Transformaciones geométricas

Basado en: **Capítulo 5**

Del Libro: **Introducción a la Graficación por Computador**

Foley – Van Dam – Feiner – Hughes - Phillips

Resumen del capítulo

- Transformaciones bidimensionales
- Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales
- Transformación ventana-área de vista
- Representación matricial de transformaciones tridimensionales
- Transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

A lo largo de este capítulo se presentarán las principales transformaciones geométricas bidimensionales y tridimensionales que se emplean en la computación gráfica por computador.

Transformaciones geométricas

Conceptos básicos referentes a las transformaciones geométricas afines en 2D y 3D, utilizadas en Computación Gráfica.

La traslación, escalamiento, y rotación.

Dichas transformaciones son utilizadas directamente por aplicaciones y en muchos paquetes de subrutinas gráficas.

Transformaciones bidimensionales

Traslación

Se traslada cada punto P(x,y) d_x unidades paralelamente al eje x y d_y unidades paralelamente al eje y, hacia el nuevo punto P'(x',y').

Las ecuaciones quedan:

$$x' = x + d_x \qquad y' = y + d_y \qquad \text{Ec. 1}$$

Si se definen los vectores columna queda:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;,\; P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \;,\; T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 2}$$

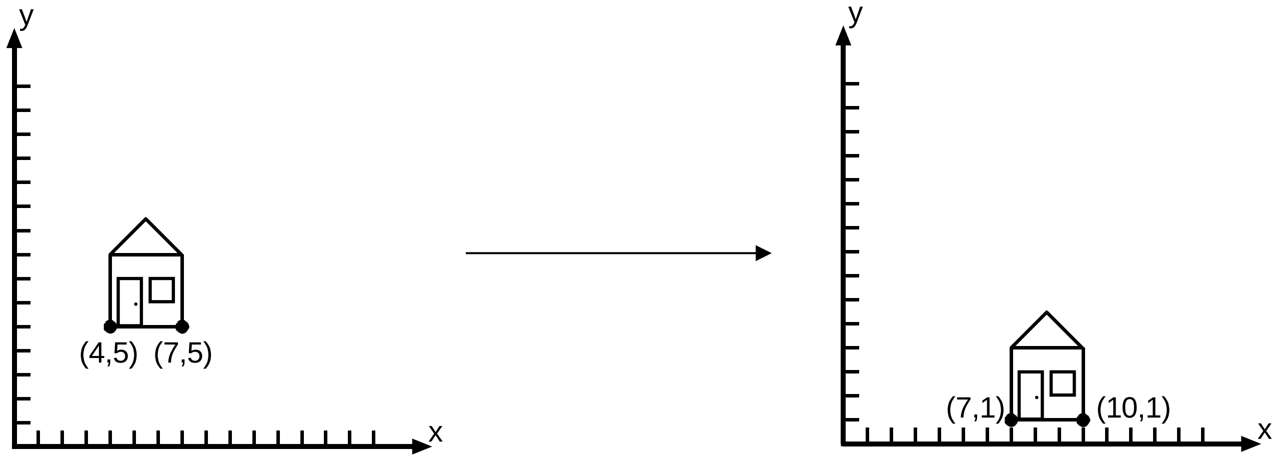
entonces la ecuación 1 puede ser expresada como:

$$P' = P + T \qquad \text{Ec. 3}$$

Traslación

Una forma de efectuar la traslación de un objeto es aplicándole a cada punto del mismo la ecuación 1. Para trasladar todos los puntos de una línea, simplemente se traslada los puntos extremos.

En la figura se muestra el efecto de trasladar un objeto 3 unidades en x y -4 unidades en y.



Traslación de un objeto

Esto se cumple también para el escalamiento y la rotación.

Escalamiento

El escalamiento se hace con un factor s_x en el eje x y en un factor s_y en el eje y.

Escalamiento uniforme $s_x = s_y$

Escalamiento diferencial.

La transformación de escalamiento puede expresarse con las siguientes multiplicaciones

$$x' = s_x \cdot x \quad y' = s_y \cdot y \qquad \text{Ec. 4}$$

En forma matricial

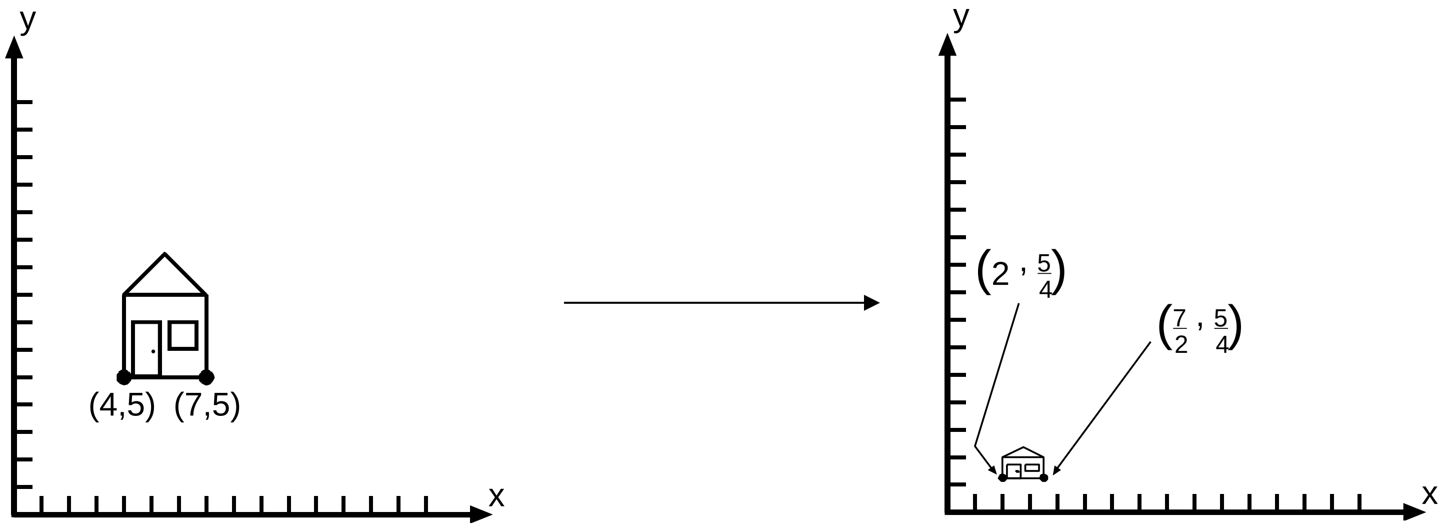
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow P' = S \cdot P \qquad \text{Ec. 5}$$

Matriz S

Escalamiento

Se escala a ½ en el eje x y a ¼ en el eje y .

El escalamiento se efectúa con respecto al origen;



Antes del escalamiento

Después del escalamiento

Escalamiento no uniforme de un objeto con respecto al origen (0,0)

Rotación

Los puntos también pueden ser rotados un ángulo θ con respecto al origen

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot sen\theta$$

$$y' = x \cdot sen\theta + y \cdot \cos\theta$$

Ec. 6

En forma matricial

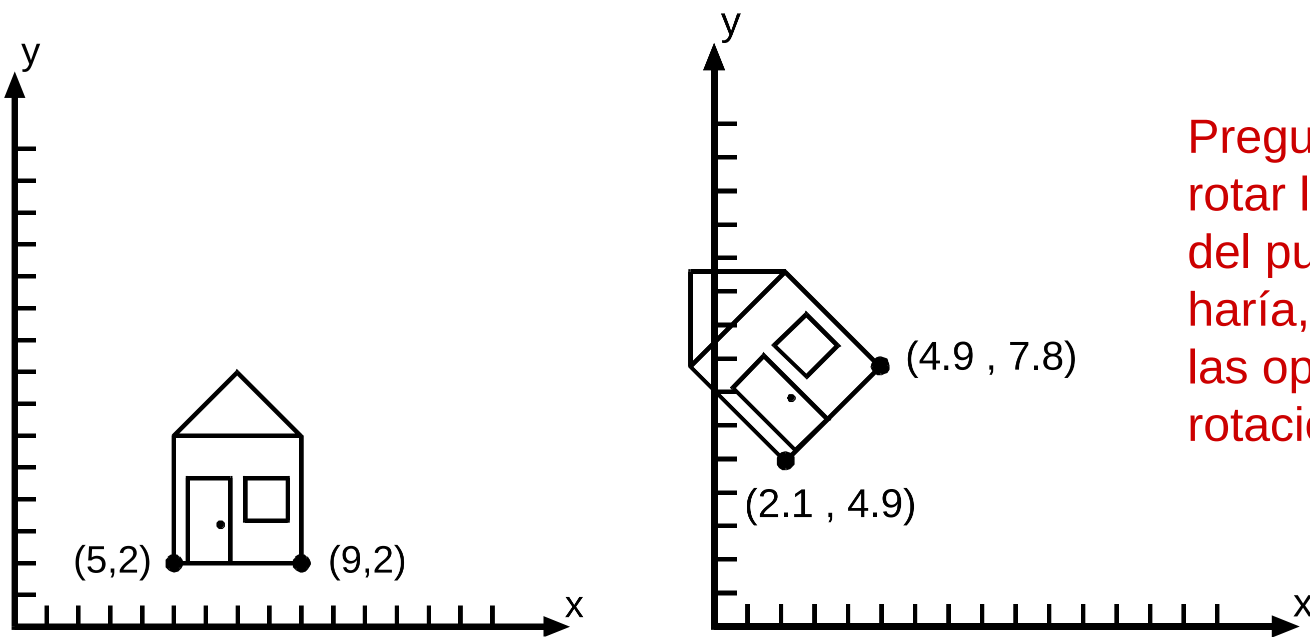
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow P' = R \cdot P$$

Ec.7

Matriz R

Rotación

En la figura se muestra la rotación de la casa 45°, con respecto al origen.



Antes de la rotación

Después de la rotación

Pregunta 1: Si se desea rotar la casa alrededor del punto (5,2), ¿cómo lo haría, si sólo conociera las operaciones de rotación y traslación?

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Las representaciones matriciales obtenidas hasta ahora para traslación, escalamiento y rotación son, respectivamente

$$P' = T + P \qquad \text{Ec. 3}$$

$$P' = S \cdot P \qquad \text{Ec. 5}$$

$$P' = R \cdot P \qquad \text{Ec. 7}$$

Problema: La traslación es tratada de forma diferente

Solución: Utilizar un sistema de coordenadas homogéneas

En las coordenadas homogéneas cada punto se representa siguiendo la forma (x,y,W).

Dos vectores en coordenadas homogéneas (x,y,W) y (x',y',W') representan al mismo punto si y sólo si uno es múltiplo del otro.

Para W ≠ 0 se obtiene los puntos x / W, y / W a los cuales se les llama “coordenadas cartesianas del punto homogéneo”.

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Las ecuaciones de traslación (Ec. 1) pueden expresarse como una matriz 3x3 en coordenadas homogéneas.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 10}$$

Esta ecuación puede ser representada de la siguiente forma:

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P, \qquad \text{Ec. 11}$$

donde

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 12}$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Supóngase que un punto P es trasladado por $T(dx_1,dy_1)$ al punto P' y luego es trasladado por $T(dx_2,dy_2)$ al punto P''.

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P, \qquad \text{Ec. 13}$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P' \qquad \text{Ec. 14}$$

Sustituyendo la ecuación 13 en la ecuación 14, se obtiene:

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot \left(T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P\right) = \left(T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})\right) \cdot P \qquad \text{Ec. 15}$$

El producto matricial $T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 16}$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Por lo tanto la traslación neta es $T(dx_1 + dx_2\ ,\ dy_1 + dy_2)$. El producto matricial efectuado no es más que la composición de $T(dx_1,dy_1)$ y $T(dx_2,dy_2)$.

Por otro lado, puede verificarse con facilidad que la transformación inversa de una traslación $T(dx,dy)$ no es más que $T^{-1}(dx,dy) = T(-dx,-dy)$.

Un procedimiento similar al efectuado con la traslación puede aplicarse al escalamiento, obteniendo una nueva representación matricial de la ecuación 4, de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 17}$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Definiendo

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 17}$$

se tiene que

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P \qquad \text{Ec. 19}$$

Dados

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P \qquad \text{Ec. 20}$$

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P' \qquad \text{Ec. 21}$$

podemos sustituir la ecuación 20 en la ecuación 21, obteniéndose

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot \left(S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P\right) = \left(S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})\right) \cdot P \qquad \text{Ec. 22}$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

el producto matricial $S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})$ es

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad s_x \neq 0, s_y \neq 0 \qquad \text{Ec. 23}$$

la inversa de un escalamiento $S(s_x,s_y)$ es $S^{-1}(s_x,s_y)= S(1/s_x,1/s_y)$

Similarmente, las ecuaciones de rotación (Ec. 6) pueden ser representadas como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 24}$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

donde

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Ec. 25

teniéndose que

$$P' = R(\theta) \cdot P$$ Ec. 26

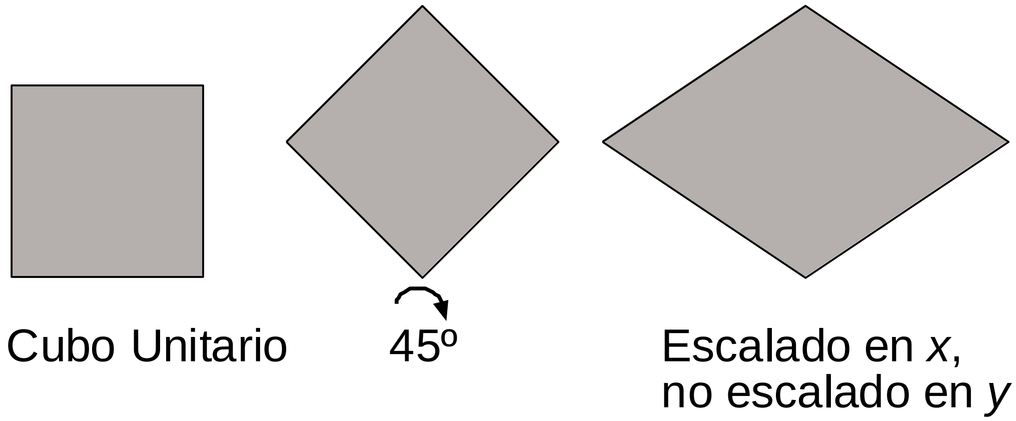
Puede demostrarse que dos rotaciones sucesivas son aditivas, es decir, que dados dos ángulos θ_1 y θ_2 se cumple la igualdad

$$R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2).$$

Por otra parte, es comprobable que la inversa de una rotación R(θ) es $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

El producto de una secuencia arbitraria de matrices de rotación, traslación y escalamiento constituyen **transformaciones afínes**, teniendo la propiedad de conservar el paralelismo de las líneas, pero no longitudes ni ángulos .

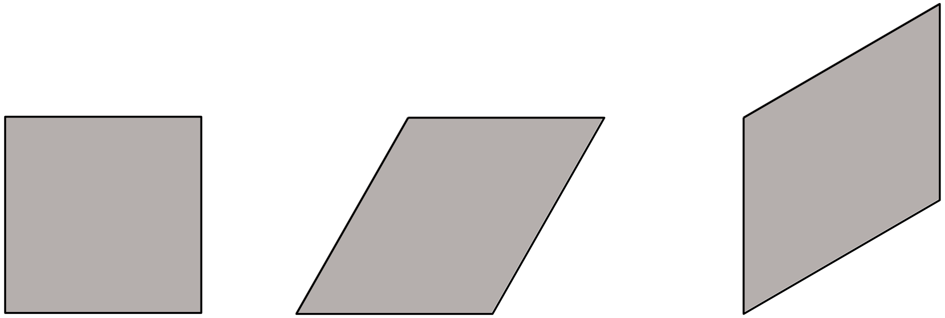


Un cubo unitario rotado 45º en sentido horario y luego escalado no uniformemente. El resultado es una transformación afín de la figura inicial, donde se mantiene el paralelismo de las líneas, pero no las longitudes ni ángulos originales.

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

Transformación de Sesgado (shear).

Existen dos tipos de sesgos en 2D, con respecto al eje x y con respecto al eje y.



Cubo unitario estirado en *x*

Cubo unitario estirado en *y*

Un cubo unitario y el efecto de aplicarle la transformación de sesgado. En cada caso la longitud de las líneas oblicuas es mayor a 1.

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

La matriz de transformación para el sesgado en el eje x se expresa como

$$SH_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 28}$$

Análogamente, la matriz de transformación para el sesgado en el eje y se expresa como

$$SH_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 29}$$

Coordenadas homogéneas y representación matricial de transformaciones bidimensionales

El propósito básico de componer transformaciones es ganar eficiencia aplicando una sola transformación compuesta a un punto, en vez de aplicar una serie de transformaciones, una tras otra.

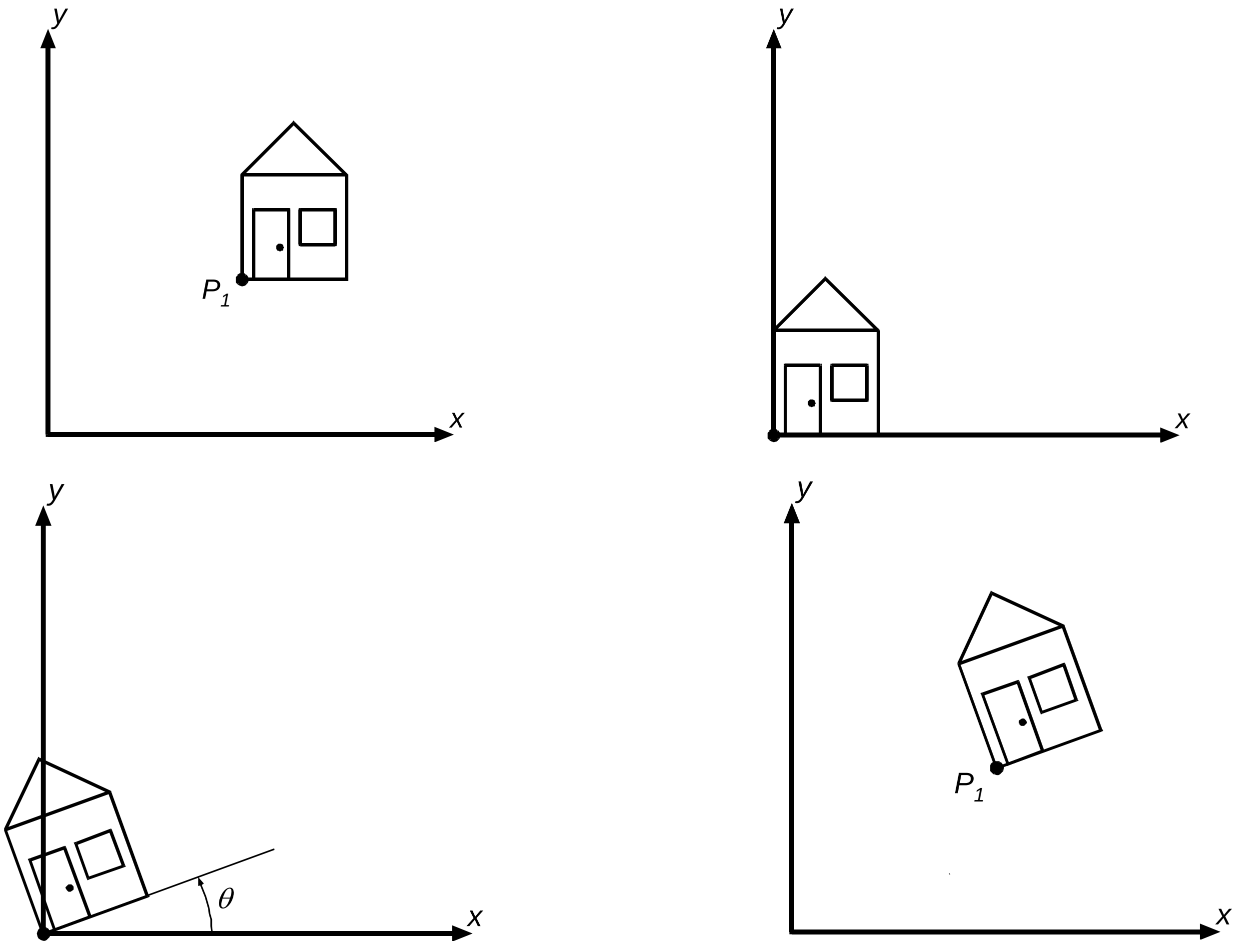
Si se considera la rotación de un objeto con respecto a un punto arbitrario P_1, podemos subdividir el problema aplicando tres transformaciones fundamentales:

1) Trasladar de forma que P_1 coincida con el origen
2) Rotar
3) Trasladar de forma que el punto en el origen retorne a P_1

La secuencia propuesta se ilustra en la siguiente figura, en donde el objeto es rotado con respecto al punto $P_1(x_1,y_1)$. La primera traslación es $T(-x_1,-y_1)$, haciéndose por último la traslación inversa $T(x_1,y_1)$.

Composición de transformaciones bidimensionales

Composición de transformaciones bidimensionales



Rotación de un objeto en un ángulo q con respecto al punto P1

Composición de transformaciones bidimensionales

La transformación neta aplicada es

$$T(x_1, y_1)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_1,-y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & x_1(1-\cos\theta)+y_1 sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta)-x_1 sen\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 30}$$

Un enfoque similar puede usarse para escalar un objeto con respecto a un punto arbitrario P_1.

Ahora tenemos la respuesta a la pregunta 1

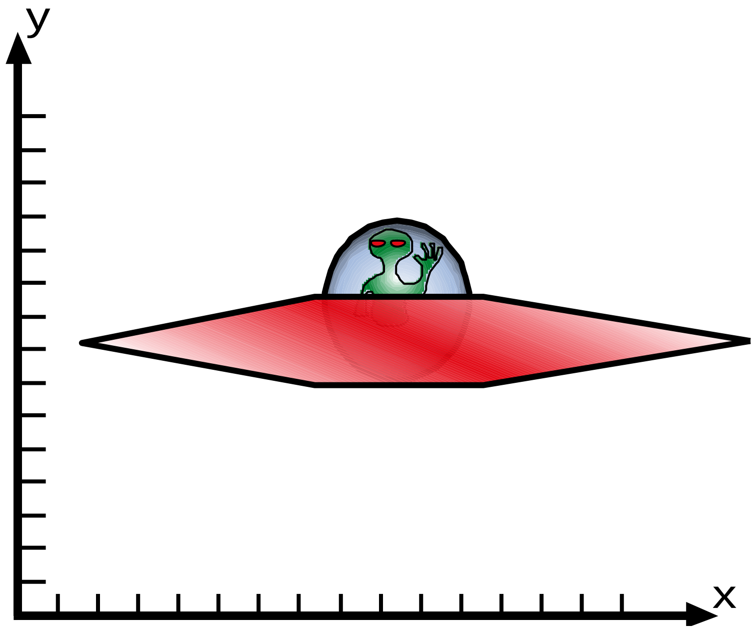
Composición de transformaciones bidimensionales

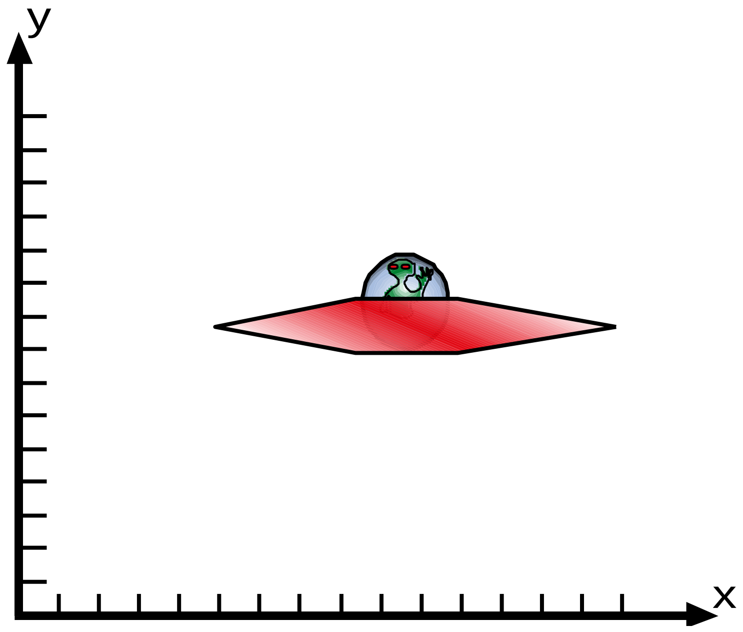
$$T(x_1,y_1)\cdot S(s_x,s_y)\cdot T(-x_1,-y_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & x_1\\ 0 & 1 & y_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s_x & 0 & 0\\ 0 & s_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -x_1\\ 0 & 1 & -y_1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}s_x & 0 & x_1(1-s_x)\\ 0 & s_y & y_1(1-s_y)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 31}$$

Es frecuente el deseo de realizar un escalamiento o rotación con respecto al centro geométrico de una figura. Para lograr este propósito se puede aplicar el método recientemente expuesto de forma que el punto arbitrario P_1 corresponda ahora a las coordenadas del centro $P_c(x_c,y_c)$. Así el escalamiento in-situ no sería más que aplicar $T(x_c,y_c)\cdot S(s_x,s_y)\cdot T(-x_c,-y_c)$ y la rotación in-situ correspondería a $T(x_c,y_c)\cdot R(\theta)\cdot T(-x_c,-y_c)$. La siguiente figura muestra un escalamiento aplicado a un objeto que se asemeja a un OVNI.

Composición de transformaciones bidimensionales





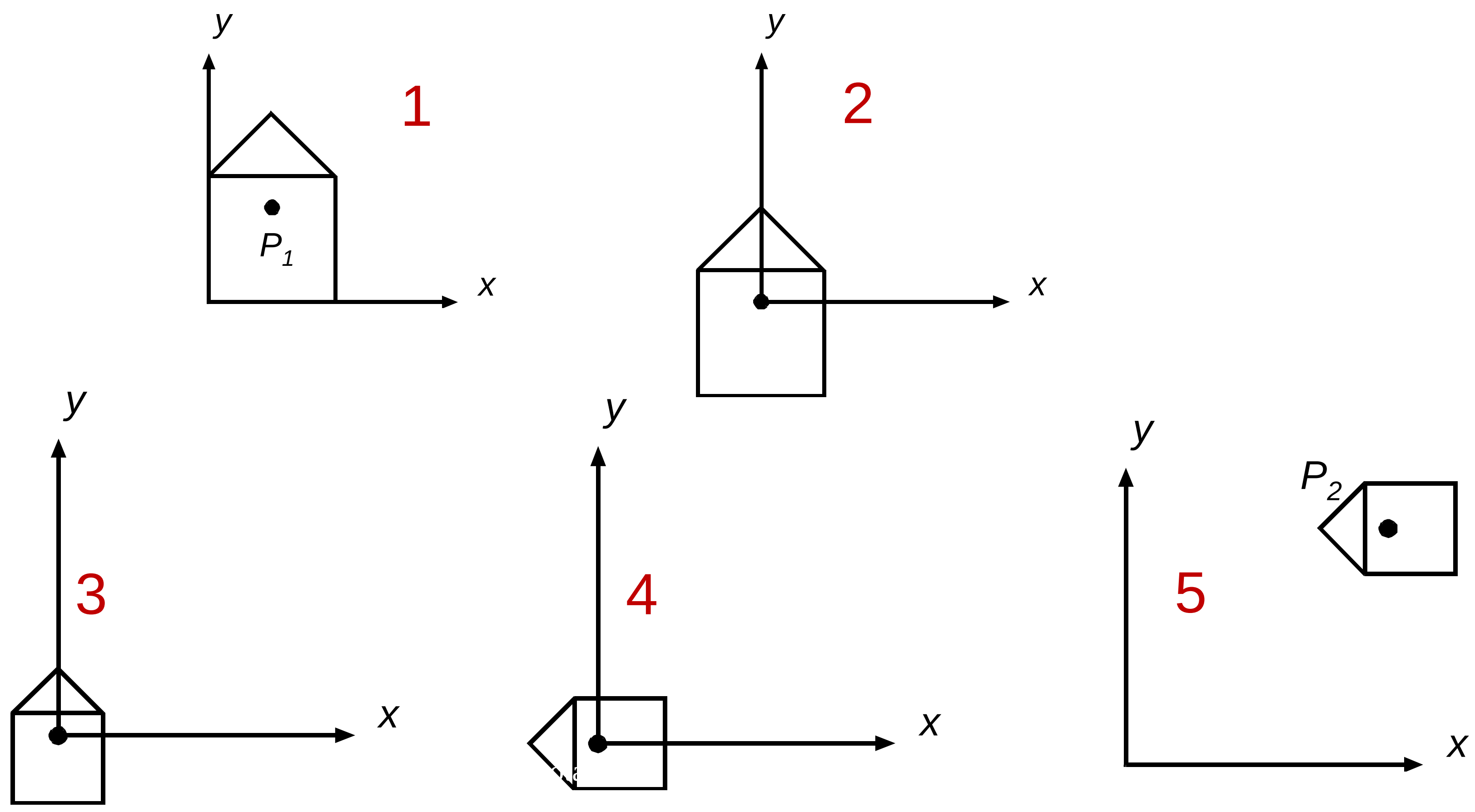
Composición de transformaciones bidimensionales

Puede darse el caso de querer escalar, rotar y luego posicionar un objeto como la casa mostrada en la figura siguiente, con P_1 como centro de la rotación y el escalamiento.

Trasladar P_1 al origen, efectuar el escalamiento y la rotación, y luego trasladar desde el origen a la nueva posición P_2. La matriz que represente dichas transformaciones corresponde a:

$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1) \qquad \text{Ec. 32}$$

Composición de transformaciones bidimensionales



Escalamiento y rotación de un objeto con respecto al punto P_1 y posterior posicionamiento llevando P_1 al punto final P_2

Composición de transformaciones bidimensionales

Se sabe que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Sin embargo, al aplicar transformaciones fundamentales de traslación, escalamiento y rotación se dan casos especiales donde el producto de matrices es conmutativo.

Una matriz de traslación seguida de otra matriz de traslación pueden conmutarse sin afectar el resultado. De forma semejante, una matriz de escalamiento seguida de otra matriz de escalamiento pueden multiplicarse en cualquier orden, así como una matriz de rotación seguida de otra matriz de rotación.

Otro caso donde la multiplicación de este tipo de matrices es conmutativa corresponde a tener una matriz de rotación y otra de escalamiento uniforme ($s_x = s_y$).

En estos casos no es necesario preocuparse por el orden en la manipulación de las matrices.

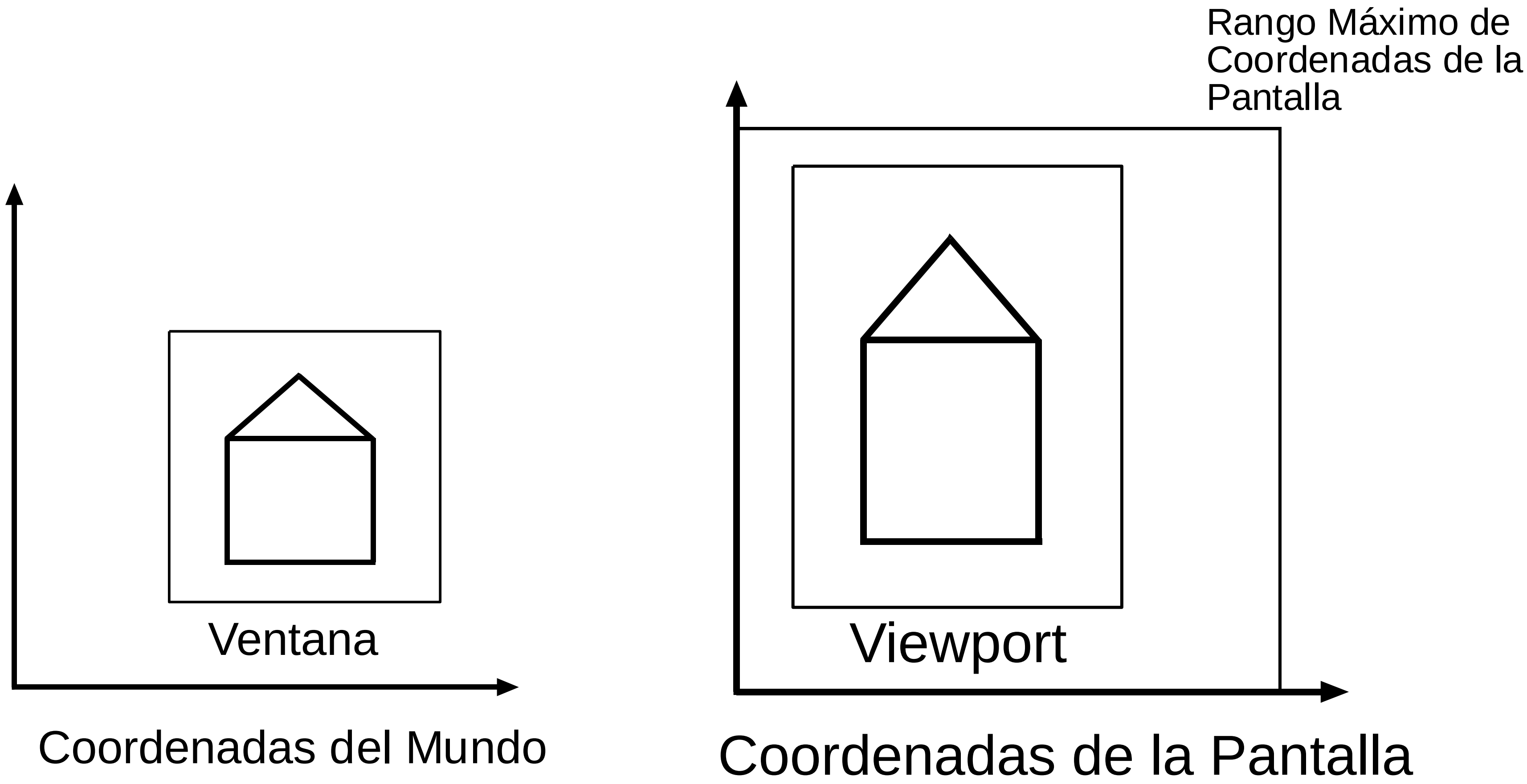
Transformación ventana-área de vista

Transformación ventana-área de vista

Dadas las primitivas de salida especificadas en coordenadas del mundo debe especificarse como llevar dichas coordenadas a coordenadas de pantalla para que puedan ser mostradas.

Se debe especificar una región rectangular (ventana) en coordenadas de mundo y una correspondiente región rectangular en coordenadas de la pantalla (viewport), en la cual se efectuará el mapeo de la ventana del mundo.

Transformación ventana-área de vista



La ventana en coordenadas del mundo y el viewport en coordenadas de pantalla determinan el mapeo que es aplicado a todas las primitivas en coordenadas del mundo

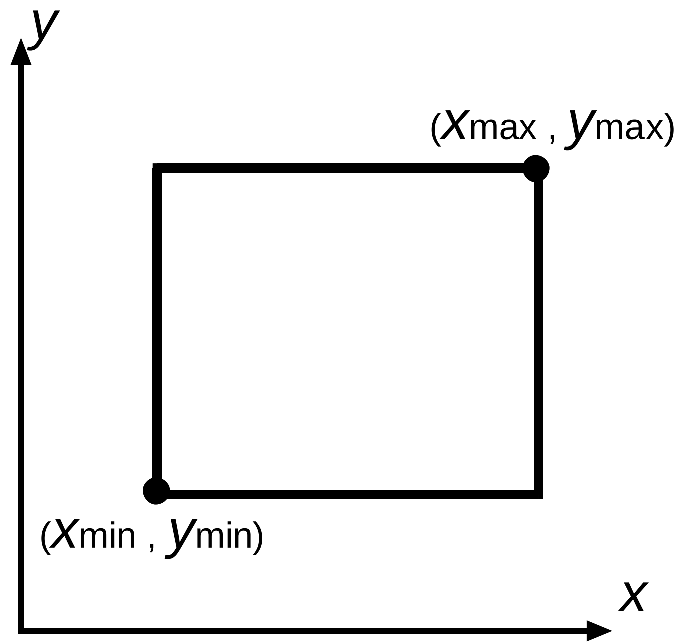
Transformación ventana-área de vista

Dados:

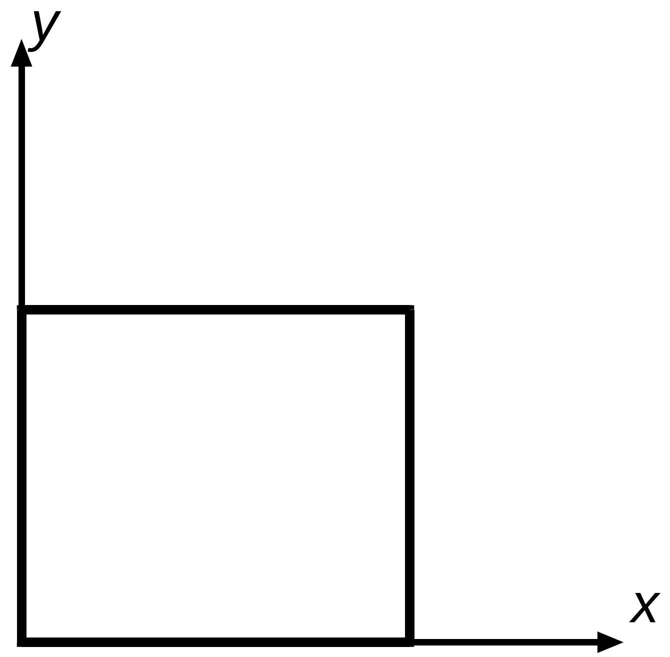
- la ventana (en coordenadas del mundo)
- el viewport,

la matriz de transformación que mapea la ventana a coordenadas de pantalla puede ser desarrollada mediante la composición de tres transformaciones simples sugeridas en la figura siguiente:

Transformación ventana-área de vista

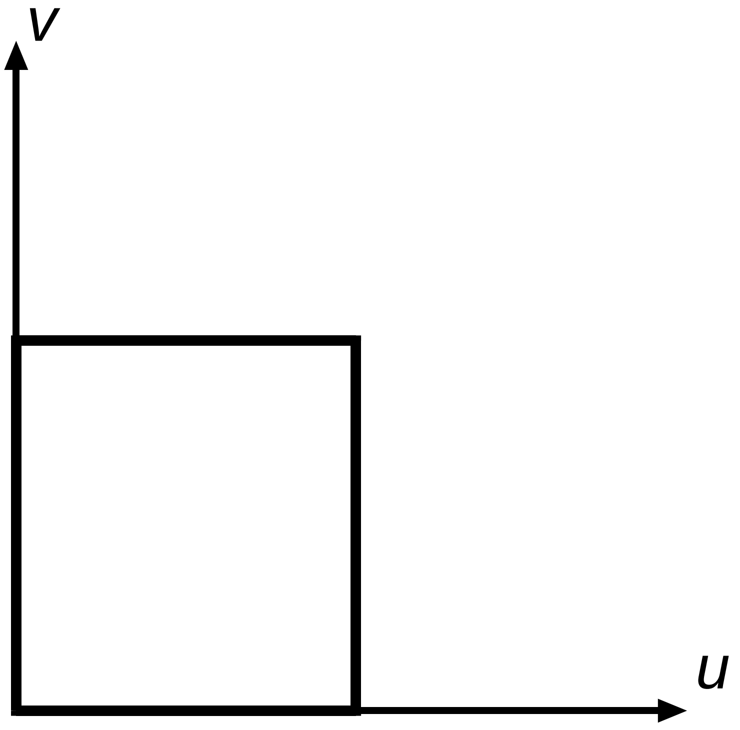


Ventana en Coordenadas del Mundo

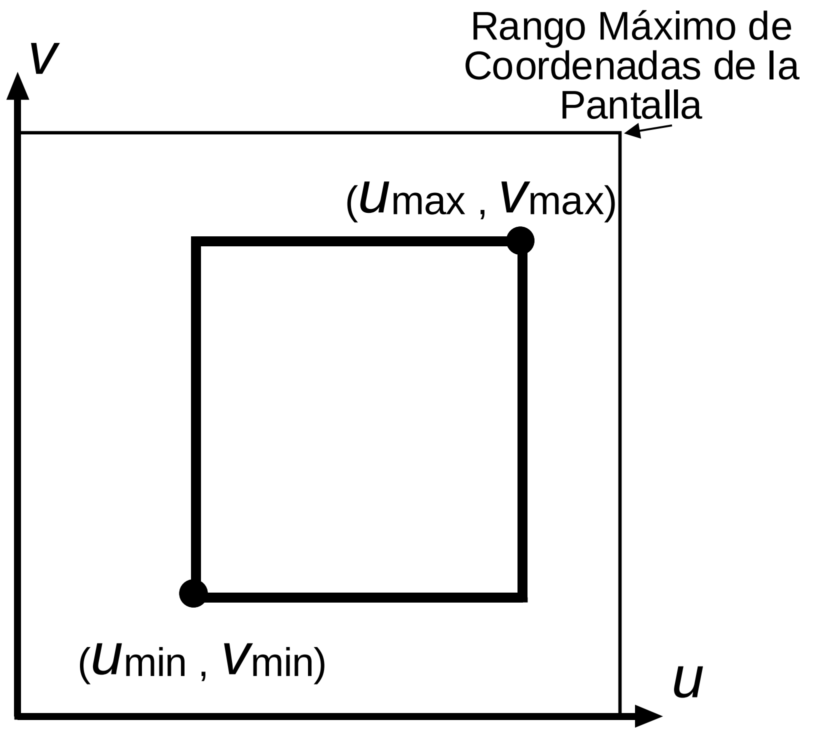


Ventana trasladada al origen

Transformación ventana-área de vista



Ventana Escalada al tamaño
del Viewport



Trasladada en (umin , vmin) a la
posición final

Pasos para transformar una ventana en coordenadas del
mundo al Viewport en coordenadas de pantalla

Transformación ventana-área de vista

Como se puede apreciar en lo anterior, la ventana, especificada por su esquina inferior izquierda y su esquina superior derecha, es primero trasladada al origen de las coordenadas del mundo. Luego, la ventana es escalada para coincidir con las dimensiones del viewport.

Posteriormente, se utiliza una traslación para posicionar el viewport. La matriz que corresponde a estas transformaciones Mwv es:

$$M_{wv} = T(u_{\min}, v_{\min}) \cdot S\left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}\right) \cdot T(-x_{\min}, -y_{\min})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_{\min} \\ 0 & 1 & v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{\min} \\ 0 & 1 & -y_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 33}$$

Transformación ventana-área de vista

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & -x_{\min} \cdot \dfrac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + u_{\min} \\ 0 & \dfrac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} & y_{\min} \cdot \dfrac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} + v_{\min} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Ec. 33}$$

Transformación ventana-área de vista

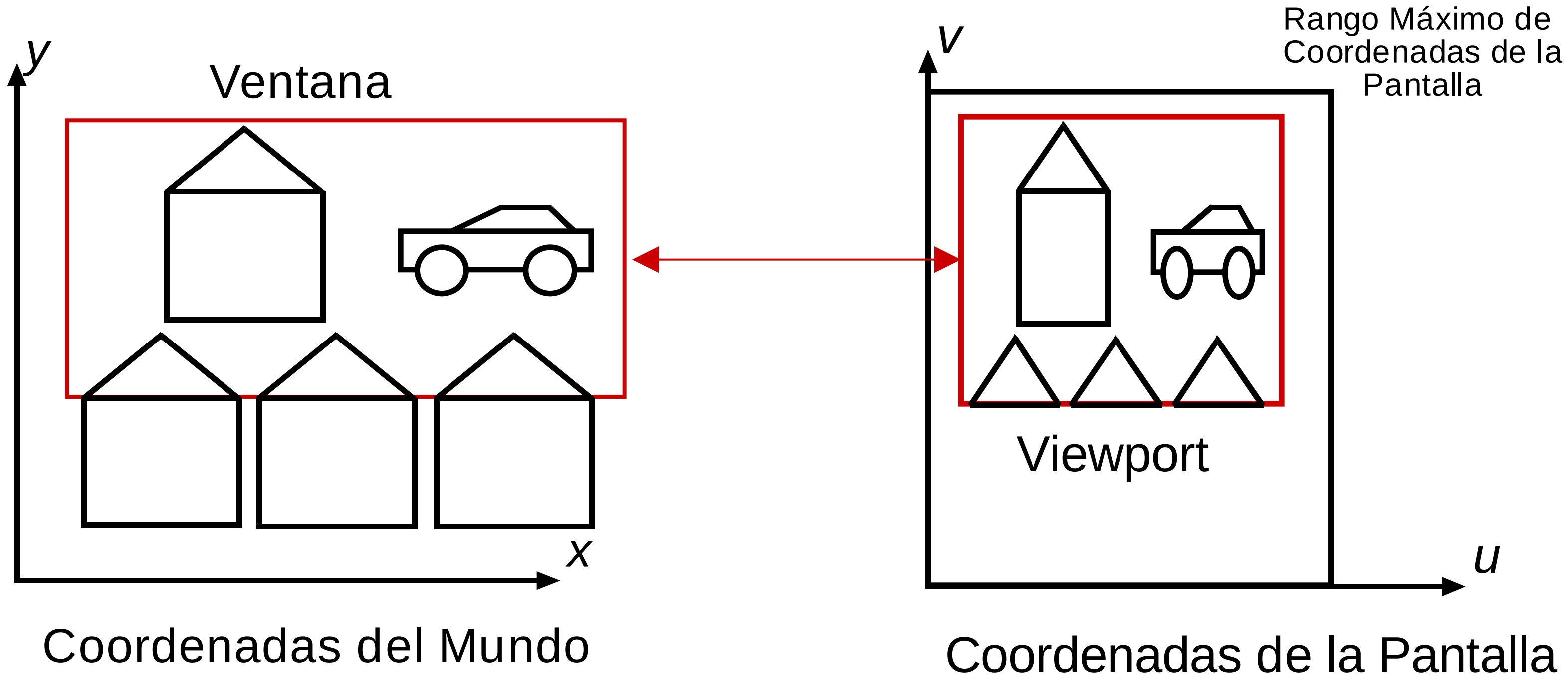
Multiplicando P = M_{wv} [x y 1] ^{T} se consigue el resultado esperado:

$$P = \left[(x - x_{\min}) \cdot \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} + u_{\min}, \quad (y - y_{\min}) \cdot \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} + v_{\min}, \quad 1 \right] \qquad \text{Ec. 34}$$

Este resultado corresponde al punto P expresado en coordenadas de la pantalla.

Transformación ventana-área de vista

La transformación ventana-viewport también puede combinarse con rutinas de recorte (clipping) en relación al tamaño de la ventana.



Las primitivas de salida en coordenadas del mundo son recortadas en relación al marco de la ventana. El remanente es mostrado en el viewport

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

La representación de transformaciones bidimensionales como matrices de 3x3 tiene un equivalente para las transformaciones tridimensionales, las cuales son representadas como matrices de 4x4.

Para permitir esto, el punto (x,y,z) será representado en coordenadas homogéneas como $(W.x,\ W.y,\ W.z,\ W)$, con $W \neq 0$. Si $W \neq 1$, entonces W es dividido dentro de las tres primeras coordenadas homogéneas para así obtener el punto cartesiano tridimensional (x,y,z).

Esto implica, que dos puntos homogéneos H_1 y H_2 son el mismo punto tridimensional sí y solo sí $H_1 = c.H_2$, para cualquier constante $c \neq 0$.

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Este tipo de sistema es el más conveniente cuando se piensa en gráficos tridimensionales, ya que se puede dar una interpretación natural de los aquellos valores de z que se encuentran muy distantes del observador. Además, es más lógico superponer este tipo de sistema sobre la cara del plano de visualización (display).

Traslación:

La matriz de traslación tridimensional es una simple extensión de la bidimensional:

$$T(Dx, Dy, Dz) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & Dx \\ 0 & 1 & 0 & Dy \\ 0 & 0 & 1 & Dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Al multiplicar esta matriz por el vector de puntos [x, y, z,1] queda:

$$T(Dx, Dy, Dz) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + Dx \\ y + Dy \\ z + Dz \\ 1 \end{vmatrix}$$

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Escalamiento:

La matriz de escalamiento es similarmente extendida:

$$S(Sx, Sy, Sz) = \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y al multiplicarla por el vector de puntos, queda:

$$S(Sx, Sy, Sz) \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \cdot Sx \\ y \cdot Sy \\ z \cdot Sz \\ 1 \end{vmatrix}$$

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Rotación:

La rotación bidimensional es justo una rotación con respecto al eje z. En tres dimensiones, una rotación con respecto al eje z es:

$$Rz(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esto es fácilmente verificable: una rotación de 90 grados del vector unitario x, produce el vector unitario y. Al multiplicar $R_z(\theta)$, con θ=90, por el vector unitario x :

$$\underset{Rz(90)}{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}} = \underset{y}{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}} = y$$

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

se obtiene el vector unitario y.

La matriz de rotación con respecto al eje x es:

$$Rx(\theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matriz de rotación con respecto al eje y es

$$Ry(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Las columnas (y las filas) de la submatriz superior de 3 x 3 de $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares con la misma interpretación de los bidimensionales.

Todas estas matrices de transformación tridimensionales tienen inversas.

La inversa de T es obtenida negando D_x, D_y y D_z; para S, reemplazando S_x, S_y, S_z por sus recíprocos; para cada una de las matrices de rotación, negando el ángulo de rotación.

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Haciendo la composición de una secuencia arbitraria de rotaciones con respecto a los ejes x, y, z, se creará una matriz A de la forma:

$$A = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

La submatriz de rotación de 3 x 3 de la matriz A, se dice que es ortogonal, porque sus columnas son vectores unitarios mutuamente ortogonales. Estos vectores son rotados por la matriz con respecto a los ejes x, y, z.

Las matrices de rotación conservan las longitudes y los ángulos, mientras que las de escalamiento no.

Para cualquier matriz ortogonal B, su inversa es justo su transpuesta:

$B^{-1} = B^T$.

Representación matricial de transformaciones tridimensionales

Un arbitrario número de matrices de rotación, escalamiento y traslación pueden ser multiplicadas en conjunto. El resultado siempre será de la forma:

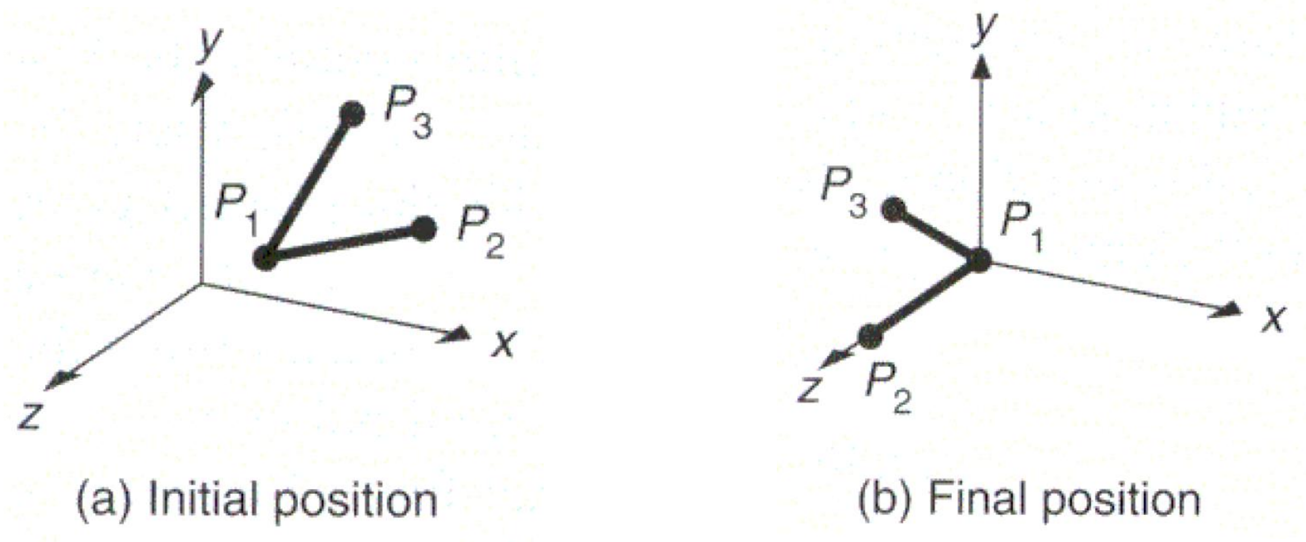
$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Composición de transformaciones tridimensionales

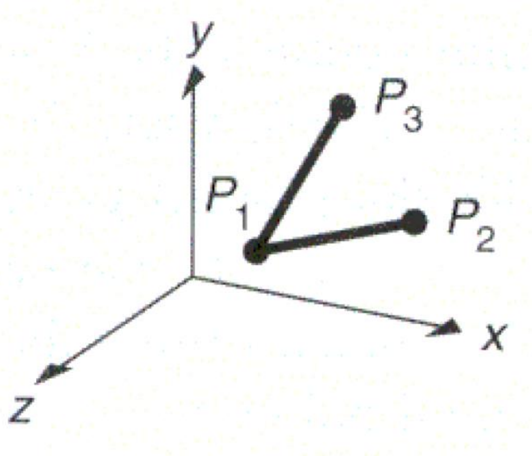
Composición de transformaciones tridimensionales

La composición de las tres transformaciones básicas tridimensionales pueden generar diferentes resultados.

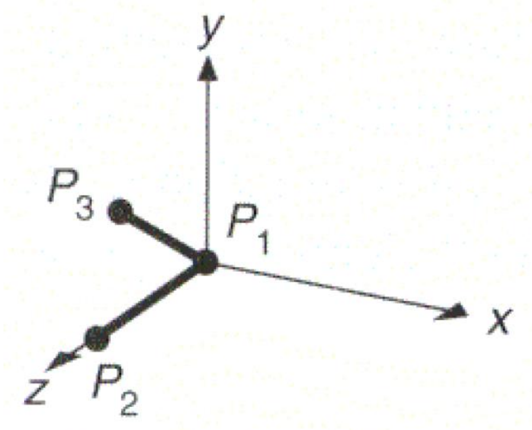
El objetivo es transformar los segmentos de recta P_1P_2 y P_1P_3 de la figura que se encuentra a continuación, desde la posición inicial a la posición final.



Composición de transformaciones tridimensionales



(a) Initial position



(b) Final position

Se aplican 4 Transformaciones:

1. Traslado de P_1 al origen.
2. Rotación alrededor de Y hasta que P_2 esté en el plano YZ.
3. Rotación alrededor de X hasta que P_1P_2 coincida con Z.
4. Rotación alrededor de Z hasta que P_3 esté en el plano YZ.

Composición de transformaciones tridimensionales

El punto P_1 ha sido trasladado al origen, P_1P_2 se encuentra en el lado positivo del eje z, P_1P_3 se encuentra en el plano (y,z). Las longitudes de las rectas no son afectadas por la transformación.

La transformación puede ser hecha en 4 pasos:

Paso 1: Trasladar P_1 al origen.

$$T(-x1,-y1,-z1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -x1 \\ 0 & 1 & 0 & -y1 \\ 0 & 0 & 1 & -z1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando la matriz de transformación T a P_1, P_2 y P_3 se obtiene

Composición de transformaciones tridimensionales

$$T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = P_1' \quad (1)$$

$$T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_2 = \begin{vmatrix} x2-x1 \\ y2-y1 \\ z2-z1 \\ 1 \end{vmatrix} = P_2' \quad (2)$$

$$T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_3 = \begin{vmatrix} x3-x1 \\ y3-y1 \\ z3-z1 \\ 1 \end{vmatrix} = P_3' \quad (3)$$

Composición de transformaciones tridimensionales

Paso 2: Rotar con respecto al eje y. La rotación es con el ángulo positivo θ, por lo cual

$$sen\theta = \frac{z2'}{D1} = \frac{(z2 - z1)}{D1}$$

$$-\cos\theta = \frac{x2'}{D1} = -\frac{x2 - x1}{D1}$$

$$\text{donde } D1 = \sqrt{(z2 - z1)^2 + (x2 - x1)^2}$$

Composición de transformaciones tridimensionales

Sustituyendo estos valores en la matriz R_y y multiplicándola por el vector P_2' se obtiene el vector:

$$P_2'' = Ry(\theta - 90) \cdot P_2' = \begin{vmatrix} 0 \\ y2 - y1 \\ D_1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Composición de transformaciones tridimensionales

Paso 3: Rotar con respecto al eje x. La rotación es con el ángulo ϕ, para el cual

$$\cos(\phi) = \cos\phi = \frac{z_2''}{\left\| P_1'' P_2'' \right\|}$$

$$\sin(\phi) = \sin\phi = \frac{y_2''}{\left\| P_1'' P_2'' \right\|}$$

$$\text{donde } \left\| P_1'' P_2'' \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Composición de transformaciones tridimensionales

Sustituyendo la matriz de rotación R_x y multiplicándola por el vector P_2'' se obtiene el vector:

$$P_2''' = Rx(\phi)\cdot P_2'' \quad \text{y sustituyendo } \mathrm{P}_2'' \text{ por su valor,}$$

$$P_2''' = Rx(\phi)\cdot Ry(\theta-90)\cdot P_2' \quad \text{, al sustituir } P_2' \text{ por su valor, resulta :}$$

$$P_2''' = Rx(\phi)\cdot Ry(\theta-90)\cdot T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \| P_1P_2 \| \\ 1 \end{vmatrix}$$

De esta forma, el segmento de recta P_1P_2 coincide con el eje z positivo.

Composición de transformaciones tridimensionales

Para el segmento de recta P_1P_3 sería algo similar:

$$P_3''' = Rx(\phi)\cdot Ry(\theta-90)\cdot T(-x1,-y1,-z1)\cdot P_3 = \begin{vmatrix} x3''' \\ y3''' \\ z3''' \\ 1 \end{vmatrix}$$

Paso 4: Rotar con respecto al eje z. La rotación es con el ángulo positivo α, con:

$$\cos\alpha = \frac{y3'''}{D2}$$

$$\sin\alpha = \frac{x3'''}{D2}$$

$$\text{donde } D2 = \sqrt{(x3''')^2 + (y3''')^2}.$$

Composición de transformaciones tridimensionales

Sustituyendo la matriz de rotación R_z por los valores de cosα y sinα obtenidos anteriormente y multiplicándola por las matrices compuestas anteriores se obtiene la matriz compuesta de transformación final:

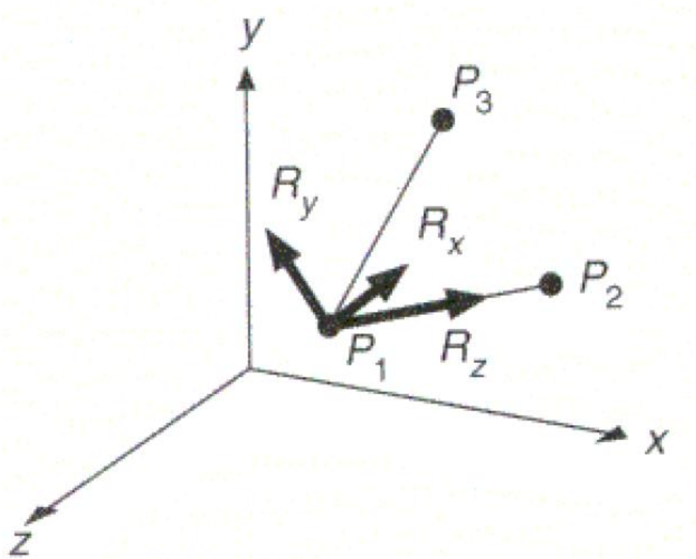
$$R_z(\alpha)\cdot R_x(\phi)\cdot R_y(\theta-90)\cdot T(-x_1,-y_1,-z_1)$$

Al aplicar esta transformación a cada uno de los puntos P_1, P_2 y P_3 , hace que:

P_1 se traslade al origen,
P_2 es transformado al eje positivo z y
P_3 es transformado al plano yz.

Composición de transformaciones tridimensionales

Una forma más simple para obtener la misma matriz $R_z(\alpha).R_y(\phi).R_x(\theta\text{-}90)$ es usando las propiedades de las matrices ortogonales. Definimos los vectores unitarios R_x y R_z, como se ve a continuación:



$$R_z = \frac{P_1P_2}{\|P_1P_2\|} = [r_{1_z} \quad r_{2_z} \quad r_{3_z}]$$

$$R_x = \frac{P_1P_3 \times P_1P_2}{\|P_1P_3 \times P_1P_2\|} = [r_{1_x} \quad r_{2_x} \quad r_{3_x}]$$

Composición de transformaciones tridimensionales

El vector unitario R_z (perteneciente al segmento de recta P_1P_2) rotará hacia el eje positivo z. El vector unitario R_x (ortogonal al plano P_1,P_2,P_3) rotará hacia el eje positivo x. Finalmente, para obtener el vector unitario R_y, se hace el producto cartesiano de los vectores R_z y R_x, como sigue:

$$R_y = R_z \times R_x = \begin{bmatrix} r_{1_y} & r_{2_y} & r_{3_y} \end{bmatrix}$$

Este vector resultante, rotará hacia el eje positivo y. Entonces, la matriz compuesta de transformación viene dada por:

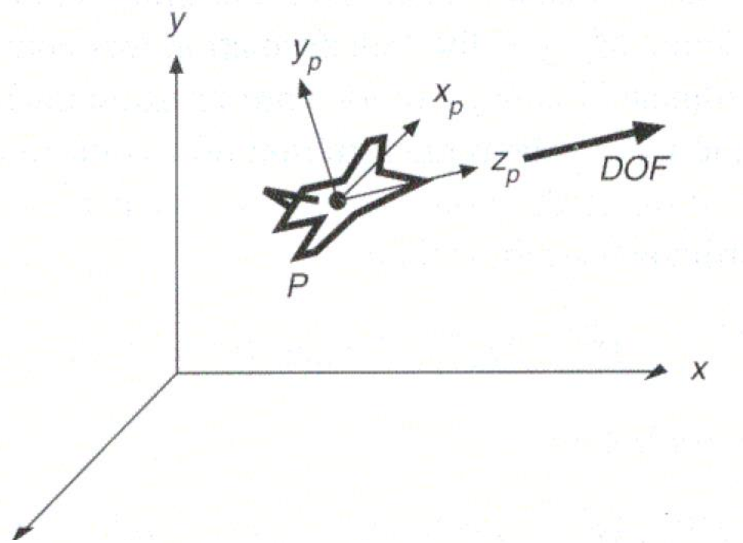
Composición de transformaciones tridimensionales

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}=\begin{vmatrix} r_{1_x} & r_{2_x} & r_{3_x} & 0 \\ r_{1_y} & r_{2_y} & r_{3_y} & 0 \\ r_{1_z} & r_{2_z} & r_{3_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot T(-x_1,-y_1,-z_1)=R_z(\alpha)\cdot R_x(\phi)\cdot R_y(\theta-90)\cdot T(-x_1,-y_1,-z_1).$$

y se llegó al mismo resultado que con el método de los cuatro pasos. Por lo tanto este último es más rápido y más sencillo.

Una vez obtenida la transformación, podemos rotar, escalar, “sesgar” (shear) o incluso trasladar en ese nuevo sistema, y luego aplicando la transformación inversa $(\mathbf{R}\cdot\mathbf{T})^{-1}$ volver a la posición original.

Composición de transformaciones tridimensionales
(rotación para ubicar avión en el espacio)



El avión, que tiene su propio sistema de coordenadas, se quiere centrar en P, apuntando al DOF, y con x_p ortogonal al eje *y.*

DOF no debe estar alineado al eje y.

$$R = \begin{bmatrix} \lvert y \times DOF \rvert & \lvert DOF \times (y \times DOF) \rvert & \lvert DOF \rvert & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego se traslada al punto P quedando: $T(x_p, y_p, z_p) \cdot R$

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

Composición de transformaciones tridimensionales

Se ha visto transformar un conjunto de puntos de un objeto en otro conjunto de puntos, con ambos conjuntos en el mismo sistema de coordenadas.

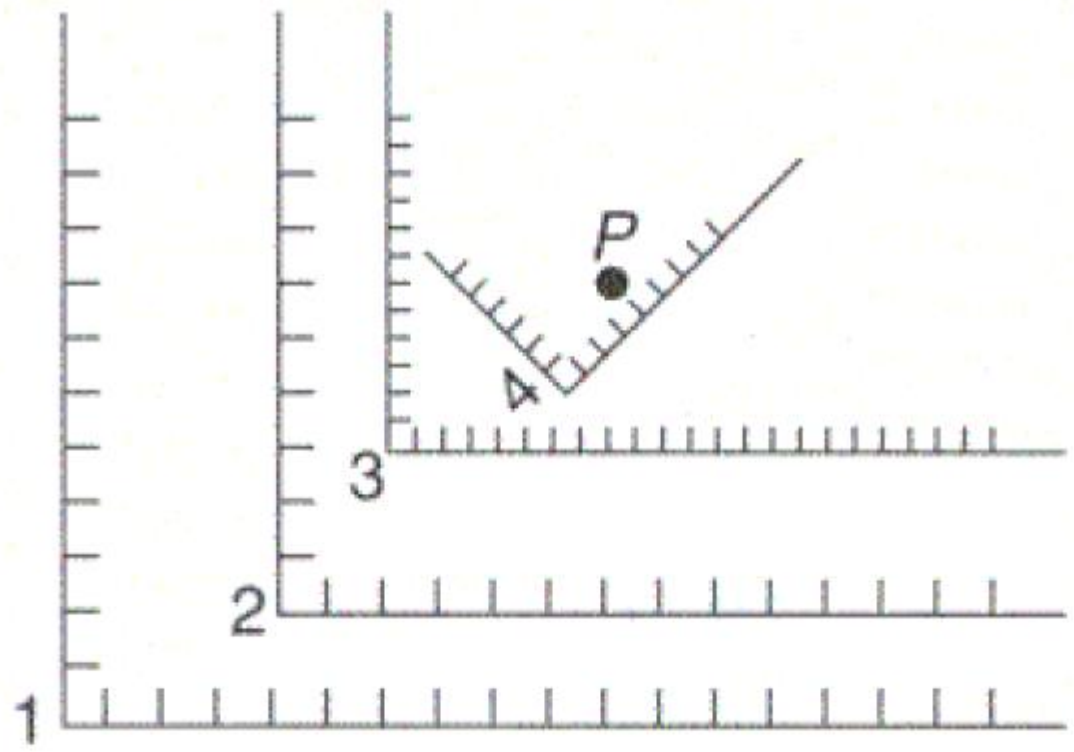
El sistema de coordenadas permanece inalterado y el objeto es transformado con respecto al origen del sistema para obtener el tamaño apropiado.

Alternativa: hacer un cambio en el sistema de coordenadas.

Este tipo de transformación es útil cuando se tienen múltiples objetos, cada uno definido con su propio (local) sistema de coordenadas, y se desea expresar las coordenadas de cada objeto en un simple y único sistema de coordenadas globales.

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

Por ejemplo: el punto de la siguiente figura tiene coordenadas (10,8), (6,6), (8,6) y (4,2) en los sistemas de coordenadas 1,2,3 y 4 respectivamente.



Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

La transformación desde el sist. de coordenadas 1 al 2 es M_{12}=T(-4,-2);
del sistema 2 al 3, M_{23}=T(-2,-3).S(2,2);
del sistema 3 al 4, M_{34}=T(-6.7,-1.8).R(-45°).

En general, la transformación M_{ij} transforma los ejes del sistema de coordenadas j al del sistema de coordenadas i, con respecto al sistema i.

Si P_i representa un punto cuyas coordenadas vienen dadas por el sistema de coordenadas i, entonces podemos escribir $P_i=M_{ij}.P_j$.

Por ejemplo, la transformación M_{21}, es M_{12}^{-1} = T(4,2). Similarmente para M_{32} se tiene que:

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

$M_{32}=M_{23}^{-1} = (T(-2,-3).S(2,2))^{-1} = S^{-1}(2,2).T^{-1}(-2,-3) = S(0.5,0.5).T(2,3).$

Además se tiene que $M_{13}=M_{12} .M_{23}$

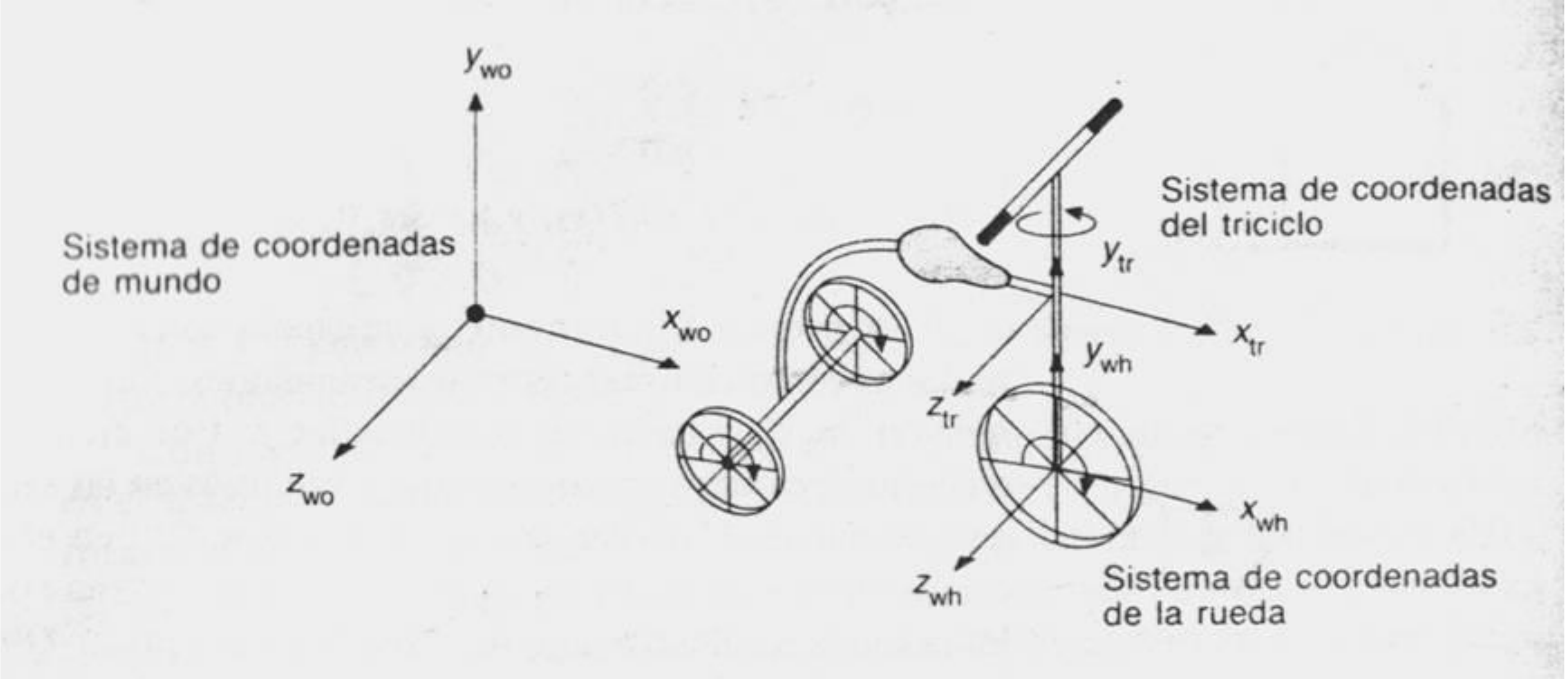
Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

Cuando ensamblamos varios objetos en un solo objeto de alto nivel, pensamos en dos tipos de transformaciones:

1. Definir los objetos de acuerdo a un sistema de coordenadas de mundo determinado, luego los transformamos a nuevas posiciones y orientaciones en el mismo sistema de coordenadas. Este enfoque da una vista irreal de que todos los objetos se encuentran en dicho sistema.
2. Pensar que cada objeto tiene su propio sistema de coordenadas y que cada uno de ellos puede ser rotado, escalado, trasladado, con su propio sistema de coordenadas redefinido en el nuevo sistema de coordenadas de mundo. Matemáticamente, ambos enfoques son exactamente iguales.

El empleo de diversos puntos de vista es muy útil cuando se especifica una información particular a cada uno de los subobjetos que se encuentran dentro del mundo. Veamos la siguiente bicicleta:

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas



Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

Por ejemplo, si se aplica un torque a la rueda delantera de la bicicleta, la rueda trasera tiene que rotar apropiadamente y debemos encontrar como se mueve la bicicleta como un todo dentro de las coordenadas del mundo.

Primero, la bicicleta y el sistema de coordenadas de la rueda delantera tienen posiciones iniciales en el sistema de coordenadas del mundo.

Como la bicicleta se mueve hacia adelante, la rueda delantera gira con respecto al eje z de su sistema de coordenadas local, mientras simultáneamente los sistemas de coordenadas de la rueda trasera y la bicicleta se mueven relativos al sistema de coordenadas del mundo.

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

Asumamos que el sistema de coordenadas de las ruedas y la bicicleta son paralelas al sistema de coordenadas del mundo, y que la rueda delantera se mueve en una línea recta paralela al eje x del mundo.

Como la rueda delantera rota con un ángulo α, un punto sobre esta rueda, denotado como P_{rueda}, rota a lo largo de una distancia αr, donde r es el radio de la rueda. Como la rueda esta sobre el suelo, la bicicleta se mueve igualmente αr unidades.

De esta forma, P_{rueda} tiene dentro del original sistema de coordenadas de la rueda, las siguientes coordenadas: $P'_{rueda} = T(\alpha r,0,0) \cdot R_z(\alpha) \cdot P_{rueda}$ y dentro del nuevo sistema de coordenadas (después de la traslación) de la rueda:

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

$P'_{rueda'} = R_z(\alpha) \, . \, P_{rueda}$

Para encontrar los puntos anteriores dentro del sistema original de coordenadas del mundo, transformamos las coordenadas de la rueda en coordenadas del mundo:

$P_{world} = M_{world,rueda} \, . \, P_{rueda} = M_{world,triciclo} \, . \, M_{triciclo,rueda} \, . \, P_{rueda}$

y dentro del nuevo sistema de coordenadas (después de la traslación) de la rueda:

$P'_{world} = M_{world,rueda} \, . \, P'_{rueda} = M_{world,rueda} \, . \, T(\alpha r,0,0) \, . \, R_z(\alpha) \, . \, P_{rueda}$

Las transformaciones como un cambio en el sistema de coordenadas

Alternativamente, podemos pensar como que lo que cambió fue la posición del sistema de coordenadas de la rueda, lo que significa que $M_{world,rueda}$ ha cambiado a $M_{world,rueda'}$. Por lo tanto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P'_{world} = M_{world,rueda'} \,.\, P'_{rueda'} &= M_{world,rueda} \,.\, M_{rueda,rueda'} \, P_{rueda} \\
&= M_{world,rueda} \,.\, \overbrace{T(\alpha r,0,0) \,.\, R_z(\alpha)} \,.\, P_{rueda}
\end{aligned}
$$

obteniéndose el mismo resultado.

FIN