Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 13.

Ejercicio 1.

1. Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ y $S : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales. Sabiendo que $\dim(\mathbb{V}) = n$,
   (a) probar que $\dim(N(T)) = n$ ó $n - 1$.
   (b) probar que $N(T) = N(S)$ si y sólo si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $T = \alpha S$.
2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = x + y + z$. Hallar $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, lineal, sabiendo que $N(T) = N(S)$ y $S(1, 0, 0) = 2$.

Ejercicio 2. Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $S : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ dos transformaciones lineales tales que $\operatorname{im}(T) = \operatorname{im}(S)$.

1. Probar que $\dim(N(T)) = \dim(N(S))$.
2. ¿Es cierto que $T = S$? ¿Y que $N(T) = N(S)$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 3. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Probar que si $N(T) = N(T^2)$ entonces

$$N(T) \oplus \operatorname{im}(T) = \mathbb{V}.$$

Ejercicio 4.

1. Decidir si las dos afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda.
   (a) Si $T : V \to W$, lineal, es tal que existe un conjunto $A = \{v_1, ..., v_r\} \subset V$ linealmente independiente que cumple que $T(A) = \{Tv_1, ..., Tv_r\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.
   (b) Si $T : V \to W$, lineal es tal que existe una base $B = \{(v_1, ..., v_n\}$ de V, que cumple que $T(B) = \{Tv_1, ..., Tv_n\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.
2. Pruebe utilizando lo visto en este ejercicio que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

   $$T(x, y) = (x - y, x + 2y, y)$$

   es inyectiva.

Ejercicio 5. Consideremos el espacio

$$V = [f_1, f_2, f_3],$$

donde

$$f_1(t) = \sin^2(t), \;\; f_2(t) = \cos^2(t), \;\; f_3(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

y la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to V$$

tal que

$$T(a, b, c) = af_1 + bf_2 + cf_3.$$

Hallar $N(T)$ e $Im(T)$, y probar que que T no es inyectiva, pero sí sobreyectiva.

Ejercicio 6.

1. Sean V y W espacios vectoriales con $\dim(V) < \dim(W)$; $T : V \to W$ y $S : W \to V$, transformaciones lineales.
   (a) Probar que T no es sobreyectiva.
   (b) Probar que S no es inyectiva.
2. Sean U, V y w espacios vectoriales; $T : V \to W$ y $S : W \to U$ transformaciones lineales.
   (a) Probar que $N(T) \subset N(S \circ T)$
   (b) Si $S \circ T$ es inyectiva, probar que T es inyectiva.
   (c) Probar que $Im(S \circ T) \subset Im(S)$
   (d) Si $S \circ T$ es sobreyectiva, probar que S es sobreyectiva.
3. Sean A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times n$, con $n < m$. Probar que BA no es invertible.

Ejercicio 7. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$_A(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$B = \{(1,1),(1,0)\}, \quad A = \{(1,2),(2,-1)\}.$$

Probar que T es invertible y hallar una matriz asociada a T^{-1}. Especificar las bases correspondientes.

Ejercicio 8.

1. Sea V un espacios vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal.
   (a) Probar que T es inyectiva si y sólo si T^n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Probar que T es sobreyectiva si y sólo si T^n es sobreyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Sea A una matriz $n \times n$.
   (a) Si el rango de A es igual a n, probar que el rango de todas sus potencias A^q, con $q \in \mathbb{N}$, es igual a n.
   (b) ¿Es cierto en general que el rango de las potencias de A coincide con el rango de A?

Ejercicio 9.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y $T : V \to V$ una transformación lineal no inyectiva. Probar que existen transformaciones lineales $S_i : V \to V$, $i = 1, 2$, no nulas, tales que $T \circ S_1 = S_2 \circ T = O$
2. Para la transformación
   $$T(x,y,z) = (x+y, x+z, y-z),$$
   definida en $\mathbb{R}^3$, hallar S_1 y S_2 como en la parte 1.
3. Sea A una matriz $n \times n$ no invertible. Probar que existen una matrices B y C, no nulas, de las mismas dimensiones, tales que $CA = AB = 0$.

Ejercicio 10. 1. ¿Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? ¿Existe una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?

2. Sea $X_1 = (1,0,1,0), X_2 = (1,1,1,0)$ y $X_3 = (1,1,1,1)$. ¿Existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{X_1, X_2, X_3\} \subset Im(T)$?

3. Sean $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t = 0\}$ y $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = 0, z+t = 0\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.

   (a) ¿Existe algún isomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(S) = U$?

   (b) ¿Es posible determinar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $N(T) = S$ e $Im(T) = U$?