales son las ecuaciones que tienen que satisfacerse.

$$\begin{cases} N_y - M_z = x - 1 \\ -N_x = -y \\ M_x = 2x \end{cases}$$

$$M(x, y, z) - M(1, y, z) = \int_1^x M_x(t, y, z) dt = \int_1^x 2t dt. \text{ Entonces}$$

$$M(x, y, z) = 1 + y^2 + z + x^2 - 1 = x^2 + y^2 + z.$$

$$N(x, y, z) - N(1, y, z) = \int_1^x N_x(t, y, z) dt = \int_1^x y dt. \text{ Entonces}$$

$$N(x, y, z) = N(1, y, z) + yx - y.$$

$$N_y - M_z = x - 1, \text{ entonces } N_y(1, y, z) = 1.$$

$$N(1, y, z) - N(1, 0, z) = \int_0^y N_y(1, t, z) dt, \text{ entonces } N(1, y, z) = N(1, 0, z) + y = e^z + y.$$

De donde concluimos que

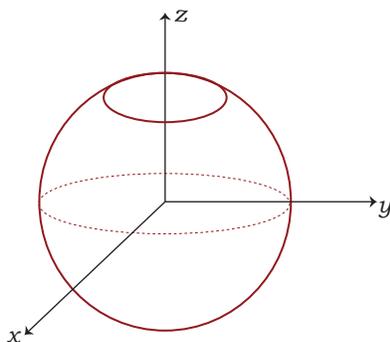
$$N(x, y, z) = e^z + y + yx - y = e^z + yx.$$

Ejemplo 9.2.3 (Un campo vectorial solenoidal que no es un rotor). . Sea D la región de \mathbb{R}^3 exterior a la esfera de centro en el origen y radio $a > 0$. Sea $E(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$.

Es fácil comprobar que $\operatorname{div} E = 0$ en todo D .

Usaremos el teorema de Stokes para demostrar que V no es un rotacional en D . Para ello supongamos que existe un campo vectorial X tal que $E = \operatorname{rot} X$ en D y llegamos a una contradicción. Según el teorema de Stokes podemos escribir

$$\iint_S \operatorname{rot} X \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} X \cdot ds,$$



donde S y C son la superficie y la curva dibujada en la figura anterior. Para construir S , tomamos una superficie esférica de radio R concéntrica con la frontera de D , siendo $a < R$, y quitamos un pequeño casquete polar como se indica en la figura. La parte que queda es la superficie S . La curva C es el borde circular dibujado. Representemos con \mathbf{n} la normal unitaria exterior a S , de modo que $\mathbf{n} = \vec{r}/r$. Puesto que $\text{rot } X = E = \vec{r}/r^3$, tenemos

$$\text{rot } X \cdot \mathbf{n} = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

Sobre la superficie S este producto tiene el valor constante $1/R^2$. Por lo tanto, tenemos,

$$\iint_S \text{rot } X \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{rot } X \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{R^2} \iint_S dS = \frac{\text{área de } S}{R^2}.$$

Cuando el casquete polar degenera en un punto el área de S tiende a $4\pi R^2$ (área de toda la esfera) y por consiguiente, el valor de la integral de superficie tiende a 4π .

Examinemos ahora la integral de línea. Recordar que tenemos la siguiente propiedad para toda integral de línea.

$$\left| \int_C X \cdot ds \right| \leq M(\text{longitud de } C)$$

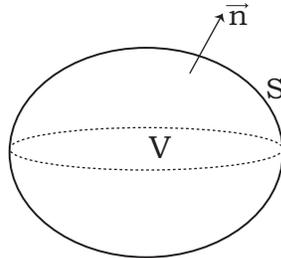
donde M es el máximo de $\|X\|$ en C . Por consiguiente, al reducir el casquete polar a un punto, la longitud de C y el valor de la integral de línea tienden ambos a cero. Llegamos así a una contradicción; la integral de superficie tiende a 4π , y la correspondiente integral de línea a la que es igual tiende a 0. Luego no puede existir en la región D un campo X cuyo rotor sea E .

Teorema de Gauss

El teorema de Stokes expresa una relación entre una integral extendida a una superficie y una integral de línea tomada sobre la curva o curvas que constituyen la frontera de tal superficie. El teorema de Gauss da una relación entre una integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido. Este teorema asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Se trata de un resultado paralelo al teorema de Stokes y al de Green, en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con una integral sobre una región contenida (superficie o volumen).

10.1. Teorema de Gauss

Teorema 10.1.1 (Teorema de la divergencia de Gauss). *Sea V un sólido en \mathbb{R}^3 limitado por una superficie orientable S con orientación dada por la normal unitaria \vec{n} exterior a S .*



Si X es un campo vectorial de clase C^1 en un abierto que contiene a $V \cup S$ entonces tenemos

$$\iiint_V \operatorname{div}(X) dV = \iint_S X \cdot dS. \quad (10.1)$$

Si expresamos X y n en función de sus componentes $X = (P, Q, R)$ y $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, la ecuación 10.1 puede entonces ponerse en la forma:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (Pn_1 + Qn_2 + Rn_3) dS. \quad (10.2)$$

Demostración. Bastará establecer las tres ecuaciones

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P n_1 dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q n_2 dS,$$

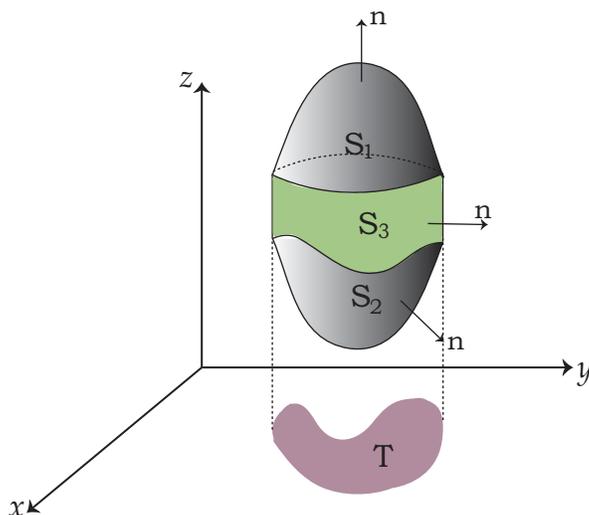
$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R n_3 dS.$$

y sumar los resultados para obtener 10.2. Comenzamos por la tercera de esas fórmulas y la demostramos para sólidos de tipo especial.

Supongamos que V es un conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen una relación de la forma

$$g(x, y) \leq z \leq f(x, y) \quad \text{para } (x, y) \text{ en } T,$$

siendo T una región conexa del plano xy , f y g funciones continuas en T tales que $g(x, y) \leq f(x, y)$ para cada punto (x, y) en T . Geométricamente, esto significa que T es la proyección de V en el plano xy . Toda recta paralela al eje z que atravesase T corta al sólido V a lo largo de un segmento rectilíneo que une la superficie $z = g(x, y)$ a la $z = f(x, y)$. La superficie frontera S consta de un casquete superior S_1 , dado en la forma explícita $z = f(x, y)$, otro inferior S_2 dado por $z = g(x, y)$; y en algunos casos por una porción de cilindro S_3 generado por una recta que se mueve a lo largo de la frontera de T manteniéndose paralela al eje z . La normal exterior a S tiene componente z no negativa en S_1 y no positiva en S_2 y es paralela al plano xy en S_3 . Los sólidos de este tipo se llaman “proyectables- xy ”. (En la siguiente figura se muestra un ejemplo.)



En él se incluyen todos los sólidos convexos (por ejemplo, esferas, elipsoides, cubos) y otros muchos que no son convexos (por ejemplo, el toro con eje paralelo al z). La idea de la demostración es sencilla. Expresamos la integral triple como una doble extendida a la

proyección T . Entonces demostramos que esta integral doble tiene el mismo valor que la integral de superficie citada en el enunciado. Comencemos con la fórmula

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy.$$

La integral unidimensional respecto a z puede calcularse mediante el segundo teorema fundamental del cálculo, dándonos

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_T [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy.$$

Para la integral de superficie podemos escribir:

$$\iint_S R n_3 dS = \iint_{S_1} R n_3 dS + \iint_{S_2} R n_3 dS + \iint_{S_3} R n_3 dS$$

Sobre S_3 la normal \mathbf{n} es paralela al plano xy , de modo que $n_3 = 0$ y la integral sobre S_3 es nula. Sobre la superficie S_1 usamos la parametrización

$$\Psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

y sobre S_2

$$\Psi(x, y) = (x, y, g(x, y)).$$

Entonces, como la normal a S_1 tiene la misma dirección que el vector unitario definido por la parametrización:

$$\iint_{S_1} R n_3 dS = \iint_T R[x, y, f(x, y)] dx dy$$

Como en S_2 la normal es opuesta a la dirección definida por la parametrización se tiene que

$$\iint_{S_2} R n_3 dS = - \iint_T R[x, y, g(x, y)] dx dy.$$

Por lo tanto

$$\iint_S R n_3 dS = \iint_T (R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]) dx dy.$$

Lo cual termina de demostrar que

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R n_3 dS.$$

En la demostración anterior la hipótesis de que V es proyectable- xy nos permite expresar la integral triple extendida a V como una integral doble sobre su proyección T sobre el plano xy . Es evidente que si V es proyectable- yz podemos razonar del mismo modo y demostrar la identidad

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q n_2 dS,$$

y si V es proyectable- xz obtenemos

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P n_1 dS.$$

Así vemos que el teorema de la divergencia es válido para todos los sólidos proyectables sobre los tres planos coordenados; en particular, para todo sólido convexo. \square

Ejemplo 10.1.1. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y $X(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$. Se tiene:

$$\iint_S X \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div}(X) dV = \iiint_V (2 + 2y + 2z) dV.$$

Considerando coordenadas esféricas: $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$ y recordando que el jacobiano es $-r^2 \sin \phi$ tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_S X \cdot dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 + 2r \sin \theta \cos \phi + 2r \sin \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 \sin \theta \cos \phi \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^3 \sin^2 \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.1.2. Usar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS,$$

donde W es la bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Para poder aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, debemos hallar algún campo vectorial

$$X = (P, Q, R)$$

en W con

$$X \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z.$$

En cualquier punto $(x, y, z) \in \partial W$, la normal unitaria exterior \mathbf{n} a ∂W es

$$\mathbf{n} = (x, y, z)$$

pues en ∂W , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el radio vector $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es normal a la esfera ∂W . Por lo tanto, si X es el campo vectorial deseado, entonces

$$X \cdot \mathbf{n} = Px + Qy + Rz.$$

Hacemos

$$Px = x^2, \quad Qy = y, \quad Rz = z$$

y resolvemos para P, Q y R para hallar que

$$X = (x, 1, 1).$$

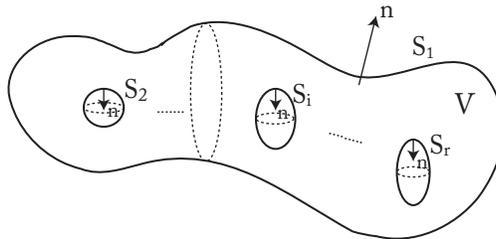
Calculando $\text{div } X$ obtenemos

$$\text{div } X = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Así, por el teorema de la divergencia de Gauss

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z) dS = \iiint_W dV = V(W) = \frac{4}{3}\pi.$$

Al igual que en Green podemos probar la generalización del teorema de Gauss a volúmenes con más de una componente frontera. Si todas ellas tienen normal saliente al volumen, como se muestra en la siguiente figura



y $X : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 entonces

$$\iiint_V \text{div } X dV = \sum_{i=1}^r \iint_{S_i} X \cdot dS.$$

Donde V es el volumen comprendido entre las superficies S_1, S_2, \dots, S_r .

10.2. Ley de Gauss del electromagnetismo

Recordemos que el campo eléctrico generado por una carga viene dado por

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

La ley de Gauss afirma que el flujo de E a través de cualquier superficie cerrada que “encierre” a q es igual a $\frac{q}{\epsilon_0}$.

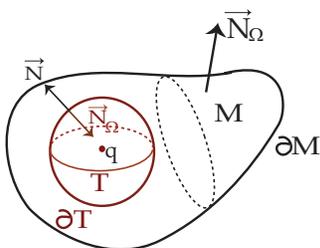
Para probar esta afirmación comencemos con probar que E es solenoidal ($\operatorname{div} E = 0$) en todo $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial x} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2), \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2), \\ \frac{\partial Z}{\partial z} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{div} E &= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Sean M y T como se muestra en la siguiente figura



Queremos probar que $\iint_{\partial M} E \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial T} E \cdot d\mathbf{S}$. Sea Ω la región entre M y T entonces Ω tiene frontera $\partial M \cup \partial T = S$. Pero la orientación en ∂T inducida por la normal exterior en Ω es opuesta a la obtenida a partir de \vec{n} . Entonces aplicando el teorema de Gauss tenemos que

$$\iint_{\partial M} E \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\partial T} E \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} E dV = 0.$$

Entonces el flujo no depende de la superficie. Además, en el ejemplo 7.2.5 hallamos que

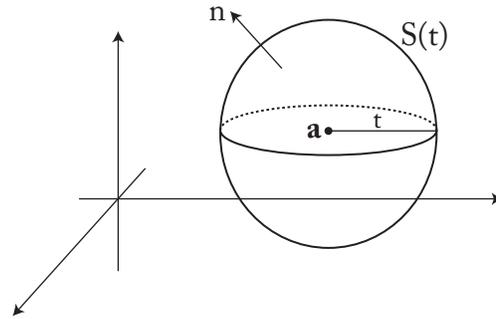
$$\iint_{\partial T} E \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

De estos dos resultados deducimos la ley de Gauss.

10.3. Interpretación intrínseca de la divergencia

Sea $S(t)$ una esfera de radio $t > 0$ con centro en el punto \mathbf{a} de \mathbb{R}^3 , y representemos con $V(t)$ el volumen delimitado por $S(t)$. Consideremos X un campo vectorial de clase C^1 en

$V(t)$.



Entonces tenemos

$$\operatorname{div} X(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(V(t))} \iint_{S(t)} X \cdot d\mathbf{S}.$$

Veamos como se deduce esta igualdad.

Sea $f = \operatorname{div} X$. Si $\varepsilon > 0$ tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\left| f(\mathbf{a}) - \frac{1}{\operatorname{vol}(V(t))} \iint_{S(t)} X \cdot d\mathbf{S} \right| < \varepsilon \text{ si } 0 < t < \delta.$$

Puesto que f es continua en \mathbf{a} dado ε existe una esfera $B(\mathbf{a}, \delta)$ tal que

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$.

Por consiguiente, si escribimos $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{x}) + [f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})]$ e integramos ambos miembros de esta ecuación sobre la esfera $V(t)$ de radio $t < \varepsilon$, encontramos

$$f(\mathbf{a}) \operatorname{vol} V(t) = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}) dx dy dz + \iiint_{V(t)} [f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})] dx dy dz.$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia a la primera integral triple del segundo miembro y pasamos este término al primer miembro, obtenemos la relación,

$$\left| f(\mathbf{a}) \operatorname{vol} V(t) - \iint_{S(t)} X \cdot d\mathbf{S} \right| \leq \iiint_{V(t)} |f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})| dx dy dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{vol} V(t) < \varepsilon \operatorname{vol} V(t).$$

Cuando dividimos esta desigualdad por $\operatorname{vol} V(t)$ vemos que la igualdad que queríamos es cierta.

En la demostración anterior no hacemos uso especial del hecho de que $V(t)$ fuese una esfera. El mismo teorema subsiste si, en lugar de esferas, utilizamos cualquier conjunto de sólidos $V(t)$ para los que el teorema de la divergencia es válido, con tal que esos sólidos tiendan hacia \mathbf{a} cuando $t \rightarrow 0$. Por ejemplo, cada $V(t)$ podría ser un cubo inscrito en una esfera de radio t en torno de \mathbf{a} ; se aplicaría exactamente la misma demostración.

Ecuaciones de Maxwell

Maxwell unificó las leyes de

- Gauss.
- Coulomb.
- Faraday.
- Lenz
- Modificó la ley de Ampère agregando la corriente de desplazamiento.

Las ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos. La forma de estas ecuaciones depende de las unidades físicas que se utilicen. Consideremos el sistema en el que las ecuaciones de Maxwell sean lo más sencillas posibles.

Sean E y H funciones C^1 en (t, x, y, z) los campos eléctrico y magnético, respectivamente. Van a satisfacer (por definición) las ecuaciones de Maxwell con densidad de carga $\rho(t, x, y, z)$ y densidad de corriente $J(t, x, y, z)$ cuando se cumpla lo siguiente:

$$\nabla \cdot E = \rho \quad (\text{ley de Gauss}),$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (\text{no hay fuentes magnéticas}),$$

$$\nabla \wedge E + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{ley de Faraday}),$$

$$\nabla \wedge H - \frac{\partial E}{\partial t} = J \quad (\text{ley de Ampère}).$$

Ley de Gauss

$$\nabla \cdot E = \rho.$$

Relación entre el campo eléctrico y las cargas eléctricas que lo generan.

Forma integral de la ecuación:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \iiint_V \rho dV.$$

Dice que, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie es igual a la carga encerrada por la superficie.

Ley para campos magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Forma integral de la ecuación:

$$\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{H} dV = 0$$

No existe el equivalente magnético a una carga puntual eléctrica. No existen pozos o fuentes, ninguna superficie encierra un pozo o fuente.

La unidad magnética más pequeña es el dipolo magnético.

Observación 11.0.1. Como $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ tenemos que \mathbf{H} es solenoidal, podemos aplicar el teorema 9.2.3 para concluir que \mathbf{H} tiene un potencial vector, es decir, $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ para algún campo vectorial \mathbf{A} . (Estamos suponiendo que \mathbf{H} está definido en todo \mathbb{R}^3 para cada tiempo t .) Este campo vectorial \mathbf{A} no es único, y podemos usar igualmente $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ para cualquier función $f(t, x, y, z)$ pues $\nabla \wedge \nabla f = 0$. (Esta libertad en la selección de \mathbf{A} se llama libertad de recalibración.)

Ley de Faraday

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Esta ley nos dice que el sentido de la corriente inducida compensa la variación de flujo magnético.

Forma integral de la ecuación:

$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}.$$

El voltaje inducido en un circuito cerrado es proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético a través de una superficie bordeada por el circuito.

Observación 11.0.2. La existencia de un campo magnético que varía en el tiempo implica la existencia de un campo eléctrico.

Observación 11.0.3. Si \mathbf{H} no depende del tiempo entonces $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, por lo tanto \mathbf{E} es conservativo y tiene un potencial

$$\mathbf{E} = \nabla f$$

donde f es el potencial eléctrico.

Ley de Ampère

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}.$$

Los campos magnéticos pueden ser generados de dos maneras:

- por corriente eléctrica (ley de Ampère original),
- por variación temporal en el campo eléctrico (corrección de Maxwell).

Forma integral de la ley de Ampère:

$$\int_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Ecuaciones de Maxwell en el vacío

- $\rho = 0$ carga eléctrica.
- $\mathbf{J} = 0$, densidad de corriente.

Por lo tanto, las ecuaciones en el vacío quedan:

$$\text{Ley de Gauss: } \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

$$\text{Ley de Gauss para magnetismo: } \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

$$\text{Ley de Faraday: } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

$$\text{Ley de Ampère: } \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Observación 11.0.4. ▪ Un cambio en el campo magnético genera un campo eléctrico.

- Un cambio en el campo eléctrico genera un campo magnético.

Formas diferenciales

La teoría de las formas diferenciales proporciona una manera conveniente y elegante de expresar los teoremas de Green, Stokes y Gauss. De hecho, el uso de formas diferenciales muestra que todos estos teoremas son manifestaciones de una sola teoría matemática subyacente y proporciona el lenguaje necesario para generalizarlos a cualquier dimensión. Como nuestro objetivo principal es mostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss se pueden unificar bajo un solo teorema introduciremos formas de manera puramente axiomática y no constructiva, evadiendo así la tremenda cantidad de preliminares algebraicos formales que por lo general se requieren para su construcción.

Comenzaremos introduciendo el concepto de 0-forma.

Definición 12.0.5. Sea U un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 . Una **0-forma** en U es una función con valores reales $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ suave ($C^\infty(U)$).

Dadas dos 0-formas f y g en U , podemos sumarlas de la manera usual para obtener una nueva 0-forma $f + g$, o multiplicarlas para obtener la 0-forma $f \cdot g$.

Ejemplo 12.0.1. Sean $f(x, y, z) = xy + yz$ y $g(x, y, z) = y \sin xz$ dos 0-formas en \mathbb{R}^3 . Entonces

$$(f + g)(x, y, z) = xy + yz + y \sin xz$$

y

$$(f \cdot g)(x, y, z) = y^2 x \sin xz + y^2 z \sin xz.$$

Definición 12.0.6. Las **1-formas básicas** son las expresiones dx , dy y dz . En este momento las consideramos sólo símbolos formales. Una **1-forma** ω en un conjunto abierto U es una combinación lineal formal

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

o simplemente

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

donde P , Q y R son funciones suaves con valores reales, definidas en U . Por la expresión Pdx entendemos la 1-forma $Pdx + 0dy + 0dz$ y de manera similar para Qdy y Rdz . Además el orden de Pdx , Qdy y Rdz no tiene importancia, de modo que

$$Pdx + Qdy + Rdz = Rdz + Pdx + Qdy, \text{ etc.}$$

Dadas dos 1-formas $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$ y $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$, podemos sumarlas para obtener una nueva 1-forma $\omega_1 + \omega_2$, definida por

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2)dx + (Q_1 + Q_2)dy + (R_1 + R_2)dz,$$

y dada una 0-forma f , podemos formar la 1-forma $f.\omega_1$ definida por

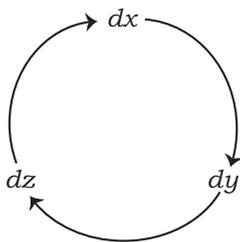
$$f.\omega_1 = (fP_1)dx + f(Q_1)dy + (fR_1)dz.$$

Ejemplo 12.0.2. Sean $\omega_1 = (x+y^2)dx + zydy + e^{xyz}dz$ y $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$ 1-formas. Entonces

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \sin y)dx + (zy + \sin x)dy + e^{xyz}dz.$$

Si $f(x, y, z) = x$, entonces

$$f\omega_2 = x \sin y dx + x \sin x dy.$$



Definición 12.0.7. Las **2-formas básicas** son las expresiones formales $dx dy$, $dy dz$ y $dz dx$. Estas expresiones deben pensarse como los productos de dx y dy , dy y dz , y dz y dx . Una **2-forma** η en U es una expresión formal

$$\eta = F dx dy + G dy dz + H dz dx,$$

donde F , G y H son funciones suaves reales definidas en U . El orden de $F dx dy$, $G dy dz$ y $H dz dx$ no es importante; por ejemplo,

$$F dx dy + G dy dz + H dz dx = H dz dx + F dx dy + G dy dz, \text{ etc.}$$

En este punto es útil notar que en una 2-forma, las 1-formas básicas dx , dy y dz siempre aparecen en pares cíclicos (ver la figura), esto es, $dx dy$, $dy dz$ y $dz dx$. Por analogía con las 0-formas y las 1-formas, podemos sumar dos 2-formas

$$\eta_i = F_i dx dy + G_i dy dz + H_i dz dx,$$

$i = 1, 2$, para obtener una nueva 2-forma,

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2) dx dy + (G_1 + G_2) dy dz + (H_1 + H_2) dz dx.$$

De manera análoga, si f es una 0-forma y si η es una 2-forma, podemos tomar el producto

$$f\eta = (fF) dx dy + (fG) dy dz + (fH) dz dx.$$

Finalmente, por la expresión $F dx dy$ entenderemos la 2-forma $F dx dy + 0 dy dz + 0 dz dx$.

Ejemplo 12.0.3. Si $\eta_1 = x^2 dx dy + y^3 x dy dz + \sin zy dz dx$ y $\eta_2 = y dy dz$. Entonces

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2 dx dy + (y^3 x + y) dy dz + \sin zy dz dx.$$

Si $f(x, y, z) = xy$, entonces

$$f\eta_2 = xy^2 dy dz.$$

Definición 12.0.8. Una **3-forma básica** es una expresión formal $dx dy dz$ (en orden cíclico). Una **3-forma** ν en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ es una expresión de la forma $\nu = f(x, y, z) dx dy dz$, donde f es una función con valores reales definida en U .

Podemos sumar dos 3-formas y multiplicarlas por 0-formas de la manera obvia. Sean $\nu_1 = f_1 dx dy dz$ y $\nu_2 = f_2 dx dy dz$, entonces

$$\nu_1 + \nu_2 = (f_1 + f_2) dx dy dz.$$

Si $\nu = f dx dy dz$ y g una-forma, entonces

$$g\nu = g f dx dy dz.$$

Ejemplo 12.0.4. Sean $\nu_1 = y dx dy dz$ y $\nu_2 = e^{x^2} dx dy dz$, entonces

$$\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2}) dx dy dz.$$

Si $f(x, y, z) = xyz$, entonces

$$f\nu_1 = xy^2 z dx dy dz.$$

Notación: $\Omega^k(U)$ es el conjunto de k -formas definidas en el abierto U . Con las operaciones vistas anteriormente podemos probar que este conjunto tiene estructura de espacio vectorial sobre los reales, donde pensamos a los escalares como funciones constantes.

Ahora que hemos definido estos objetos formales (formas), resulta válido preguntarnos para qué sirven, cómo se usan y, quizá lo más importante, qué significan. Veamos como usarlas e interpretarlas.

Una función con valores reales definida en un dominio U en \mathbb{R}^3 es una regla que asigna a cada punto en U un número real. Las formas diferenciales son, en cierto sentido, generalizaciones de las funciones con valores reales que hemos estudiado en cálculo. De hecho, las 0-formas en un conjunto abierto U son simplemente funciones en U . Así, una 0-forma f manda puntos de U a números reales. Preferimos interpretar las k -formas diferenciales (para $k \geq 1$), no como funciones definidas en puntos de U , sino como funciones definidas en objetos geométricos tales como curvas y superficies. Muchos de los antiguos geómetras griegos consideraron a las rectas y curvas formadas por infinidad de puntos, y a los planos y superficies formados por infinidad de curvas. En consecuencia hay al menos cierta justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales. Dado un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, distinguiremos cuatro tipos de subconjuntos de U :

- (i) puntos en U ,

- (ii) curvas simples orientadas y curvas cerradas simples orientadas en U ,
- (iii) superficies orientadas $S \subset U$
- (iv) subregiones elementales de U .

12.1. Integrales de formas

12.1.1. Integrales de 1-formas

Definición 12.1.1. Sea $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ una 1-forma en U y sea C una curva orientada simple en U . Entonces, definimos la **integral de ω sobre C** como

$$\int_C \omega = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Ejemplo 12.1.1. Sea $\omega = xydx + y^2dy + dz$ y C la curva parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$. Hallar $\int_C \omega$.

$$\int_C \omega = \int_0^1 (t^5 2t + t^6 3t^2) dt = \frac{13}{21}.$$

Así es que podemos pensar que una 1-forma ω asigna a cada curva simple orientada y a cada curva cerrada simple orientada C en \mathbb{R}^3 el número

$$\int_C \omega.$$

12.1.2. Integrales de 2-formas

Una 2-forma η en un conjunto abierto U en \mathbb{R}^3 se puede interpretar de manera análoga como una función que asocia con cada superficie orientada $S \subset U$ un número real. Esto se logra por medio del concepto de integración de 2-formas sobre superficies.

Definición 12.1.2. Sea $\eta = Fdx dy + Gdy dz + Hdz dx$ una 2-forma y S superficie parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Entonces definimos la **integral de la 2-forma η sobre S** como:

$$\begin{aligned} \int_S \eta &= \int_S F dx dy + G dy dz + H dz dx \\ &= \iint_S (G, H, F) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \iint_D F \frac{(X, Y)}{(u, v)} + G \frac{(Y, Z)}{(u, v)} + H \frac{(Z, X)}{(u, v)} du dv \end{aligned}$$

Si S está compuesta por varias superficies paramétricas S_i , $i = 1, \dots, k$, cada una de ellas con parametrización Φ_i , definimos

$$\int_S \eta = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \eta.$$

Ejemplo 12.1.2. Consideremos la 2-forma $\eta = z^2 dx dy$ y la superficie S semiesfera superior de radio 1 en \mathbb{R}^3 . Hallar $\iint_S \eta$.

Sea $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, con $(u, v) \in [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$ una parametrización de S . Entonces

$$\int_S \eta = \iint_D \cos^2 u \frac{(X, Y)}{(u, v)} du dv = \iint_D \cos^3 u \sin u du dv = -2\pi \frac{\cos^4 u}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 12.1.3. Hallar $\int_S x dy dz + y dx dy$, donde S es la superficie orientada descrita por la parametrización $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ donde $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Por definición tenemos que

$$\frac{(Y, Z)}{(u, v)} = 2(u^2 + v^2)$$

$$\frac{(X, Y)}{(u, v)} = -2(u + v)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_S x dy dz + y dx dy &= \iint_D 2(u + v)(u^2 + v^2) - 2(u^2 - v^2)(u + v) du dv \\ &= 4 \iint_D (v^3 + uv^2) du dv = 4 \int_0^1 \int_0^1 (v^3 + uv^2) du dv \\ &= 4 \int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2 v^2}{2} \right]_0^1 dv = 4 \int_0^1 \left(v^3 + \frac{v^2}{2} \right) dv \\ &= \left[v^4 + \frac{2v^3}{3} \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

12.1.3. Integrales de 3-formas

Finalmente podemos interpretar a las 3-formas como funciones en las regiones elementales de U .

Definición 12.1.3. Sea $\nu = f(x, y, z) dx dy dz$ una 3-forma y sea R una región elemental en U . Entonces, definimos la **integral de η sobre R** como

$$\int_R \eta = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Que es simplemente la integral triple ordinaria de f sobre R .

Ejemplo 12.1.4. Sea $\eta = (x + z)dx dy dz$ y $\mathbb{R} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, calcular $\int_{\mathbb{R}} \eta$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \eta &= \iiint_{\mathbb{R}} (x + z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + zx \right] dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z \right) dy dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z \right) dz \\ &= \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

12.2. Producto exterior

Estudiaremos ahora el álgebra (o reglas de multiplicación) de formas, que, junto con la diferenciación de formas, nos permitirán enunciar los teoremas de Green, Stokes y Gauss en términos de formas diferenciales.

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(\mathbf{U}) \times \Omega^l(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^{k+l}(\mathbf{U}) \\ (\omega, \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

Si ω es una k -forma y η es una l -forma en \mathbf{U} , $0 \leq k+l \leq 3$, existe un producto llamado **producto exterior** $\omega \wedge \eta$ que es una $k+l$ -forma en \mathbf{U} . El producto exterior satisface las leyes siguientes:

(i) Para cada k existe una k -forma 0 , cero, con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda k -forma ω y $0 \wedge \eta = 0$ para toda l -forma η si $0 \leq k+l \leq 3$.

(ii) (*Distributividad*) Si f es una 0 -forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

(iii) (*Anticonmutatividad*) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

(iv) (*Asociatividad*) Si ω_1 , ω_2 y ω_3 son k_1 , k_2 y k_3 formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

(v) (*Homogeneidad respecto a funciones*) Si f es una 0 -forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Nótese que las reglas (ii) y (iii) en realidad implican la regla (v).

(vi) Se cumplen las siguientes reglas de multiplicación para 1-formas:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= dx dy, \\ dy \wedge dx &= -dx dy = (-1)(dx \wedge dy), \\ dy \wedge dz &= dy dz = (-1)(dx \wedge dy), \\ dz \wedge dx &= dz dx = (-1)(dx \wedge dz), \end{aligned}$$

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.$$

(vii) Si f es una 0-forma y ω es cualquier k -forma, entonces $f \wedge \omega = f\omega$.

Usando las leyes (i) a la (vii), podemos hallar ahora un producto único de cualquier l -forma η y cualquier k -forma ω , si $0 \leq k + l \leq 3$.

Ejemplo 12.2.1. Mostrar que $dx \wedge dy dz = dx dy dz$.

Por la regla (vi) tenemos que $dy dz = dy \wedge dz$. Por lo tanto

$$dx \wedge dy dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx dy dz.$$

Ejemplo 12.2.2. Sean dx , dy , dz las 1-formas básicas de \mathbb{R}^3 . Entonces:

$$\begin{aligned} (x dx + y^2 dy) \wedge (dx + x dy) &= x dx \wedge dx + x^2 dx \wedge dy + y^2 dy \wedge dx + xy^2 dy \wedge dy \\ &= (x^2 - y^2) dx \wedge dy \\ &= (x^2 - y^2) dx dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dx + dy + dz) \wedge (x dx + z dy) &= x dx \wedge dx + z dx \wedge dy + x dy \wedge dx \\ &\quad + z dy \wedge dy + x dz \wedge dx + z dz \wedge dy \\ &= (z - x) dx \wedge dy + x dz \wedge dx + z dz \wedge dy \\ &= (z - x) dx dy + x dz dx - z dy dz. \end{aligned}$$

Ejemplo 12.2.3. Si $\omega = xdx + ydy$ y $\eta = zydx + xzdy + xydz$, hallar $\omega \wedge \eta$.

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge \eta &= (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz) \\
 &= [(xdx + ydy) \wedge (zydx)] + [(xdx + ydy) \wedge (xzdy)] \\
 &\quad + [(xdx + ydy) \wedge (xydz)] \\
 &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\
 &\quad + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\
 &= -zy^2dxdy + x^2zdxdy - x^2ydzdx + xy^2dydz \\
 &= (x^2z - y^2z)dxdy - x^2ydzdx + xy^2dydz.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 12.2.4. Si $\omega = xdx - ydy$ y $\eta = xdydz + zdx dy$, hallar $\omega \wedge \eta$.

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdx dy) \\
 &= [(xdx - ydy) \wedge (xdydz)] + [(xdx - ydy) \wedge (zdx dy)] \\
 &= (x^2dx \wedge dydz) - (zydy \wedge dydz) + (xzdx \wedge dx dy) - (yzdy \wedge dx dy) \\
 &= [x^2dx \wedge (dy \wedge dy)] - [yzdy \wedge (dy \wedge dz)] \\
 &\quad + [xzdx \wedge (dx \wedge dy)] - [yzdy \wedge (dx \wedge dz)] \\
 &= x^2dxdydz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] \\
 &\quad + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\
 &= x^2dxdydz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\
 &= x^2dxdydz.
 \end{aligned}$$

12.3. Derivada exterior

El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es mostrar cómo diferenciar formas. La derivada de una k -forma es una $(k + 1)$ -forma si $k < 3$ y la derivada de una 3-forma siempre es cero.

Definición 12.3.1.

$$d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

Si ω es una k -forma, denotaremos la **derivada (exterior)** de ω por $d\omega$. La operación d tiene las propiedades siguientes:

1. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una 0-forma, entonces

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

2. (Linealidad) Si ω_1 y ω_2 son k -formas, entonces

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

3. Si ω es una k -forma y η es una l -forma,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta).$$

4. $d(d\omega) = 0$ y $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, o simplemente $d^2 = 0$.

Las propiedades (1) a (4) proporcionan información suficiente para permitirnos diferenciar de manera única cualquier forma.

Ejemplo 12.3.1. Sea $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$ una 1-forma en algún conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Hallar $d\omega$.

$$\begin{aligned} & d[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy] \\ = & d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] && \text{(usando 2)} \\ = & (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] && \text{(usando 3)} \\ = & (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) && \text{(usando 4)} \\ = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy && \text{(usando 1)} \\ = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) \\ = & -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \\ = & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Ejemplo 12.3.2. Si $\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ una 1-forma en algún conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. Hallar $d\omega$.

$$\begin{aligned}
& d[P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] \\
&= d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] + d[R(x, y, z) \wedge dz] \\
&= (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] + (dR \wedge dz) + [R \wedge d(dz)] \\
&= (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) + (dR \wedge dz) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right) + \left(\frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dz \right) \\
&= -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy dz \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz.
\end{aligned}$$

Ejemplo 12.3.3. Sea f una 0-forma. Usando sólo las reglas de diferenciación (1) a (3) y el hecho de que $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, mostrar que $d(df) = 0$.

Por la regla (1):

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

de modo que

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right).$$

Trabajando sólo con el primer término, usando la regla (3), obtenemos

$$\begin{aligned}
 d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} \wedge d(dx) \\
 &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + 0 \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz \wedge dx \\
 &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz dx.
 \end{aligned}$$

De manera análoga hallamos que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Al sumarlos obtenemos $d(df) = 0$ por la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

Ejemplo 12.3.4. Mostrar que $d(dx dy)$, $d(dy dz)$ y $d(dz dx)$ son cero.

Para probar el primer caso, usamos la propiedad (3):

$$d(dx dy) = d(dx \wedge dy) = d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy) = 0.$$

Los otros casos son similares.

Ejemplo 12.3.5. Si $\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$, hallar $d\eta$.

Por la propiedad (2) $d\eta = d(F dx dy) + d(G dy dz) + d(H dz dx)$. Calcularemos $d(F dx dy)$. Usando de nuevo la propiedad (3), obtenemos

$$d(F dx dy) = d(F \wedge dx dy) = dF \wedge (dx dy) + F \wedge d(dx dy) = dF \wedge (dx dy).$$

$$\begin{aligned}
 dF \wedge (dx dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz\right) \wedge (dx \wedge dy) \\
 &= \left[\frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge (dx \wedge dy)\right]
 \end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned}
 dx \wedge (dx \wedge dy) &= (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0 \\
 dy \wedge (dx \wedge dy) &= -dy \wedge (dy \wedge dx) \\
 &= -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0 \\
 dz \wedge (dx \wedge dy) &= (-1)^2(dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(Fdx dy) = \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz.$$

De manera análoga, hallamos que

$$d(Gdy dz) = \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz, \quad d(Hdz dx) = \frac{\partial H}{\partial y} dx dy dz.$$

Por lo tanto

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy dz.$$

12.4. Campos en \mathbb{R}^3

Un **campo** (diferenciable) en un abierto U de \mathbb{R}^3 es una función $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con P, Q, R de clase C^∞ . Llamaremos $\chi(U)$ al conjunto de los campos en U .

Recordar que tenemos las siguientes operaciones entre campos. Si $F, G \in \chi(U)$, definimos $F + G, fG \in \chi(U)$ mediante

$$(F + G)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}), \quad (fG)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Estas operaciones en $\chi(U)$ verifican las mismas propiedades de los espacios vectoriales y $\chi(U)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial de la misma forma que lo es $\Omega^k(U)$.

- Si $f \in C^\infty(U)$, se define su **gradiente** $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \in \chi(U)$.
- Si $F \in \chi(U)$, se define su **rotacional** $\text{rot } F = \nabla \wedge F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \in \chi(U)$.
- Si $F \in \chi(U)$, se define su **divergencia** $\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \in C^\infty(U)$.

Podemos definir los siguientes operadores

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \chi(U) \\ f & \mapsto & \nabla f \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \chi(U) \\ F & \mapsto & \nabla \wedge F \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) \\ F & \mapsto & \nabla \cdot F \end{array}$$

Tenemos formas naturales de ir del espacio de campos al espacio de formas. A continuación presentaremos los mapas que permiten hacer esta asociación. Recordar que notábamos a los campos como $F = (P, Q, R) \in \chi(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\omega_1^0} & \Omega^1(U) \\ F & \mapsto & \omega_1^F = Pdx + Qdy + Rdz \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \chi(U) & \xrightarrow{\omega_2^0} & \Omega^2(U) \\ F & \mapsto & \omega_2^F = Rdx dy + Pdy dz + Qdz dx \end{array},$$

y

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\omega_3^{()}} & \Omega^3(\mathbf{U}) \\ f & \mapsto & \omega_3^f = f dx dy dz. \end{array}$$

Estos mapas son isomorfismos lineales, con las estructuras de \mathbb{R} -espacios vectoriales dadas anteriormente.

Teorema 12.4.1. *Si consideramos los siguientes mapas*

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\nabla} & \chi(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\text{rot}} & \chi(\mathbf{U}) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbf{U}) \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \omega_1^{()} & & \downarrow \omega_2^{()} & & \downarrow \omega_3^{()} \\ \Omega^0(\mathbf{U}) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbf{U}) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbf{U}) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbf{U}) \end{array}$$

Entonces, para todo $f \in C^\infty(\mathbf{U})$ y $F \in \chi(\mathbf{U})$ se verifica

$$df = \omega_1^{\nabla f} = df, \quad d(\omega_1^F) = \omega_2^{\text{rot} F}, \quad d(\omega_2^F) = \omega_3^{\text{div} F}.$$

Corolario 12.4.2. *Usando que $d^2 = 0$ y el teorema anterior concluimos que $\text{rot}(\nabla f) = 0$ y $\text{div}(\text{rot} F) = 0$.*

12.5. Formas cerradas versus formas exactas

Definición 12.5.1. Una k -forma ω se dice **cerrada** si $d\omega = 0$ y se dice **exacta** si existe una $(k-1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$.

Notación: Sea $Z^k(\mathbf{U}) = \{\omega \in \Omega^k(\mathbf{U}) : d\omega = 0\}$ y $B^k(\mathbf{U}) = \{\omega \in \Omega^k(\mathbf{U}) : \exists \eta \in \Omega^{k-1}(\mathbf{U}) \text{ con } d\eta = \omega\}$.

Observación 12.5.2. $B^k(\mathbf{U}) \subset Z^k(\mathbf{U})$.

Sea $\omega \in B^k(\mathbf{U})$, entonces, existe $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbf{U})$ tal que $d\eta = \omega$. Por lo tanto, $d\omega = d(d\eta) = 0$. Entonces $\omega \in Z^k(\mathbf{U})$.

Corolario 12.5.3. *Si $\omega \in \Omega^1(\mathbf{U})$ entonces, por el teorema previo existe $F \in \chi(\mathbf{U})$ tal que $\omega = \omega_1^F$. Si ω es cerrada entonces $0 = d\omega = d(\omega_1^F) = \omega_2^{\text{rot} F}$. Usando que $\omega_2^{()}$ es un isomorfismo tenemos que $\text{rot} F = 0$. Entonces F es irrotacional.*

De igual forma, si $\omega \in \Omega^2(\mathbf{U})$, entonces $\omega = \omega_2^F$ y si esta forma es cerrada tenemos que $0 = d\omega = d(\omega_2^F) = \omega_3^{\text{div} F}$. Entonces $\text{div} F = 0$, es decir, que F es solenoidal.

Corolario 12.5.4. *Veamos que podemos decir de los campos asociados si las formas son exactas. Si $\omega \in \Omega^1(\mathbf{U})$ entonces, $\omega = \omega_1^F$. Además, por ser exacta existe $f \in \Omega^0(\mathbf{U})$ tal que $df = \omega$. Entonces $\omega_1^F = \omega = df = \omega_1^{\nabla f}$, de lo cual deducimos que $F = \nabla f$, es decir, F admite un potencial escalar y es conservativo.*

Si ahora $\omega \in \Omega^2(\mathbf{U})$ entonces, $\omega = \omega_2^F$ y existe $\eta \in \Omega^1(\mathbf{U})$ tal que $d\eta = \omega$. Luego, aplicando el teorema previo, $\omega_2^{\text{rot} G} = d(\omega_1^G) = d\eta = \omega = \omega_2^F$. Entonces, $F = \text{rot} G$, de lo cual concluimos que F admite un potencial vectorial.

Vimos anteriormente que toda forma exacta es cerrada, ahora estudiaremos bajo qué condiciones se cumple el recíproco también, es decir, bajo qué condiciones las formas exactas coinciden con las formas cerradas. Este problema es importante porque es mucho más fácil verificar que una forma es cerrada a que es exacta.

Ejemplo 12.5.1. Sea $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 1)\}$ y $\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \Omega^1(U)$.

ω es cerrada porque $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \subset U$.

Afirmación: ω es exacta en V . Sea $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x, y) = \arctan(y/x)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Entonces $\omega = dg$.

Afirmación: ω no es exacta en U

Supongamos que existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$. Como $V \subset U$ es $\omega = df$ en V , luego $df = dg$ en V , es decir $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ en V .

Sean $V_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ y $V_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ las componentes conexas de V . Entonces, existen constantes c_1, c_2 tales que $f = g + c_2$ en V_+ y $f = g + c_1$ en V_- . Sea $p = (0, b)$, $b > 0$.

$$f(0, b) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, b) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(b/x) + c_2 = \frac{\pi}{2} + c_2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, b) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(b/x) + c_1 = -\frac{\pi}{2} + c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + c_2 = -\frac{\pi}{2} + c_1 \Rightarrow c_2 = c_1 - \pi.$$

Sea $p = (0, c)$, $c < 0$

$$f(0, c) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, c) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan(c/x) + c_2 = -\frac{\pi}{2} + c_2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, c) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan(c/x) + c_1 = \frac{\pi}{2} + c_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + c_2 = \frac{\pi}{2} + c_1 \Rightarrow c_2 = c_1 + \pi.$$

De estas dos igualdades llegamos a una contradicción. Entonces no existe f en U : $df = \omega$.

De lo anterior se deduce que para estudiar el problema de cuándo una forma cerrada es exacta importa el dominio de la forma.

Definición 12.5.5. Un subconjunto U de \mathbb{R}^n tiene forma de **estrella** si existe un punto $p_0 \in U$ tal que para todo $p \in U$ se cumple $\{tp + (1-t)p_0 : t \in [0, 1]\} \subset U$.

Ejemplo 12.5.2. 1. Todo subconjunto convexo de \mathbb{R}^n tiene forma de estrella. En particular el propio \mathbb{R}^n tiene forma de estrella.

2. $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$ tiene forma de estrella (y no es convexo).

Teorema 12.5.6 (Lema de Poincaré). Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto con forma de estrella, entonces para todo $k = \{0, \dots, n\}$ se cumple que toda k -forma cerrada en U es exacta.

Demostración. Para simplificar la notación haremos la prueba para 1-formas en $U \subset \mathbb{R}^3$ con forma de estrella respecto al origen $(0, 0, 0)$.

Sea $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \in \Omega^1(U)$: $d\omega = 0$, entonces $Q_x = P_y$, $P_z = R_x$, $R_y = Q_z$. Como U tiene forma de estrella respecto al origen, tiene sentido definir $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(X) = \int_0^1 xP(tX) + yQ(tX) + zR(tX)dt, \quad \forall X = (x, y, z) \in U.$$

Calculando obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(X) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 xP(tX) + yQ(tX) + zR(tX)dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (xP(tX) + yQ(tX) + zR(tX)) dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + x \frac{\partial}{\partial x} (P(tX)) + y \frac{\partial}{\partial x} (Q(tX)) + z \frac{\partial}{\partial x} (R(tX)) dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + x \frac{\partial P}{\partial x}(tX)t + y \frac{\partial Q}{\partial x}(tX)t + z \frac{\partial R}{\partial x}(tX)t dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + x \frac{\partial P}{\partial x}(tX)t + y \frac{\partial P}{\partial y}(tX)t + z \frac{\partial P}{\partial z}(tX)t dt \\ &= \int_0^1 P(tX) + \frac{d}{dt} (P(tX))t dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (P(tX)t) dt \\ &= P(tX)t \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= P(X). \end{aligned}$$

Luego, $\frac{\partial f}{\partial x} = P$, y análogamente se prueba que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = R$, es decir $df = \omega$.

Entonces $Z^k(U) = B^k(U)$ si U tiene forma de estrella. \square

12.6. Teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de formas

Teorema 12.6.1 (TEOREMA DE GREEN). *Sea D una región elemental en el plano xy , con ∂D con orientación anihoraria. Supongamos que $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es una 1-forma en algún conjunto abierto U en \mathbb{R}^3 que contenga a D . Entonces*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Notar que $d\omega$ es una 2-forma en U y D es, de hecho, una superficie en \mathbb{R}^3 , parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$. Como P y Q no son, explícitamente, funciones de z , tenemos que $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ y $\frac{\partial Q}{\partial z} = 0$ por lo tanto $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy$. En consecuencia, el teorema dice nada más que

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy,$$

que es precisamente el teorema de Green presentado en el capítulo 4. Entonces se cumple este teorema. Asimismo, tenemos los siguientes teoremas.

Teorema 12.6.2 (TEOREMA DE STOKES). *Sea S una superficie orientada en \mathbb{R}^3 con una frontera formada por una curva cerrada simple orientada de forma coherente con S . Supongamos que ω es una 1-forma en algún conjunto abierto U que contiene a S . Entonces*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

Teorema 12.6.3 (TEOREMA DE GAUSS). *Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una región elemental con ∂V con la orientación exterior. Si η es una 2-forma en alguna región U que contiene a V , entonces*

$$\int_{\partial V} \eta = \int_V d\eta.$$

Es clara la analogía en los enunciados de estos teoremas. En las formulaciones para campos vectoriales hemos usado divergencia para regiones en \mathbb{R}^3 (en el teorema de Gauss), rotacional para superficies en \mathbb{R}^3 (en el teorema de Stokes y regiones en \mathbb{R}^2 (en el teorema de Green). Aquí usamos sólo el concepto unificado de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas. De hecho, podemos enunciar todos los teoremas como uno, si introducimos un poco más de terminología.

Por una 2-variedad orientada con frontera en \mathbb{R}^3 entenderemos una superficie en \mathbb{R}^3 cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación inducida por la superficie.

Por una 3-variedad orientada con frontera en \mathbb{R}^3 entenderemos una región elemental en \mathbb{R}^3 (suponemos que su frontera, que es una superficie, está dotada con la orientación exterior). Al siguiente teorema unificado le llamamos "teorema de Stokes", de acuerdo con las convenciones vigentes.

Teorema 12.6.4 (TEOREMA GENERAL DE STOKES). *Sea M una k -variedad en \mathbb{R}^3 ($k = 2$ o 3) contenida en algún conjunto abierto \mathcal{U} . Supongamos que ω es una $(k-1)$ -forma en \mathcal{U} . Entonces*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$