Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 9.

Ejercicio 1. Hallar un generador del subespacio S

1. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
2. $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 : 2ia = b,\ c + d - ib = 0\}$
3. $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x]\ ; p(1 - x) = p(1 + x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
4. $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x]\ ; p(0) = 0, \}$
5. $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica } \}$
6. $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A \text{ es antisimétrica } \}$

Ejercicio 2. Determinar si el conjunto de vectores $\mathcal{A}$ es un generador del espacio vectorial V.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.
2. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (1, -1, 1)\}$.
3. $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
4. $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 3. Investigar si el vector v es combinación lineal del conjunto $\mathcal{A}$ (escribirlo como combinación lineal si es posible).

1. $\mathcal{A} = \{3x^3 + x, -2x^2 + x - 1, 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1\}$ y $v = -3x^3 + 4x^2 + x - 2$.
2. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4. El conjunto $\mathcal{A}$ dado genera un subespacio S. Eliminar elementos de $\mathcal{A}$ hasta conseguir un generador de S donde ningún elemento sea combinación lineal de los demás.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. $\{x^2 - 1, x^3 + 2x, x, x^3 + x, 2x^2 - 1\}$.

Ejercicio 5. Determinar que vectores de la familia linealmente dependiente

$$\mathcal{A} = \left\{x^3 + x + 1, x^3 + x^2, -2x^3 + x + 1, x^3 + 3x^2 + x + 1\right\} \subset \mathbb{R}[x],$$

pueden expresarse como combinación lineal de los restantes.

Ejercicio 6. En los siguientes casos determinar si el conjunto $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Cuando no lo sea encontrar un subconjunto linealmente independiente que permita expresar a los restantes vectores como combinación lineal del subconjunto seleccionado.

1. $\mathcal{A} = \{(1, 2, 3), (0, 5, 6), (0, 0, 7)\}$

2. $\mathcal{A} = \{(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\}$

3. $\mathcal{A} = \{(1,2,3),(0,1,2),(1,1,1),(2,3,4)\}$

4. $\mathcal{A} = \{(0,1,1),(0,0,1)\}$

5. $\mathcal{A} = \{(a,a^2,1),\ (-1,a,a),\ (0,2a^2,a^2+1)\}$. Discutir según a.

6. $\mathcal{A} = \{p_1,p_2,p_3,p_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde

$$p_1(x) = x^2+1, \quad p_2(x) = x^2+x, \quad p_3(x) = x+2, \quad p_4(x) = x^2+3x.$$

7. $\mathcal{A} = \{p_1,p_2,p_3\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde

$$p_1(x) = 4x+3, \quad p_2(x) = x^2-1, \quad p_3(x) = ax^2+4x+5.$$

   Discutir según $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7. Considere la siguiente familia de funciones:

$$S = \{\mathrm{sen(x)}, \mathrm{cos(x)}, \mathrm{sen(2x)}, \mathrm{cos(2x)}\}.$$

1. Probar que S es un conjunto L.I.
2. Investigue la dependencia lineal de $\{f_1, f_2\}$,
   donde $f_1 : f_1(x) = L(\sqrt{x^2+1}+x), \quad f_2 : f_2(x) = L(\sqrt{x^2+1}-x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 8. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriz, $\mathcal{C} = \{X_1, X_2, \ldots, X_l\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{K}^n$ y $\mathcal{B} = \{AX_1, AX_2, \ldots, AX_l\} \subset \mathbb{R}^m$. Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.
2. Si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

En el caso de que alguna de las afirmaciones sea falsa dar un contraejemplo, y estudiar que hipótesis adicionales sobre A permiten asegurar que la afirmación es verdadera.

Ejercicio 9. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se considera el vector

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad \text{con} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}.$$

1. Sabiendo que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i - v) = 0$, probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.
2. Sabiendo que
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$$
   probar que $\{(v_1-v),(v_2-v),\ldots,(v_n-v)\}$ es linealmente independiente.
3. Sabiendo que
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$
   probar que $\{(v_1-v),(v_2-v),\ldots,(v_n-v)\}$ es linealmente dependiente.