Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 6.

Ejercicio 1. Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas (o reducidas) de las siguientes rectas:

1. la que pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$, con vector director $v = (2, 1, 3)$;
2. la que pasa por los puntos $A = (4, 3, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.

Ejercicio 2.

1. Averiguar si los puntos $(3, 1, -1)$, $(5, 2, 1)$ y $(5, 0, 0)$ pertenecen a la recta con ecuaciones paramétricas
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -2 + \lambda. \end{cases}$$
2. Repetir para los puntos $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, y la recta que tiene ecuaciones reducidas
$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$
3. Averiguar si los puntos $(1, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$ y $(3, -1, 1)$ están alineados. Si lo están, encontrar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que determinan.
4. Repetir para $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 3)$.

Ejercicio 3. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:

1. el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y tiene a $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$ como vectores directores;
2. el que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;
3. el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la recta
$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 4.

1. Mostrar que si $U = (u_1, u_2, u_3)$ y $V = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores no colineales, el sistema de ecuaciones paramétricas
$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \tag{1}$$
es compatible si y sólo si el determinante
$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$
es nulo.

2. Concluir que el plano de ecuaciones paramétricas tiene una ecuación reducida

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}(x-p_1) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}(y-p_2) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}(z-p_3) = 0.$$

Ejercicio 5. Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$2x - 3y + 4z = -2, \qquad \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{cases}$$

Ejercicio 6. Hallar la intersección del plano y la recta

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha, \\ y = 1 - 2\alpha, \\ z = -1 - \alpha. \end{cases}$$

Ejercicio 7. Se consideran los planos $2x + y + z - 2 = 0$, $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 2\mu, \\ y = -3 + \lambda - \mu, \\ z = \lambda + \mu, \end{cases}$ y las rectas $\begin{cases} x + y - 3z = -6, \\ x + 2y - 4z = -8, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = 4 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda. \end{cases}$

Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos.

Ejercicio 8. Para cada una de las ternas de planos π_1, π_2 y π_3 que se proponen a continuación, hallar la intersección $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ de los tres planos. En caso de que la intersección sea vacía , estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

1. $y + z = 0$, $2x - y - 2z = 5$, $3x + 3y + 2z = 7$.
2. $x + 2y - z = 2$, $2x + y - 3z = 0$, $-2x - 4y + 2z = 3$.
3. $x - 2y + z = 5$, $x + z = 3$, $x + 4y + z = 0$.

Ejercicio 9. Un cazador de aves se desplaza en compañía de su perro por una planicie que se puede modelar como el plano: $\pi : \begin{cases} x = 5\lambda + 5\mu \\ y = -1 + 4\lambda + 5\mu \\ z = -4 + 4\lambda + 4\mu \end{cases}$.

Un pájaro que vuela en la zona se desplaza siguiendo la dirección de la recta r: $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$.
El vuelo del pájaro es en el sentido del vector director $v = (1, 1, 0)$. La velocidad del ave es constante, tal que se desplaza $\|v\|$ en 30 segundos.

Cuando el cazador se detiene en el punto $(0, -1, -4)$ observa que el pájaro se encuentra en la posición $(1, 0, 1)$. El cazador efectúa su disparo 1 minuto y medio después de ver al ave y la hiere (se supondrá que el ave es herida en el instante en que el cazador efectúa el disparo).

Luego de ser herida el ave cae siguiendo una nueva recta cuya dirección es $(1, 1, -1)$. Inmediatamente después de que el ave llega al suelo el perro corre en busca de ella. (Hasta ese momento había permanecido en el lugar donde habían avistado al ave). ¿Cuál es la distancia que debe recorrer el perro para recoger a su presa?

Ejercicio 10. Productos notables.
Sean X e Y vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

1. $||X+Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2 + 2\langle X, Y\rangle$;
2. $\langle X+Y, X-Y\rangle = ||X||^2 - ||Y||^2$.

Ejercicio 11. Hallar el valor del ángulo entre $(1,1,0)$ y $(1,0,0)$.

Ejercicio 12. Regla del paralelogramo
Sean X e Y dos vectores cualesquiera. Probar que

$$\frac{1}{2}\left(||X+Y||^2 + ||X-Y||^2\right) = ||X||^2 + ||Y||^2.$$

Ejercicio 13.

1. Sean X e Y dos vectores cualesquiera. Probar que $\langle X, Y\rangle$ está determinado conociendo $||X||$, $||Y||$ y $||X+Y||$. Mostrar que también queda determinado conociendo $||X||$, $||Y||$ y $||X-Y||$.
2. Si $||X|| = 3$, $||Y|| = 4$ y $||X+Y|| = 5$, hallar $\langle X, Y\rangle$ y el ángulo entre los vectores X e Y. Repetir para $||X|| = 3$, $||Y|| = 4$ y $||X-Y|| = 5$.
3. Para el caso en que $||X|| = ||Y|| = ||X-Y|| = 1$, hallar $\langle X, Y\rangle$ y el ángulo entre los vectores X e Y.

Ejercicio 14.

1. Consideremos los vectores $u = (2,-1,-1)/3$, $v = (1,-2,1)$. Hallar $||u||$, $||v||$ y el ángulo entre u e v.
2. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Hallar $||v||$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $||u|| = 3$ y que $u-v$ es perpendicular a u.
3. Hallar $||v||$ y $||u+v||$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\pi/4$, que $||u|| = 3$ y que el ángulo entre $u+v$ y u es igual a $\pi/6$.
4. ¿Es cierto que si v es un vector no nulo entonces la igualdad $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u-w$?

Ejercicio 15. El producto $\langle X\wedge Y, Z\rangle$ es lo que se conoce como *producto mixto* de los tres vectores X, Y y Z, y se indica con la notación (X, Y, Z).

1. Mostrar que los tres productos (X, Y, Z), (Z, X, Y) y (Y, Z, X) arrojan el mismo resultado.
2. Mostrar que $\langle X\wedge Y, X\rangle = \langle X\wedge Y, Y\rangle = 0$.

Ejercicio 16. Dados los vectores $U = (2,-1,7)$, $V = (1,1,-3)$ y $W = (1,-1,2)$ calcular:

1. $|U|$, $|V|$, $\langle U, V\rangle$, $U\wedge V$, $|U\wedge V|$.
2. $U\wedge(V\wedge W)$ y $(U\wedge V)\wedge W$. Observar que el producto vectorial no es asociativo.
3. (U, V, W), (U, W, V) y (W, U, V).

Ejercicio 17. Probar las siguientes identidades, válidas para vectores U, V, W y X cualesquiera en $\mathbb{R}^3$.

1. Fórmula de expulsión. $(U\wedge V)\wedge W = \langle U, W\rangle V - \langle W, V\rangle U$.
2. Identidad de Lagrange. $\langle U\wedge V, W\wedge X\rangle = \langle U, W\rangle\langle V, X\rangle - \langle U, X\rangle\langle V, W\rangle$.

Ejercicio 18. Dados dos vectores u y v, hallar todos los vectores w para los que se satisface $u \wedge w = u \wedge v$.

Ejercicio 19. Calcular el producto vectorial

$$(a_{11}, a_{12}, 0) \wedge (a_{21}, a_{22}, 0)$$

y usarlo para analizar la interpretación del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

como un área orientada.