Muestreo y Procesamiento Digital

Práctico N+1
Problemas surtidos

El propósito de este repartido de ejercicios es ayudar en la preparación del examen. Dadas las variadas fuentes de los ejercicios aquí propuestos, ninguno de ellos individualmente representa la estructura, dificultad u otras características del examen. Por otro lado, estos ejercicios no cubren todos los temas que han sido tratados en el curso.

Ejercicio 1

Para eliminar distorsión en la transmisión de una señal a través de un canal[1], se desea diseñar un filtro ecualizador digital. Para eso se elige un conjunto de $2N-1$ frecuencias igualmente espaciadas dentro de la banda de interés, $[-W, W]$, y se mide la respuesta del canal $H_c(j\omega)$ a esas frecuencias, obteniéndose los valores $H_c\left(\frac{k}{2N-1}2W\right)$, donde $k = -(N-1), \ldots, 0, \ldots, N-1$.

El filtro ecualizador se diseñará de modo que la respuesta frecuencial sea inversa a la del canal en los puntos medidos.

Llamemos $f_s = 2W$ a la frecuencia de muestreo y $H[n]$ a las "muestras" de la respuesta frecuencial deseada, que de acuerdo a lo anterior estarán dadas por

$$H[n] = \frac{1}{H_c\left(\frac{k}{2N-1}2W\right)}$$

Como sólo estamos considerando muestras de la respuesta frecuencias del ecualizador, la solución será aproximada. La idea es analizar los problemas que pueden aparecer con este enfoque.

(a) Elijamos como ecualizador un filtro F.I.R., con respuesta al impulso $g[k]$ de $2N-1$ coeficientes. Dar una expresión de los coeficientes de g en función de H. Recordamos que la respuesta frecuencial de g debe coincidir con los valores de H en los puntos que corresponda.

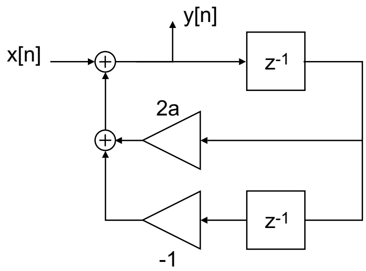
(b) Demostrar que la respuesta frecuencial del filtro, $G\left(e^{j\theta}\right)$ viene dada por

$$G\left(e^{j\theta}\right) = \frac{1}{2N-1} \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} H[n] \frac{sen[(\frac{2\pi n}{2N-1} - \theta)(N - \frac{1}{2})]}{sen[\frac{1}{2}(\frac{2\pi n}{2N-1} - \theta)]}$$

[1] Se le llama *Canal* al medio a través del cual se realiza la transmisión de la señal que transporta información, por ejemplo en el caso de la radio, el canal es el aire; en el caso de la telefonía el canal es de a tramos un cable, de a tramos una fibra óptica y quizás en otros tramos el canal sea aire. Para caracterizar la *distorsión* que intoduce el canal es necesario no sólo saber de que esta compuesto, sinó que hace falta saber las condiciones físicas a las que está sometido. Este tema se trata con un poco más de detalle en la asignatura **Sistemas de Comunicación**.

Ejercicio 2

Se considera el sistema discreto de la figura.



(a) Hallar la ecuación que determina $y[n]$ en función de $x[n]$.

(b) Hallar la transferencia del sistema $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$. Hallar la respuesta impulsiva.

(c) Discutir la estabilidad según a. Hallar los valores de a para los cuales hay raíces sobre la circunferencia unidad.

Para este caso:

(d) Graficar $|H(w)|$.

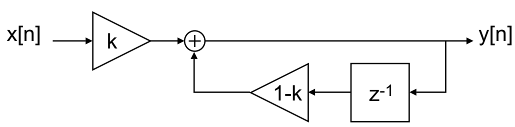
(e) Si $x[n] = 0$ (no hay entrada), $y[0] = 0$, $y[-1] = 1$, hallar $y[n]$ e $Y(z)$.

(f) Si T es el período de muestreo, determinar la frecuencia de oscilación del sistema.

(g) Hallar la potencia de ruido a la salida debida al "ruido en las operaciones". Se supondrá que las operaciones son en punto fijo, con redondeo. Justificar las hipótesis que asuma y plantee claramente el modelo que use para tratar el ruido.

Ejercicio 3

Se considera el sistema discreto de la figura.

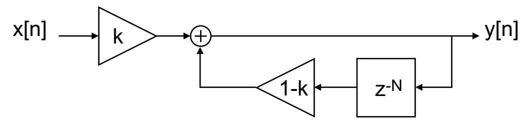


(a) Hallar la ecuación de recurrencia, la respuesta impulsiva y la función de transferencia.

(b) Estudiar la estabilidad según k. Justificar.

(c) Estudiar y graficar $\left|H\left(e^{j\theta}\right)\right|$ según el parámetro k dentro del rango de estabilidad.

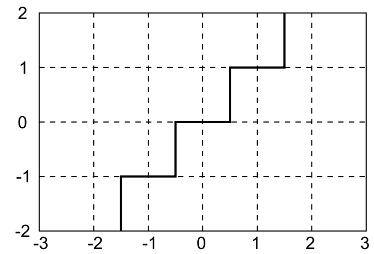
(d) Deducir, a partir de las partes anteriores, la forma de la respuesta frecuencial para los filtros como el de la siguiente figura, con N natural.



(e) *Aplicación*: Diseñar un sistema que ajustando k permita modificar el nivel de las frecuencias medias (alrededor de $10kHz$) para una señal analógica de audio, usando el tipo de filtros de la parte anterior. El ancho de la señal es de $20kHz$.

Ejercicio 4

Para poder procesar secuencias por medios digitales debemos cuantizarlas en un conjunto de valores discretos. Para eso se utiliza un cuantizador uniforme por redondeo con intervalo de cuantización Δ cuya respuesta se muestra en la figura.



Se considera una señal con la autocorrelación y potencia espectral que se muestran en las siguientes figuras. Los cambios de la señal entre muestras consecutivas son grandes con respecto al intervalo de cuantificación.

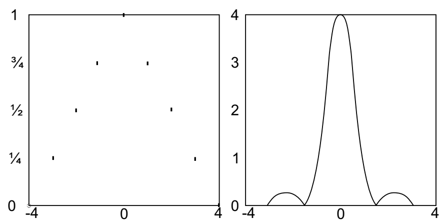


Figura 1: **Izquierda:** Autocorrelación. **Derecha:** Densidad espectral.

La señal muestreada es cuantizada y luego pasada por un filtro para mejorar la relación señal a ruido. Se proponen dos filtros distintos:

$$\text{filtro 1:} \quad y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$

$$\text{filtro 2:} \quad y[n] = x[n] + y[n-1]$$

(a) Modelar el ruido de cuantificación y su relación con la señal, explicando las hipótesis necesarias. Calcular el valor medio y la potencia del ruido, y la relación señal a ruido a la entrada del filtro luego de la cuantización.

(b) Para el filtro 1, calcular las potencias del ruido y la señal a la salida. Calcular la relación señal a ruido a la salida y compararla con la de la entrada.

(c) Para el filtro 1, calcular su respuesta frecuencial y su respuesta al impulso. Justificar la mejora en la relación señal a ruido obtenida en la parte anterior.

(d) Para el filtro 2, calcular su respuesta al impulso y su respuesta frecuencial, dibujar el módulo de ésta.

(e) Para el filtro 2, calcular la relación señal a ruido y comparar con el anterior.

Ejercicio 5

Se desea adquirir una señal de audio X que será grabada en un disco compacto (CD). Esta señal se reproducirá luego en un sistema de alta fidelidad.

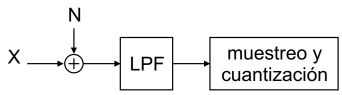
En el CD, quedan registradas muestras de la señal tomadas a una frecuencia de 44,1 kHz, con una resolución de 16 bits: las muestras van cuantizadas uniformemente con 2^{16} pasos posibles.

(a) Dar un modelo para el error de cuantización como ruido aditivo, e indicar bajo qué hipotesis es válido este modelo.

Interesa poder reconstruir fielmente componentes cuya amplitudes son del orden del paso de cuantización (o incluso menor), sin mayor distorsión, ya que estas componentes dan realismo a la grabación. En efecto, el oído humano puede distinguir señales de ese nivel en el rango de frecuencias hasta 10 kHz, y resulta mucho más molesta una señal distorsionada (o ausente), que un ruido independiente aditivo. Para frecuencias mayores, el oído es insensible a tan bajas amplitudes.

(b) Indicar en qué puntos falla el modelo de la parte anterior para señales de tan baja amplitud.

Para superar este inconveniente, se introduce *dithering* en la señal, antes de la cuantización:

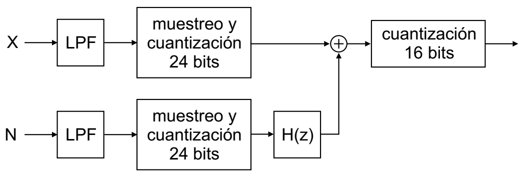


N es una señal blanca, de distribución uniforme con rango 4 pasos de cuantización.

(c) Bosquejar, siendo X un tono de 1 kHz y amplitud pico a pico 0.8 pasos de cuantización, las señales X, N, $X + N$ y la señal cuantizada. Bosquejar los espectros de estas 4 señales.

(d) Justificar la validez del modelo de la primer parte al introducir *dithering*.

Para que N no sea tan audible, conviene que sólo tenga componentes donde el oído no es muy sensible: en las frecuencias más altas. Se plantea el siguiente sistema (*Noise Shaping*):



(e) Explicar el funcionamiento y la utilidad cada componente de este sistema.

(f) Diseñar el filtro digital $H(z)$. Se utilizará un único elemento de retardo. Su respuesta en continua será nula, su respuesta máxima será en $f_s/2$ y valdrá 20. En $f_s/4$, H tendrá módulo 1. Graficar su respuesta en módulo y fase.

(g) Bosquejar el espectro de la nueva señal grabada.

Ejercicio 6

Se considera un sistema formado por un muestreador con frecuencia de muestreo $f_s = 40$ kHz, seguido de un filtro de la forma:

$$y[n] = A\,x[n] + a\,y[n-1]$$

(a) Hallar la condición que debe cumplir a para que el filtro sea estable.

(b) Hallar el módulo de la transferencia.

(c) Hallar A y a para que la transferencia en continua sea 1, y a 10 kHz sea $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(d) Al sistema ingresa una señal

$$x(t) = \cos(2\pi\, 25000\, t)$$

Expresar la salida $y[n]$.

(e) Se utiliza un reconstructor ideal para generar $z(t)$ a partir de $y[n]$. Expresar $z(t)$.

Ejercicio 7

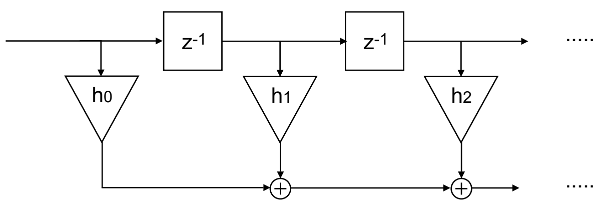
Se desea simular un filtro de respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$ real y simétrica por medio de un filtro FIR, con $2N$ elementos de retardo y coeficientes reales que denotaremos por $h_d[n]$. Se utilizará el tradicional método de *truncado* de la respuesta al impulso.

(a) Indicar los coeficientes para que el filtro $h_d[n]$ tenga una respuesta frecuencial $H_d(e^{j\theta})$ lo más cercana posible (en distancia media cuadrática) a $H(e^{j\theta})$. Sea ϵ^2 esta distancia al cuadrado.

Al filtro ingresa una secuencia blanca de media nula y potencia $\sigma_x^2 = 1$.

(b) Hallar la potencia media del error cometido en la salida debido al uso de H_d en lugar de H.

El filtro H se implementa como indica la figura. Se realizan todas las operaciones en punto fijo, donde se utilizan 7 bits para representar la parte entera, 1 bit para el signo y 8 bits para la parte fraccional.



(c) Proponer un modelo para el error introducido en las operaciones, y expresar la potencia del ruido a la salida debido a estos errores.

(d) ¿Existe un valor óptimo de N para el cual el efecto global de todos los errores se minimiza? ¿De qué depende? Justificar.

(e) Hallar el N a utilizar si la respuesta impulsiva de H vale

$$h[k] = \frac{1}{2^{|k|}}$$

Ejercicio 8

Se considera el filtro H cuya respuesta al impulso $h[n]$ es α para $n = 0$ y 2, y β para $n = 1$, y 0 para otros valores de n; donde α y β son números reales.

(a) Estudiar la estabilidad del filtro.

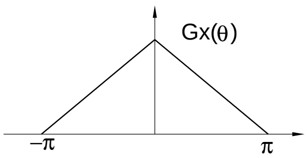
(b) Hallar la relación entre α y β para que este filtro tenga ganancia unidad en continua. Esta condición se mantendrá durante el resto del problema.

(c) Graficar la respuesta en frecuencia de H, en módulo y fase (ϕ), para un conjunto de parámetros representativo.

(d) Calcular el retardo de grupo de este filtro ($\tau = -d\phi/d\theta$ en los puntos en que esta derivada existe). ¿Es este filtro de fase lineal?

(e) Bosquejar la respuesta de este filtro a las entradas $\delta[n]$ y $u[n] - u[n-5]$ para el caso particular $\beta = 2\alpha$. Notar dónde se manifiesta el retardo de grupo.

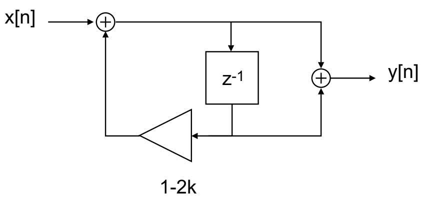
(f) Al filtro ingresa la suma de dos procesos estacionarios $x[n]$ y $r[n]$ no correlacionados entre si. x tiene la densidad espectral de la figura. r es ruido blanco de media nula, con potencia $\sigma^2 = 0.1$.



Se quiere recuperar x y eliminar el ruido r. Calcular los parámetros del filtro para que el error cuadrático medio entre y y x sea el menor posible. Tener en cuenta el retardo de grupo.

Ejercicio 9

Se considera el siguiente filtro digital **H**:



(a) Hallar la transferencia del filtro.

(b) Hallar el rango de variación del parámetro k para que el filtro sea estable.

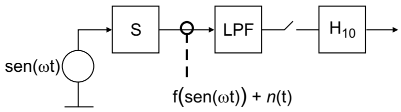
(c) Se considera de acá en más que $\mathbf{k} = \mathbf{1/10}$. Expresar y graficar la respuesta frecuencial de $\mathbf{H}$.

(d) Sea $\mathbf{G}(z)$ un filtro digital racional. Sea $\mathbf{G}_N(z)$ el filtro que que se obtiene de $\mathbf{G}$ sustituyendo cada retardo por un tren de N retardos.

Hallar la respuesta frecuencial $\mathbf{G}_N(\theta)$ en función de $\mathbf{G}(\theta)$.

(e) En particular, bosquejar $\mathbf{H}_N(\theta)$ con $N = 10$.

Se desea estudiar la distorsión producida por un sistema $\mathcal{S}$ no lineal. Para ello se lo alimenta con una señal sinusoidal y se estudia su salida (que en este caso es una función sin memoria f de la entrada, es decir $y(t) = f(x(t))$).



Además, el sistema $\mathcal{S}$ introduce ruido blanco en su salida lo que afecta la medida de distorsión. Para disminuir este último efecto se plantea el siguiente método:

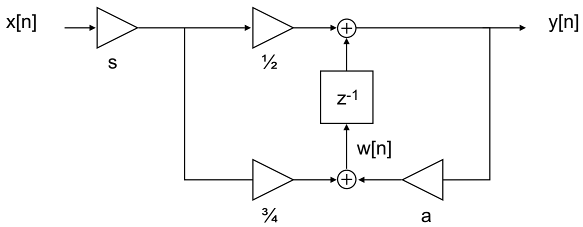
(f) Explicar cómo funciona el sistema propuesto, y cuál es la ventaja de introducir el filtro $\mathbf{H}_{10}$.

(g) Hallar la frecuencia de corte del pasabajos y el tiempo de muestreo en función de ω.

(h) Expresar la ganancia en relación Señal-Ruido obtenida al usar el filtro $\mathbf{H}_{10}$.

Ejercicio 10

Se considera el sistema de la figura, donde a y s son constantes reales con $a > 0$.



(a) Hallar la transferencia $H(z)$ y la respuesta al impulso del sistema. Establecer la condición de estabilidad para el filtro (de aquí en más supondremos que se cumple esa condición). Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia para configuraciones estables.

(b) Hallar la transferencia $H_{xw}(z)$ entre la entrada $x[n]$ y la secuencia $w[n]$ y la correspondiente respuesta al impulso de ese subsistema, $h_{xw}[n]$.

(c) Sea x_{max} el máximo valor que toma $|x[n]|$. Determinar una condición sobre s que asegure que $|w[n]| < 1$ e $|y[n]| < 1$ para todo n.

De aquí en más supondremos que s verifica la condición hallada en la parte (c). Asumiremos que las operaciones se realizan en aritmética de punto fijo con redondeo, con un bit de signo y B bits para la parte fraccionaria.

(d) Demostrar que para un filtro digital **SLIT**, la salida a una entrada Estocástica Estacionaria en sentido amplio es también Estacionaria en sentido amplio.

(e) Para la situación de la parte anterior, hallar una expresión genérica que vincule la densidad espectral de potencia de la salida con la densidad espectral de potencia de la entrada.

(f) Proponer un modelo para el error introducido en las operaciones, y para el filtro de la figura antes referida, calcular la potencia de ruido a la salida debida a estos errores.

(g) Suponiendo que $x[n]$ es una señal Blanca de media nula y varianza σ_x^2, para el filtro de la figura, calcular la potencia de señal a la salida debida a dicha entrada.

(h) Determinar la relación Señal-Ruido (SNR) a la salida del filtro, para la entrada definida en la parte anterior. En base a la condición hallada en la parte (c), establecer una cota superior para la SNR. ¿Qué sucede cuando a se aproxima a 1? Interpretar el resultado.

(i) ¿Qué hubiera sucedido con la SNR (para a cercano a 1) si $x[x]$ hubiera sido una señal estacionaria con autocorrelación

$$R_x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\left(\delta[n+1] + \delta[n-1]\right)?$$