Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 11.

Ejercicio 1. En los siguientes casos determinar si la transformación es lineal

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (y - x, z + y)$.
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x^2, x, z - y)$.
3. $\mathcal{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua $\}$. $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(f) = f(0)$.
4. $T : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(f) = |f(0)|$.
5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que T es una traslación.
6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que T es una rotación (discutir).

Ejercicio 2.

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1, 0, 0) = (2, 1, 0),\ T(1, 1, 0) = (-1, 2, 3),\ T(1, 1, 1) = (0, 0, 1).$$

¿Hay una única transformación lineal que verifique las condiciones dadas?. Justifique su respuesta. Si es afirmativa entonces hallar $T(3, 2, 1)$.

2. Determinar si existe alguna transformación $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga

$$T(1) = (1, 0),\ T(1 + x) = (1, 1),\ T(1 + x + x^2) = (0, 0),\ T(3 + 2x + x^2) = (2, 1).$$

En caso de que exista alguna hallarlas todas.

Ejercicio 3. En los siguientes casos hallar la forma general de las transformaciones lineales que cumplen las condiciones dadas, y determinar cuántas hay:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1, -1) = (2, 1, 0),\ T(1, 2, 1) = (-1, 2, 3),\ T(1, 0, -3) = (0, 0, 1)$;
2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1, -1) = (2, 1, 0),\ T(1, 2, 1) = (-1, 2, 3),\ T(1, 0, -3) = (5, 0, -3)$;
3. $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(M_1) = (1, -1),\ T(M_2) = (1, 1),\ T(M_3) = (1, 1),\ T(M_4) = (3, 1),\ T(M_5) = (1, -3)$. donde $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Sea n un vector de $\mathbb{R}^3$ de norma 1.

1. Mostrar que la transformación $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $P(v) = \langle v, n\rangle n$ es lineal. Interpretar geométricamente.
2. Interpretar geométricamente las transformación $Q = I - P$ donde I es la transformación identidad en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. Para las P y Q del ejercicio anterior hallar las matrices asociadas a P y a Q en los siguientes casos:

1. En una base ortonormal que incluya al vector n.
2. La base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ en los siguientes casos.

1. $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente).
2. $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
3. $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 3), (2, 5)\}$.

Ejercicio 7. Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_{\mathcal{U}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donde $\mathcal{E} = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ y $\mathcal{U} = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$. Hallar $T(x^2 + x - 1)$.

Ejercicio 8. Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y la transformación

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

definida por

$$T(B) = AB.$$

1. Probar que T es lineal.
2. ¿Existen bases en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea justamente A?. Justifique la respuesta.
3. Para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Ejercicio 9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación de centro 0 ángulo α. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

1. Hallar la matriz asociada a T, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.
2. Hallar la matriz asociada a T^2, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$, siendo $T^2 = T \circ T$.
3. Deducir fórmulas para $\cos(2\alpha)$ y $\operatorname{sen}(2\alpha)$

Ejercicio 10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3y - z, x + 2y + z),$$

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\}.$$

Hallar la matriz asociada de la restricción de T a S, $T|_S$, de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{C}$ canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 11. Hallar las dos matrices de cambio de base entre la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base

$$\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}.$$

Verificar que una matriz de cambio de base es la inversa de la otra.