

Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 7.

Ejercicio 1. Ecuaciones de planos y vectores normales.

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-3, 1, 0)$ y es perpendicular a $(-1, 2, 3)$.
2. Expresar el plano π de ecuación $x - y + 3z = 1$ como $\langle P - P_0, N \rangle = 0$, donde $P = (x, y, z)$ es un punto genérico y N es un vector perpendicular al plano.
3. Hallar dos versores que sean perpendiculares al plano $2x + y = 0$.

Ejercicio 2. Mostrar que si $U = (u_1, u_2, u_3)$ y $V = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores directores de un plano π entonces

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad (1)$$

es un vector normal al plano π . Mostrar, en particular, que este vector es ortogonal a U y a V .

Ejercicio 3.

1. Hallar la distancia del origen a la recta de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

2. Hallar la distancia de $(0, 0, 0)$ al plano $x - y = 3$; y de $(-2, -4, 3)$ al plano definido por la ecuación $2x - y + 2z + 3 = 0$.

Ejercicio 4. Dadas las rectas r y r'

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = -2 - \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 4, \\ x + z = -1. \end{cases}$$

Determinar si son la misma recta. Si no lo son, ¿son paralelas? ¿Se cortan o se cruzan?

Ejercicio 5. Dados los planos

$$2x - y - 3z + 2 = 0, \quad \begin{cases} x = 2 + \lambda - \mu, \\ y = -2\lambda + 3\mu, \\ z = \mu, \end{cases}$$

determinar si son el mismo plano o no. En caso de no serlo, ¿son paralelos?. Hallar su intersección.

Ejercicio 6. Hallar ecuaciones paramétricas de una recta que no corte a ninguno de los planos de ecuaciones

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 3$$

y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$

Ejercicio 7. Hallar ecuaciones reducidas de los planos que satisfacen las condiciones especificadas en cada caso:

1. contiene al punto $(1, 1, 1)$ y es paralelo a las rectas

$$\begin{cases} x = 4 - 5\lambda, \\ y = 5 + 4\lambda, \\ z = -2 + \lambda, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ z = 5. \end{cases}$$

2. Contiene a la intersección de los planos $5x - 2y - z = 3$ y $x + 3y - 2z = -5$, y es paralelo al vector $(7, 9, 17)$.

Ejercicio 8. Probar que las rectas

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

son ortogonales.

Ejercicio 9. Probar que las rectas

$$\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = 1 - 6\lambda, \end{cases}$$

son ortogonales.

Ejercicio 10. TRAZADO DE PERPENDICULARES.

- Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que pasa por el punto $(4, 4, 4)$ y es perpendicular a $2x + y = 0$.
- Repetir para la recta que pasa por el origen O y es perpendicular a la recta

$$\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 11. Hallar ecuaciones reducidas del plano que contiene a la intersección de los planos $3x - 2y + z = 3$ y $x - 2z = 0$, y es perpendicular al plano $x - 2y + z = 5$.

Ejercicio 12. Verificar que los siguientes planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos:

1. $x - 2y - 2z = 12$ y $x - 2y - 2z = 6$;
2. $2x - 3y + 6z = 14$ y $4x - 6y + 12z = -21$.

Ejercicio 13. En cada caso, hallar las ecuaciones de la recta que satisface las condiciones especificadas:

1. pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y + 3z - 1 = 0$.
2. Pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, se interseca con la recta

$$P = (1, -1, 3) + \lambda(3, 2, -5),$$

y es ortogonal a la recta

$$\begin{cases} x = -1 + 6\lambda, \\ y = -3 - 2\lambda, \\ z = 2 - 3\lambda. \end{cases}$$

3. Pasa por el punto $(-4, -5, 3)$ e interseca perpendicularmente a la recta

$$P = (-1, -3, 2) + \lambda(3, -2, -1).$$

Ejercicio 14. En cada caso hallar la ecuación del plano que satisface las condiciones especificadas:

1. Pasa por el punto $(2, -1, 1)$, es perpendicular al plano $2x + 3y - z + 5 = 0$ y paralelo a la recta

$$\begin{cases} x = 2z + 3, \\ y = z. \end{cases}$$

2. Pasa por el punto $B = (1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x + 2y + z + 1 = 0$.
3. Pasa por el punto $C = (1, 1, 1)$, es paralelo al eje Oy y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje Ox (hay dos soluciones posibles).

Ejercicio 15. Encontrar la normal común a las rectas r y s de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 4 - 4\lambda, \\ y = 5 + 4\lambda, \\ z = -2 + \lambda, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 + 2\lambda, \\ y = 5 + 2\lambda, \\ z = 1 - \lambda. \end{cases}$$

Calcular la distancia entre ambas rectas, y hallar puntos P y Q en r y s respectivamente tales que la distancia entre P y Q sea igual a la distancia entre r y s .