Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 5.

**Ejercicio 1.** Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}.$$

**Ejercicio 2.** Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Ejercicio 3.** Calcular el determinante de las siguientes matrices usando escalerización.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 4.** Calcular los determinantes

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

para $n = 2, 3, \ldots$, donde se supone que la matriz con determinante $d_n$ tiene $n$ filas y $n$ columnas.

**Ejercicio 5.** Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcular

$$\left|\begin{array}{ccc} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{array}\right|.$$

**Ejercicio 6.** Sea $A$ una matriz $n\times n$. Calcular en función de $n$ y el determinante de $A$ los siguientes determinantes: $\det(2A)$, $\det(-A)$, $\det(A^2)$ y $\det(A^tA)$.

**Ejercicio 7.** Matrices especiales

1. Decimos que una matriz $A$ es *antisimétrica* si $A=-A^t$. Probar que si $n$ es impar y $A$ es una matriz antisimétrica entonces $\det(A)=0$.
2. Una matriz cuadrada $A$ se llama *nilpotente* si existe algún número natural $k$ tal que $A^k=O$. Mostrar que el determinante de cualquier matriz nilpotente es nulo. Hallar una matriz $3\times 3$ no nula, tal que $A^2=O$.
3. La matriz $A$ se llama *idempotente* si $A^2=A$. ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz idempotente? Construir un ejemplo para cada uno de los valores posibles.
4. ¿Qué valores puede tomar el determinante de una matriz $n\times n$ que satisfaga la igualdad $A^2=I$? Con $I$ indicamos la matriz identidad $n\times n$. Dar un ejemplo para cada uno de los valores posibles.
5. Se llama *matriz ortogonal*[1] a una matriz $A$ que satisface la igualdad $A^tA=I$. Hallar los posibles valores que puede tomar el determinante de una matriz ortogonal. Construir un ejemplo de matriz ortogonal para cada uno de los posibles valores hallados.

**Ejercicio 8.** Sean $A$ una matriz $n\times n$, $B$ una matriz $n\times m$ y $C$ una matriz $m\times m$. Con $O$ indicaremos una matriz $m\times n$ cualquier dimensión cuyas entradas son todas nulas. Probar que

$$\det\left(\begin{array}{cc} A & B \\ O & C \end{array}\right)=\det(A)\det(C)$$

**Ejercicio 9.** Sean $A$, $B$, $C$, y $D$ cuatro matrices $n\times n$ que son submatrices de la matriz

$$E=\left(\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right)$$

de tamaño $2n\times 2n$. Investigar si es cierto o falso que

$$\det(E)=\det(A)\det(D)-\det(C)\det(B).$$

[1]El nombre esta justificado porque cada una de las columnas de la matriz es ortogonal a las demás. La noción de ortogonalidad será introducida en el capítulo dedicado al estudio de la geometría