

# Diámetro Confiabilidad de una Red

Clase 4

Pablo Romero

Lunes 26 de octubre, Universidad Nacional de Asunción,  
Paraguay.

# Contenidos

## 1 Grafos Especiales



# Grafos Elementales

Un camino elemental  $P_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  con terminales  $K = \{x_1, x_n\}$  admite cómputo exacto eficiente:

$$R_{\{x_1, x_n\}, P_n}^d = \prod_{i=1}^{n-1} p(x_i x_{i+1}) 1_{\{d \geq n-1\}}$$

En un ciclo  $C_n = (\{x_1, \dots, x_n\}, \{x_n, x_0\} \cup \{x_i, x_{i+1}\}_{i=1, \dots, n-1})$  con  $K = \{x_0, x_i\}$ ,  $0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$  tenemos  $R_{\{x_0, x_i\}, C_n}^d = 0$  si  $d < i$ ,

$$R_{\{x_0, x_i\}, C_n}^d = \prod_{j=0}^{i-1} p(x_j x_{j+1}) \text{ si } i \leq d < n - i \text{ y}$$

$$R_{\{x_0, x_i\}, C_n}^d = 1 - (1 - \prod_{j=0}^{i-1} p(x_j x_{j+1})) (1 - p(x_n, x_0) \prod_{j=i}^{n-1} p(x_j x_{j+1}))$$

si no.

# Árboles

## Proposición

La DCR de un árbol se puede hallar en orden lineal con  $n = |V|$ .

**Prueba.** Sea  $T = (V, E)$  un árbol y  $K \subseteq V$ . Dados dos terminales  $u, v \in K$  existe un único camino  $P_{uv}$  que los une. Sea  $d'$  el diámetro de  $P = \cup_{u,v \in K} P_{uv}$ :

$$R_{K,T}^d = 1_{\{d' \leq d\}} \prod_{e \in P} p_e, \quad (1)$$

$P$  se halla mediante BFS, desde un terminal  $u \in K$  como raíz. Si  $x \in K$  es el terminal más lejano de  $u$  se aplica BFS nuevamente, partiendo de  $x$ . Si  $y$  es más lejano, se tiene  $d' = d(x, y)$ . Luego,  $d'$  se halla en tiempo lineal con  $|V|$ . El número de productos de (1) es  $|P| \leq |E| < n$ .

# Grafos Diámetro-críticos

Un grafo es diámetro-crítico si una eliminación de cualquier arista aumenta el diámetro. Sea  $G = (V, E)$  un grafo con diámetro crítico  $d$ . Su DCR para  $K = V$  y diámetro  $d$  vale:

$$R_{V,G}^d = \prod_{uv \in E} p_{uv}$$

La única configuración operativa es todo el grafo (sin eliminación de aristas).

# Estructura Serie-Paralelo

Sea  $G$  un grafo de conexión serie-paralelo con  $r$  ramas en paralelo. Cada rama  $i$  se forma con  $n_i$  grafos  $s - t$ ,  $G_1^i, \dots, G_{n_i}^i$  de modo que  $t_j = s_{j+1}$ . La fuente  $s$  de  $G$  se conecta mediante enlaces con cada  $s_1$  de  $G_1^i$ , y el pozo  $t$  con los últimos pozos  $t_{n_i}$ .

## Proposición

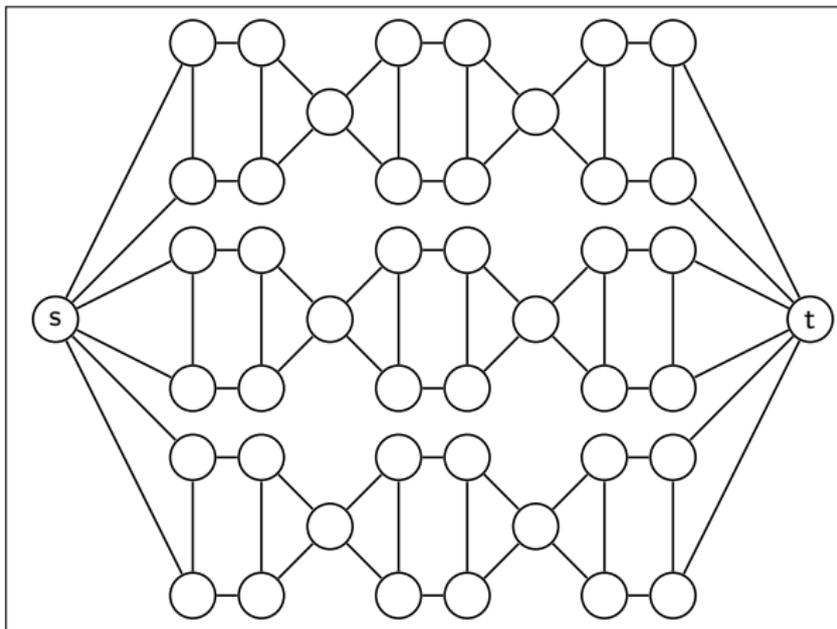
*La DCR de un grafo de conexión serie-paralelo se halla en tiempo polinomial con  $n$  si  $r$  y  $n_1, \dots, n_r$  son fijos.*

**Prueba.** Por definición,  $R_{\{s,t\},G}^d = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - R_i^d)$ , siendo  $R_i^d$  la confiabilidad de la rama  $i$ :

$$R_i^d = p_{ss_i} \sum_{\sum_{j=1}^{n_i} d_j \leq d} \prod_{j=1}^{n_i} R_{\{s_j, t_j\}, G_j}^{d_j}$$

**Q.E.D.**

# Ejemplo de Estructura en serie-paralelo



**Figure:** Estructura en serie-paralelo

# Ejemplo de Estructura en serie-paralelo

Sustituyendo, su confiabilidad  $R_{(\{s,t\},G)}^{11}$  vale:

$$\begin{aligned}
 R_{(\{s,t\},G)}^{11} = & 24p^9 + 144p^{10} + 216p^{11} - 1044p^{12} - 216p^{13} + \\
 & 1800p^{14} - 54p^{15} - 1620p^{16} + 702p^{17} - 483p^{18} - 1386p^{19} - \\
 & 11196p^{20} - 3744p^{21} + 88092p^{22} + 142272p^{23} - 504144p^{24} - \\
 & 378432p^{25} + 1389312p^{26} + 392672p^{27} - 2293920p^{28} + 356256p^{29} + \\
 & 1993932p^{30} - 405072p^{31} - 3894696p^{32} - 3571452p^{33} + \\
 & 18376740p^{34} + 34159644p^{35} - 89899611p^{36} - 1.165E8p^{37} + \\
 & 2.959E8p^{38} + 2.175E8p^{39} - 6.726E8p^{40} - 1.619E8p^{41} + \\
 & 9.553E8p^{42} - 14939424p^{43} - 8.910E8p^{44} + 60549216p^{45} + \\
 & 5.770E8p^{46} + 2.237E8p^{47} - 6.107E8p^{48} - 1.277E8p^{49} + \\
 & 4.641E8p^{50} - 16710030p^{51} - 2.321E8p^{52} + 1.240E8p^{53} - \\
 & 1.561E8p^{54} + 3.236E8p^{55} - 3.589E8p^{56} + 2.696E8p^{57} - \\
 & 1.848E8p^{58} + 1.293E8p^{59} - 79502256p^{60} + 37251360p^{61} - \\
 & 12530160p^{62} + 2924640p^{63} - 451008p^{64} + 41472p^{65} - 1728p^{66}.
 \end{aligned}$$

# Otras familias especiales

En la tesis doctoral de Pablo Sartor se encuentra el cómputo exacto de otras tres familias especiales:

- Abanico Españoles
- Escaleras
- Escaleras generalizadas

Se invita la lectura de la tesis. Nos concentraremos a continuación en acotar el espacio de grafos mediante propiedades en lugar de estructuras.

# Grafos de co-rango libre de $n$

En teoría algebraica de grafos, se define el co-rango  $c(G)$  de un grafo simple  $G = (V, E)$  como la mínima cantidad de aristas que se deben eliminar para romper todos sus ciclos:

$$c(G) = |E| - |V| + c = m - n + c, \quad (2)$$

donde  $c$  es la cantidad de componentes conexas del grafo. Si  $G$  es conexo entonces  $c(G) = m - n + 1$ , y su rango es  $r(G) = m - c(G) = n - 1$ . Por ejemplo, un árbol tiene co-rango nulo y rango completo.

# Grafos de co-rango libre de $n$

## Teorema

*Si el co-rango de un grafo conexo  $G$  es libre de  $n$ , su DCR se puede hallar en tiempo polinomial.*

**Prueba.** Sean  $\mathcal{O}_D^K(G)$  los pathsets y  $\mathcal{S}(G)$  la familia de configuraciones conexas:

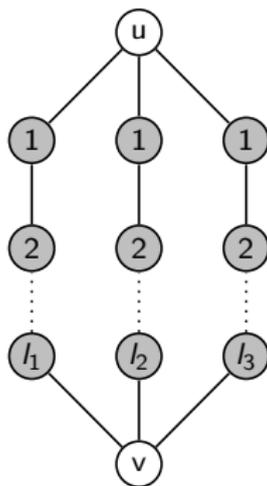
$$R_{K,G}^d = \sum_{G' \in \mathcal{S}(G)} 1_{\{G' \in \mathcal{O}_D^K(G)\}} \prod_{e \in E(G')} p(e) \prod_{e \notin E(G')} (1 - p(e)), \quad (3)$$

Toda configuración  $(V, H) \in \mathcal{S}(G)$  respeta la desigualdad:

$|H| \geq |V| - 1$ . Luego, el complemento de  $G'$  en  $G$  tiene a lo sumo  $|E| - |V| + 1 = c(G)$  aristas, y  $|\mathcal{S}(G)| \leq \binom{m}{m-n+1} = \binom{m}{c(G)}$  es polinómico en  $n$ .

**Q.E.D.**

# Grafos de Monma



**Figure:** Estructura de grafo de Monma

## Teorema

*Toda solución óptima 2-nodo-conexa de costo mínimo en un grafo métrico es Hamiltoniana o bien tiene algún grafo de Monma.*

# DCR de Grafos de Monma

## Proposición

*La DCR de un grafo de Monma se puede hallar en tiempo polinomial.*

**Prueba.** Los grafos de Monma tienen co-rango finito.

**Q.E.D.**

Tenemos un vínculo entre confiabilidad de redes y el diseño topológico de redes.

# DCR en Grafos de Género libre

## Corolario

*Si el número de caras de un grafo conexo  $G$  de género fijo  $g$  es libre de  $n$ , su DCR se puede hallar en tiempo polinomial.*

**Prueba.** El número de caras  $f$  de un grafo de género  $g$  es  $f = m - n + 2 - 2g = c(G) - (2g - 1)$ . Luego su co-rango  $c(G) = f + 2g - 1$  es libre de  $n$ .

**Q.E.D.**

# DCR en Grafos Planos

## Corolario

*Si el número de caras de un grafo plano es libre de  $n$ , su DCR se puede hallar en tiempo polinomial.*

**Prueba.** Un grafo plano tiene género 0 (libre de  $n$ ).

**Q.E.D.**

La importancia del resultado anterior radica en que la mayoría de las redes de telecomunicaciones son planas.

# DCR en Grafos Homeomorfos

## Corolario

*Si todos los miembros de una familia de grafos  $\mathcal{F}$  son homeomorfos a un grafo fijo, su DCR se puede computar en tiempo polinomial.*

**Prueba.** Los grafos homeomorfos tienen el mismo co-rango.

**Q.E.D.**

# Grafos Débiles

Sea  $G = (V, E)$  un grafo simple,  $K \subseteq V$  y  $d$  un entero positivo. Decimos que el grafo  $G$  es  $d$ - $K$ - $r$  débil si  $G - U$  es  $d$ - $K$  desconexo, para todo conjunto  $U \subseteq E$  con  $|U| \geq r$ .

## Teorema

*Si  $G = (V, E)$  es  $d$ - $K$ - $r$  débil para cierto  $r$  libre de  $n$ , entonces su DCR se puede hallar en tiempo polinomial en  $n$ .*

**Prueba.** Sea  $\mathcal{O}^r$  las configuraciones  $(V, H)$  con  $|H| \geq m - r$ :

$$R_{K,G}^d = \sum_{G' \in \mathcal{O}^r} 1_{\{G' \in \mathcal{O}_D^K(G)\}} \prod_{e \in E(G')} p(e) \prod_{e \notin E(G')} (1 - p(e)), \quad (4)$$

Como  $|\mathcal{O}^r| = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m}{m-i} \sim m^{r-1}$ , el número de términos es un polinómico en  $m$ .

**Q.E.D.**

# Los Débiles contienen a los de Co-rango libre

- Sea  $G = (V, E)$  de co-rango  $c(G)$  libre,  $K \subseteq V$  y  $d > 0$  entero. Si eliminamos un conjunto de aristas  $U \subseteq E$  de cardinal  $c(G) + 1$ , el subgrafo resultante tiene menos aristas que un árbol. Luego,  $G - U$  no es conexo, y  $G$  es  $d$ - $K$ -( $c(G) + 1$ ) débil.
- La generalización es estricta, pues el grafo bipartito  $G = K_{(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})} = (V, E)$  con  $K = V$  y  $d = 2$  es crítico, por tanto  $2$ - $V$ - $1$  débil, mientras que su co-rango es  $c(G) = \binom{n}{2} - n + 1$  función de  $n$ .