Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Geometría y Álgebra Lineal 1.
Curso anual 2017.

Práctico 1.

Ejercicio 1. Resolver en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 8 \\ 3x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ x & + & & & z & = & 2 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \\ 4x & + & y & = & 1 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & 2z & = & -5 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 2x+4y-2z=0 \end{array}\right.$

Verificar que las soluciones halladas sean las correctas.

Ejercicio 2. Hallar las matrices aumentadas y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

$a1)\left\{\begin{array}{l} -x+y-z=-1 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+z=2 \end{array}\right.$ $a2)\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ 6x+3y-z=2 \\ y+z=3 \end{array}\right.$ $a3)\left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=0 \\ 6x+3y-z=2 \\ y+z=2 \end{array}\right.$

$b1)\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=-1 \\ x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right.$ $b2)\left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ x+y=3 \\ 4x+y=1 \end{array}\right.$ $b3)\left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ 3x-3y=6 \\ -x+y=-2 \end{array}\right.$

$c1)\left\{\begin{array}{l} 5x-y-z=4 \\ x-y+2z=-5 \end{array}\right.$ $c2)\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 2x+4y-2z=0 \end{array}\right.$ $c3)\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ -x-2y+z=1 \end{array}\right.$

Ejercicio 3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-z=1 \\ x+2z=0 \\ -x-y=0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-z=0 \\ x+2z=1 \\ -x-y=0 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-z=0 \\ x+2z=0 \\ -x-y=1 \end{array}\right.$

Ejercicio 4. Resolver y discutir los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & =2 \\ x & + & 2y & + & z & =3 \\ x & + & y & + & (\lambda-5)z & =\lambda \end{array}\right.$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. b) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} \alpha x & + & y & - & z & =\alpha \\ x & + & \alpha y & - & z & =1 \\ 3x & + & y & + & \beta z & =2 \\ x & - & y & - & z & =1 \end{array}\right.$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & z & =2 \\ x & + & y & + & 2z & =3 \\ x & + & 3y & + & \beta z & =1 \\ x & + & 2y & + & z & =\alpha \end{array}\right.$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. (*Primer parcial curso 2006*) Considere los siguientes sistemas de ecuaciones e indique la opción correcta.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$$

1. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ los sistemas tienen el mismo conjunto solución.
2. Si los sistemas tienen el mismo conjunto solución entonces $\lambda = 2$.
3. Si $\lambda = -1$ los sistemas tienen el mismo conjunto solución.
4. Si $\lambda \neq -1$ los sistemas no tienen el mismo conjunto solución.
5. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ los sistemas no tienen el mismo conjunto solución.

Ejercicio 6. Consideremos el sistema lineal homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas.

1. Probar que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es solución entonces $(c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$ también es solución $\forall\, c \in \mathbb{R}$.
2. Probar que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son soluciones entonces $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$ también es solución.

Ejercicio 7. Consideremos el sistema lineal homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas.

1. Mostrar que si $m < n$ entonces el sistema tiene soluciones no triviales.
2. Mostrar que si el sistema es determinado y admite como única solución la trivial (solución en que todas las incógnitas toman el valor 0), entonces $m \geq n$.
3. Dar ejemplos de sistemas homogéneos indeterminados en los que m sea mayor que n.

Ejercicio 8. Consideremos sistemas lineales cualesquiera, con m ecuaciones y n incógnitas.

1. Para el caso $m > n$, en que el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas,
   (a) dar ejemplos de sistemas incompatibles;
   (b) dar ejemplos de sistemas compatibles y determinados;
   (c) dar ejemplos de sistemas compatibles e indeterminados.
2. Repetir la parte anterior para el caso $m = n$, en que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
3. Para el caso $m < n$, en que el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas,
   (a) dar ejemplos de sistemas incompatibles;
   (b) dar ejemplos de sistemas compatibles e indeterminados;
   (c) mostrar que el sistema nunca puede ser compatible y determinado.

Ejercicios opcionales

Ejercicio 9. DIETAS
¡Basta de comida chatarra! Hemos decidido querernos a nosotros mismos y empezar a comer decentemente. ¿Qué nutrientes necesitamos?

Luego de relevar la información al respecto hemos llegado a la conclusión de que necesitamos que lo que comamos cada día nos aporte 3.000 calorías, 60 gramos de proteínas, 1 gramo de calcio y 10 miligramos de hierro. Nuestras costumbres, prejuicios y/o principios nos restringen a una dieta formada por los siguientes 6 alimentos, que contienen cada 100 gramos las cantidades de los nutrientes básicos que aparecen en la tabla:

Alimento	Calorías	Proteínas (g.)	Calcio (mg.)	Hierro (mg.)
Carne vacuna	250	18	10	2,5
Garbanzos	360	20	130	8
Lechuga	16	1,3	30	0,8
Huevos	160	12	60	3
Mayonesa	718	1,1	18	0,5
Leche	65	3,3	120	0,1

Diseñar una dieta adecuada a nuestras necesidades.

Ejercicio 10. TRANSICIONES EN UNA POBLACIÓN La población de un país está distribuida en tres grupos: los que viven en ciudades, los que viven en zonas rurales, y los que viven en el exterior del país. Llamemos c, r y e a los porcentajes de pobladores en cada grupo. Cada año, algunos habitantes cambian su situación, según el siguiente esquema:

de la **c**iudad	de la población **r**ural	del **e**xterior
60% sigue en la ciudad,	40% se mudan a la ciudad,	10% vuelven a la ciudad,
10% pasa a zona rural,	40% permanece donde está,	10% a zonas rurales,
30% emigran al exterior,	20% parte fuera del país,	80% sigue en el exterior.

En este modelo del comportamiento de la población no tenemos en cuenta el efecto de muertes y nacimientos.

1. Si un año comienza con un 40% de la población en la ciudad, un 30% en zonas rurales, y un 30% en el extranjero, ¿cuál será la distribución a fin del año? ¿Cómo comenzó el año anterior?
2. Hallar la expresión general de la transición de los porcentajes (c, r, e) de un año al siguiente.
3. ¿Existe alguna distribución (c, r, e) de la población tal que los porcentajes con los que las personas se distribuyen al final del año sean iguales a los del comienzo del año?