Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 10.

Ejercicio 1.

En los siguientes casos, hallar una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V.

1. $V = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y - z = 0\}$
2. $V = \mathbb{R}^3, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = -2y, \ z = 0\}$
3. $V = \mathbb{C}^4, \quad S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \ : \ 2ia + b = 0, \ 3ic + d - ib = 0\}$
4. $V = \mathcal{P}_3, \quad S = \{p \in \mathcal{P}_3 \ : \ p(2) = 0\}$
5. $V = \mathcal{P}_3, \quad S = \{p \in \mathcal{P}_3 \ : \ p(0) = p'(0) = 0\}$
6. $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad S = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ a_n = 0 \quad \forall\, n \geq 4\}$
7. $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3x3}, \quad S = \{A \in \mathcal{M}_{3x3} \ : \ A \text{ es simétrica } \}$
8. $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3x3}, \quad S = \{A \in \mathcal{M}_{3x3} \ : \ A \text{ es antisimétrica } \}$

Ejercicio 2. Sea $B = \{(1, 1, 0), \ (0, 1, 1), \ (1, 0, 1)\}$.

1. Probar que B es base de $\mathbb{R}^3$
2. Hallar las coordenadas del vector $v = (1, 2, 3)$ en la base B.

Ejercicio 3. Sea $B = \{p_0, p_1, p_2\}$, donde $p_i(t) = (t-1)^i, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \ \ (i = 0, 1, 2)$.

1. Probar que B es base de $\mathcal{P}_2$.
2. Hallar las coordenadas del vector $p \in \mathcal{P}_2$ tal que $p(t) = 6t^2 - 3t + 2 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, en la base B.

Ejercicio 4. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Probar que B es base de $\mathcal{M}_{2x2}$.
2. Hallar las coordenadas del vector $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ en la base B.

Ejercicio 5.

1. Discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$ si el conjunto $A = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$ donde $p_1(t) = 1 + t, \ \ p_2(t) = 1 + \alpha t + t^2, \ \ p_3(t) = 1 + t^2 \ \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
2. Sea $B = \{q_1, q_2, q_3\} \ \subset \ \mathcal{P}_2$ donde $q_1(t) = 1, \ \ q_2(t) = t - a, \ \ q_3(t) = (t-a)(t-b) \ \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$, con a y $b \in \mathbb{R}$.
   (a) Probar que B es base de $\mathcal{P}_2$.
   (b) Sea $h \in \mathcal{P}_2$ tal que $h(t) = t^2 - 5t + 6 \ \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Hallar $coord_B(h)$.
   (c) Sea $S = [h]$. Hallar a y b sabiendo que $B \cap S \neq \emptyset$.

Ejercicio 6. Sea $S = [(1, -3, 2), \ (2, -4.1), \ (1, -5, 5)] \ \subset \ \mathbb{R}^3$

1. Determinar la dimensión de S.

2. Hallar una base de S.

3. Agregar vectores a la base hallada hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 7. Sea $S = [(1,1,0,0),\ (i,0,1,1),\ (i,i,0,0)] \subset \mathbb{C}^4$

1. Determinar la dimensión de S si el cuerpo es $\mathbb{C}$.

2. Determinar la dimensión de S si el cuerpo es $\mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}$ sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ con las operaciones habituales.

1. Probar que el conjunto infinito $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x = \log(p) \text{ con } p \text{ primo } \}$ es L.I.

2. ¿La dimensión de este espacio vectorial es finita? Justifique la respuesta.

Ejercicio 9. Dados los subespacios:

1. $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = z\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0\}$
2. $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y = z\}$
3. $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2x2} \ : \ a = c, \quad b = d \right\}$ y $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2x2} \ : \ d = 0, \quad a = b + c \right\}$
4. $S_1 = \{p \in \mathcal{P}_2 \ : \ p(t) = at^2, \text{ con } a \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{p \in \mathcal{P}_2 \ : \ p(t) = at^2 + bt + a, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$

   (a) Hallar una base de S_1 y una base de S_2

   (b) Hallar una base de $S_1 + S_2$ y una base de $S_1 \cap S_2$

   (c) Indicar si la suma es directa

Ejercicio 10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, S_1 y S_2 subespacios de V. Probar que: $dim(S_1 + S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 \cap S_2)$