Diámetro Confiabilidad de una Red

Clase 1

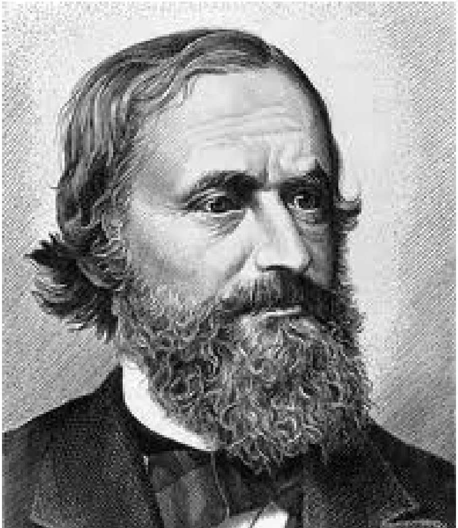
Pablo Romero

Lunes 19 de octubre, Universidad Nacional de Asunción, Paraguay.

Contenidos

Agenda

Teoría de Redes



Complejidad Computacional

Agenda

1. Célebres Investigadores
2. **Complejidad**
3. Teoría de Grafos
4. Número de Árboles

Teoría de la Complejidad

Definiciones

Un problema es $\mathcal{C}$-*Difícil* si es al menos tan difícil como cualquier problema de $\mathcal{C}$, y es $\mathcal{C}$-*Completo* si además pertenece a $\mathcal{C}$.

1. $\mathcal{P}$ es la clase de problemas que admiten solución en tiempo polinomial con la entrada, por una máquina de Turing determinista.
2. $\mathcal{NP}$ es la clase de problemas de decisión que admiten una verificación de una instancia positiva en tiempo polinomial.
3. $\#\mathcal{P}$ es un problema de conteo cuyo problema de decisión pertenece a la clase $\mathcal{NP}$.

Teoría de la Complejidad

Problemas $\mathcal{NP}$-Completos

1. En 1971, Stephen Cook demostró que MAX-SAT es $\mathcal{NP}$-Completo.
2. En 1972, Richard Karp utilizó la reducibilidad de Stephen Cook para dar la lista de los primeros 21 problemas $\mathcal{NP}$-Completos.
3. Actualmente existe una gran cantidad de problemas en esta clase computacional.
4. Por su definición, es cierto que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.
5. Se sospecha que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Teoría de la Complejidad

Reducibilidad

1. Un problema A se reduce a B existe $\pi : A \to B$ que traduce toda instancia de A en alguna instancia de B, en una cantidad polinomial de operaciones.
2. Si A se reduce a B, entonces B es al menos tan difícil como A.
3. Técnica para probar que X es $\mathcal{NP}$-Completo. Primero probamos que $X \in \mathcal{NP}$, y luego que existe $A \in \mathcal{NP}$-Difícil tal que $\pi : A \to X$.
4. Para probar que $X \in \mathcal{NP}$-Difícil, basta mostrar que existe $A \in \mathcal{NP}$-Difícil tal que $\pi : A \to X$.

Agenda

Definición

Grafo

- Un *grafo* es un par $G = (V, E)$, donde $V \neq \emptyset$ es el conjunto de *vértices* o *nodos*, y $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de *aristas* o *enlaces*.
- Un grafo $G = (V, E)$ es *simple* si es no dirigido (si $(u, v) \in E$ entonces $(v, u) \in E$), y no tiene lazos ($(a, a) \notin E$). Cada arista se denota mediante $\{x, y\} \in E$, con $x \in V$, $y \in V$.

Terminología

Terminología

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple.

- Un *camino* es una secuencia ordenada de vértices adyacentes $P = (v_1, \ldots, v_n)$. Tal camino es *simple si no repite vértices*.
- El *grado* de un vértice v se denota $gr(v)$, y es la cantidad de aristas que inciden en v.
- La *distancia* entre u y v es la cantidad de aristas del camino más corto entre u y v.
- El *diámetro* de un grafo G es la distancia de los vértices más alejados: $d(G) = \max_{u,v \in V}\{d(u, v)\}$.
- Dada una relación de equivalencia $\equiv$ en V, el grafo cociente $G/\equiv$ tiene las clases $V_\equiv = \{V_1, \ldots, V_c\}$ como vértices, y las aristas $E_\equiv = \{(V_i, V_j) : \exists\{v_i, v_j\} \in E, v_i \in V_i, v_j \in V_j\}$.
- El número c es la cantidad de componentes conexas de G.

Ejemplos

- Un *ciclo* es un camino cerrado $(v_1, \ldots, v_n, v_1)$, tal que $(v_1, \ldots, v_n)$ es simple.
- Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos.
- Un grafo *completo* K_n tiene n vértices unidos por aristas.
- El grafo P_n es un camino simple de n vértices.
- Un grafo $G = (V, E)$ es *bipartito* si existe una bipartición $V = V_1 \cup V_2$ tal que $E \subseteq V_1 \times V_2$.
- Un grafo es *elemental* si el grado máximo de sus vértices es $\Delta = 2$.

Terminología

Terminología

- Un *corte* en $G = (V, E)$ es un subconjunto $C \subseteq E$ tal que $G = (V, E - C)$ no es conexo.
- Una *subdivisión elemental* en G proviene de reemplazar $e = \{x, y\} \in E$ por $\{x, z\}, \{z, y\}$, siendo z un nuevo vértice.
- G_1 y G_2 son *homeomorfos* si se obtienen de subdivisiones elementales partiendo de un mismo grafo G.
- Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son *isomorfos* si existe una biyección $\varphi : V_1 \to V_2$ tal que $\{x, y\} \in E_1$ sii $\{\varphi(x), \varphi(y)\} \in E_2$.

Terminología

Terminología

- El *rango* de un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$, $|E| = m$ y c componentes conexas es $r(G) = n - c$.
- El *co-rango* de un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$, $|E| = m$ y c componentes conexas es $c(G) = m - n + c$.
- Un grafo es *plano* si se puede representar en un plano sin cortes en sus aristas.
- El *género* de un grafo G es el mínimo natural n tal que G puede representarse sin cruces en una superficie de género n.

Grafos Aleatorios

Grafos Aleatorios

- El modelo de Gilbert sortea un grafo $G = (V, E_p)$, donde cada arista pertenece o no al grafo de forma independiente con probabilidad p.
- El modelo de Erdos-Renyi sortea un grafo $G = (V, M)$, donde $|V| = N$ y se eligen $M \leq \binom{N}{2}$ aristas al azar.

Grafos de Monma

Un grafo es de Monma cuando consiste en tres caminos independientes entre dos nodos.

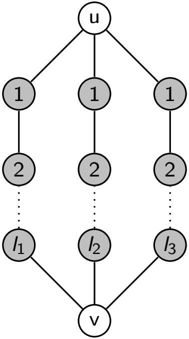


Figure: Estructura de grafos de Monma

Petersen

¿Cuál es el diámetro de este grafo?

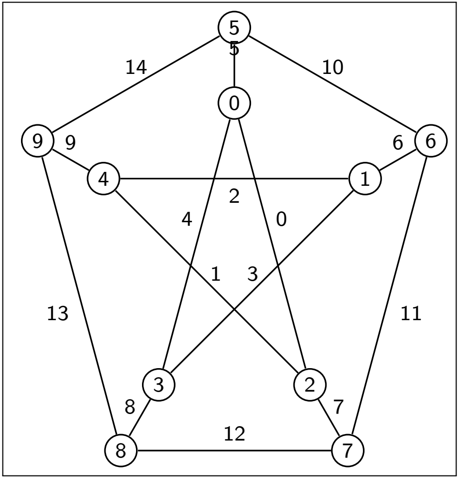


Figure: Grafo de Petersen $G(5, 2)$

Dodecahedro

Es un ejemplo de grafo propuesto por Hamilton.

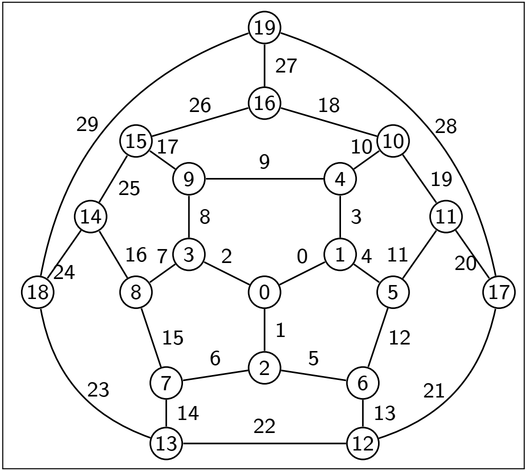


Figure: Dodecahedro, $G(10, 2)$

Problemas en Grafos

Problemas Históricos

1. Camino más corto entre dos puntos (Dijkstra).
2. Corte mínimo entre dos terminales (Ford-Fulkerson).
3. Determinar si un grafo es conexo o no (BFS, DFS).
4. Cantidad de árboles recubridores de un grafo (Kirchhoff).

Agenda

Definición

Complejidad

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. La *complejidad* de G, denotada mediante $\kappa(G)$, es la cantidad de árboles recubridores de G. Si G no es conexo, $\kappa(G) = 0$.

- Un árboles son un grafos conexos minimales (o acíclicos maximales).
- Se caracterizan por la siguiente propiedad: todo par de vértices admite un único camino simple que los une
- Todo árbol $G = (V, E)$ verifica $|E| = |V| - 1$.

Representación Matricial

Representación Matricial

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple.

- La *matriz de adyacencias* A_G cumple $A_G(i, j) = 1$ si y solo si $\{i, j\} \in E$, y 0 en caso contrario.
- La *matriz Laplaciana* es $L_G = A_G - \Delta$, siendo Δ una matriz diagonal tal que $\Delta(i, i) = gr(v_i)$, el grado del vértice v_i

Cálculo de la Complejidad

Cálculo de la Complejidad

- Fórmula de Cayley: la complejidad del grafo completo K_n es $\kappa(K_n) = n^{n-2}$.
- Teorema de Kirchhoff: "la complejidad de un grafo coincide con cualquier cofactor de su matriz Laplaciana".
- Como todo determinante se calcula en orden n^3, es posible obtener la complejidad de un grafo en tiempo polinomial.