Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 3.

Ejercicio 1. Consideremos las 4-uplas

$$X_1 = (1, 2, 2, 1), \quad X_2 = (2, 1, -2, 0), \quad X_3 = (-1, 1, 4, 1).$$

Hallar las combinaciones lineales $aX_1 + bX_2 + cX_3$ para:

1. $a = 0$; $b = 2$; $c = 5$
2. $a = -3$; $b = 2$; $c = 1$
3. $a = 1$; $b = -1$; $c = -1$

Ejercicio 2. Consideremos el conjunto

$$A = \{(1, 0, 1, -1), (2, 0, 3, 1), (0, 2, 1, 0)\}$$

formado por tres 4-uplas de números reales. Determinar en cada caso si X puede obtenerse como combinación lineal de los elementos de A. Si la respuesta es afirmativa hallar los respectivos coeficientes.

1. $X = (0, 2, 0, -3)$
2. $X = (5, -2, 0, 0)$
3. $X = (5, -6, 4, 1)$

Ejercicio 3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Determinar si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ pueden obtenerse como combinaciones lineales de las columnas de A:
   (a) $(1, -1, -3, 3)$;
   (b) $(0, 1, 0, 1)$;
   (c) $(0, x, x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$;
   (d) $(x, 0, -x, 2x)$, $x \in \mathbb{R}$
2. Llamamos espacio de columnas de A al subconjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de la matriz A. Hallar ecuaciones que caractericen al espacio de columnas.

Ejercicio 4. 1. Para la matriz real A y los vectores B_1, B_2 dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolver los sistemas $AX = B_i$, $i = 1, 2$. Expresar de dos maneras diferentes B_1 como una combinación lineal de las columnas de A.

2. Hallar todos los vectores B que hacen que el sistema $AX = B$ sea compatible.

3. Formar una nueva matriz $\bar{A}$ eliminando algunas columnas de A, de modo que:

   - $\bar{A}X = B$ sea compatible para todos los vectores B hallados en la parte anterior, y sólo para esos B;
   - la solución de $\bar{A}X = B$ siempre sea única.

4. Expresar B_1 como combinación lineal de las columnas de $\bar{A}$. Expresar el vector columna $O = (0, 0, 0, 0)$ como combinación lineal de las columnas de A y como combinación lineal de las columnas de $\bar{A}$.

5. Repetir las partes 2 y 3 para la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ -4 & -4 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Calcular el rango y el núcleo de las siguientes matrices, en cada caso indicar si las matrices son invertibles y si corresponde calcular la inversa.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 15 & 20 & 5 & -10 \\ -9 & -12 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$.

1. Sea p un polinomio, probar que A conmuta con $p(A)$.

2. Si existe un polinomio p con $p(0) = 0$ y tal que $p(A) = I$, probar que A es invertible y hallar la inversa de A.

3. Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = O$, probar que $I - A$ es invertible y que $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Ejercicio 7. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si el conjunto sólo tiene un vector, el conjunto es lineamente dependiente si y sólo si el vector es el vector cero.

2. Si el vector cero pertence a un conjunto de vectores, el conjunto es linealmente dependiente.

3. Si el conjunto consta de más de un vector: el conjunto es linealmente dependiente si y solamente si un vector del conjunto es combinación lineal de los restantes.

4. Si en un conjunto de vectores uno de ellos es múltiplo escalar de otro el conjunto es linealmente independiente.

5. Si un conjunto de vectores contiene un subconjunto de vectores que es linealmente independiente, el conjunto es a su vez linealmente independiente.

6. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también será linealmente independiente.

Ejercicio 8. Indicar si los siguientes conjuntos son L.I. o L.D. indicando en cada caso el rango del mismo:

1. $A = \{(3,1),(2,3)\}$
2. $U = \{(1,1,3),(3,5,5),(2,1,8)\}$
3. $E = \{(2,1,3),(1,2,1),(1,1,4),(1,-5,1)\}$
4. $B = \{(1,-1,2,1,5),(2,1,0,1,3),(0,1,-2,1,1)\}$
5. $T = \{(1,1,1),(0,1,1),(1,0,k)\}$ discutiendo según k