INSTITUTO DE FÍSICA

MECÁNICA NEWTONIANA

(Editado por última vez marzo 2020)

<u>Práctico I</u> – Cinemática de la Partícula y Movimiento Relativo.

Parte A: Ejercicios de Cinemática de la Partícula

Ejercicio Nº 1

a) Halle la expresión general de la aceleración de una partícula en coordenadas polares esféricas.

b) *Halle la velocidad y la aceleración que tiene una persona parada en Montevideo, Uruguay, vistas por un observador en el espacio exterior*. *Utilizando el resultado hallado en la parte (a),* exprese las mismas en un sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de la Tierra, y versores $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi\right)$ tales que el ángulo de nutación θ se mide a partir de la recta que une los polos (θ = 0 corresponde al polo norte). Considere, además, que el centro de la Tierra está fijo en el espacio, o sea, desprecie el movimiento de traslación.

<u>DATOS</u>: Radio de la tierra R ≈ 6400 km.

Montevideo se encuentra a unos 35º de latitud sur.

Ejercicio Nº 2

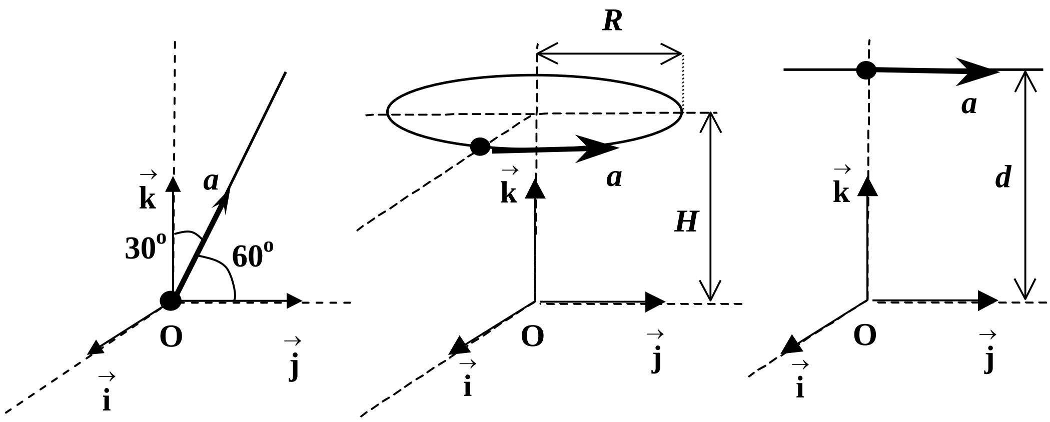
Consideremos una partícula que está obligada a moverse en las curvas *a*, *b* y *c* que se describen a continuación y que se muestran en las figuras correspondientes, de forma tal que la componente tangencial de la aceleración es constante ($\ddot{s} = a$, constante). Inicialmente (en t = 0) la partícula se encuentra en la posición indicada en las figuras, con velocidad inicial nula y la aceleración tiende a moverla en el sentido indicado (se indica la aceleración tangencial solamente).

Escriba, en todos los casos y para todo instante t posterior, el vector aceleración, el vector velocidad y las leyes horarias en coordenadas intrínsecas, cartesianas, cilíndricas y esféricas (elija como origen de coordenadas el punto O indicado en las figuras para todos los sistemas, y el eje polar según la dirección del versor $\vec{k}$ para coordenadas cilíndricas y esféricas). Escriba también en cada caso el triedro de Frenet *en las otras bases*.

a) Una recta que pasa por el origen de coordenadas y está contenida en el plano $O\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}}$, inclinada 60º respecto al eje $O\vec{\mathbf{j}}$, y por lo tanto 30º respecto al $O\vec{\mathbf{k}}$.

b) Una circunferencia de radio R, paralela al plano $O\vec{\mathbf{i}}\,\vec{\mathbf{j}}$, centrada respecto al eje $O\vec{\mathbf{k}}$, y a una altura $\boldsymbol{H}$ respecto a dicho plano, de forma que $\frac{R}{H} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Una recta contenida en el plano $O\vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{k}}$, paralela al eje $O\vec{\mathbf{j}}$, pero a una distancia *d* del mismo.



(a) (b) (c)

Ejercicio Nº 3

Una partícula *P* está sometida a una aceleración de la forma $\vec{a} = -\omega^2 R\,\vec{e}_\rho$ expresada en coordenadas cilíndricas, siendo ω y *R* constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia *R* del eje Oz y tiene una velocidad de la forma:

$$\vec{v}(0) = R\omega\,\vec{e}_\varphi + v_0\,\vec{k}$$

a) Halle las leyes horarias del movimiento en coordenadas cilíndricas.

SUGERENCIA: Observe que la aceleración es de un tipo de movimiento conocido pero que las condiciones iniciales son diferentes, por lo que se recomienda buscar soluciones de distancia al eje Oz constante.

b) Escriba esas ecuaciones en coordenadas cartesianas y diga de qué tipo de trayectoria se trata.

c) Escríbalas ahora en coordenadas intrínsecas, escribiendo también los versores del triedro de Frenet en función de los de la base de coordenadas cilíndricas.

d) Encuentre una interpretación física para $c = \sqrt{(R\omega)^2 + (v_0)^2}$ y para el ángulo α definido por $\cos\alpha = \dfrac{R\omega}{c}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{v_0}{c}$. Estudie las características del movimiento discutiendo según los casos extremos $R\omega >> v_0$ o $R\omega << v_0$.

Parte B: Ejercicios de Movimiento Relativo

Ejercicio Nº 4

Recupere el resultado de la parte a del Ejercicio Nº 1, hallando la velocidad y la aceleración de una partícula en coordenadas esféricas, aplicando Roverbal y Coriolis considerando como sistema relativo uno con el mismo origen del sistema absoluto de coordenadas cartesianas y versores los de coordenadas esféricas.

SUGERENCIA: Observe que para llevar los versores de cartesianas a los de esféricas se necesitan dos rotaciones simples, por lo que la velocidad angular del sistema móvil será: $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\varphi}\vec{\mathbf{k}} + \dot{\theta}\vec{\mathbf{e}}_\varphi$.

Ejercicio Nº 5

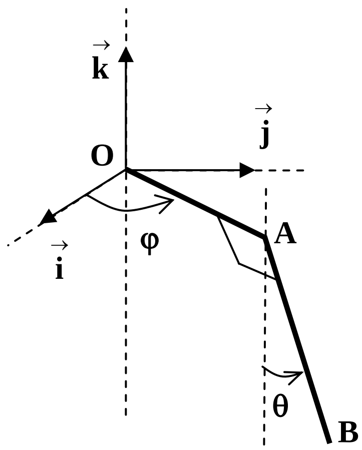
Un niño se encuentra, en t = 0, en el centro de una calesita que gira con velocidad ω constante. En ese instante, el niño comienza a moverse a lo largo de un radio dibujado en el piso de la calesita con una velocidad constante $\vec{v}_0$ relativa a la misma. Considere un sistema móvil (fijo a la calesita) y un sistema absoluto (fijo al suelo).

a) Halle la velocidad y aceleración absolutas del niño trabajando en el sistema móvil (es decir, expresándolas con los versores del sistema móvil).

b) Ídem (a), pero expresando los resultados con los versores del sistema absoluto.

Ejercicio Nº 6

En el sistema de la figura, la barra OA está contenida en el plano $O\vec{\mathbf{i}}\,\vec{\mathbf{j}}$ y gira alrededor de $O\vec{\mathbf{k}}$. La barra AB está contenida en un plano perpendicular a OA y gira alrededor de esta última.



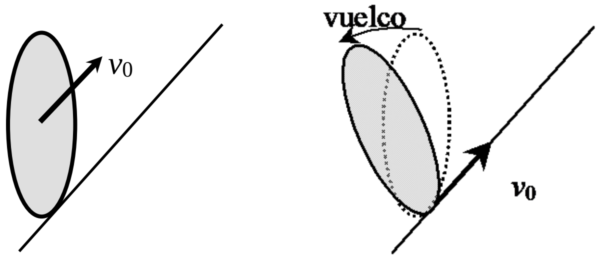
a) Determine la velocidad angular de la barra AB en función de φ y θ en la base $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$, siendo φ el ángulo entre la barra OA y el eje $O\vec{\mathbf{i}}$, y θ el ángulo entre la barra AB y una paralela al eje $O\vec{\mathbf{k}}$ por el punto A.

SUGERENCIA: Utilice adición de velocidades angulares.

b) Exprese dicha velocidad angular en una base solidaria a la barra AB.

Ejercicio Nº 7

Una moneda, de radio R, se mueve apoyada sobre una mesa horizontal, de forma que el plano que contiene a la moneda es perpendicular a la mesa, y el punto de contacto de la moneda con la mesa se mantiene siempre sobre una misma recta. Esta recta es la intersección del plano de la moneda con el de la mesa.



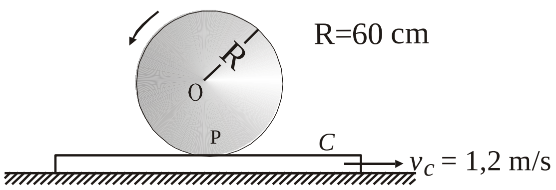
parte (a) parte (b)

a) Si el centro de la moneda se mueve con velocidad v_0 con respecto a la mesa, halle cuál debe ser su velocidad angular para que el punto de contacto tenga velocidad nula con respecto a la superficie, es decir, para que la moneda rue-de sin deslizarse.

b) En determinado instante la moneda comienza a volcarse hacia un lado. Escriba cómo se modifica la velocidad angular de la moneda respecto al caso anterior.

NOTA: Para comparar con el caso anterior puede asumirse que la moneda sigue rodando sin deslizarse, pero que v_0 es la proyección de la velocidad del centro de la moneda sobre la recta de contacto con el plano.

Ejercicio Nº 8



Una rueda, de radio R = 60 cm, está rodando sin deslizarse sobre una placa horizontal (ver figura). Ésta, a su vez, tiene una velocidad de 1,2 m/s hacia la derecha, y la rueda una velocidad angular de 0,5 rad/s en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

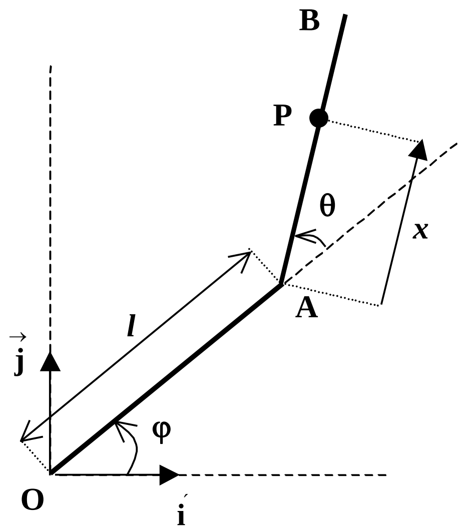
Llámele v_0 a la velocidad del centro O de la rueda con respecto al suelo:

a) Escriba la velocidad del punto de contacto P entre la rueda y la placa considerándolo como:

- Un punto fijo a la placa.
- Un punto solidario a la rueda. Déjelo expresado en función de v_0.

b) Determine la velocidad v_0 del centro O de la rueda para que se cumpla la condición de rodadura sin deslizamiento.

Ejercicio Nº 9



Considere la configuración de dos barras que se muestra en la figura. *Ambas barras se encuentran contenidas siempre en el mismo plano*. La barra OA, de longitud l, gira en torno a uno de sus extremos (O), que se encuentra fijo. El ángulo que forma con el eje O$\vec{\mathbf{i}}$ es $\varphi(t)$.

La barra AB está unida a la barra OA en el punto A y gira respecto a este. El ángulo entre las barras es $\theta(t)$.

Una partícula P se mueve sobre la barra AB, siendo $x(t)$ su distancia al punto A.

Dé expresiones para la velocidad y la aceleración de la partícula con respecto al sistema absoluto $\{O, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ mediante los siguientes métodos:

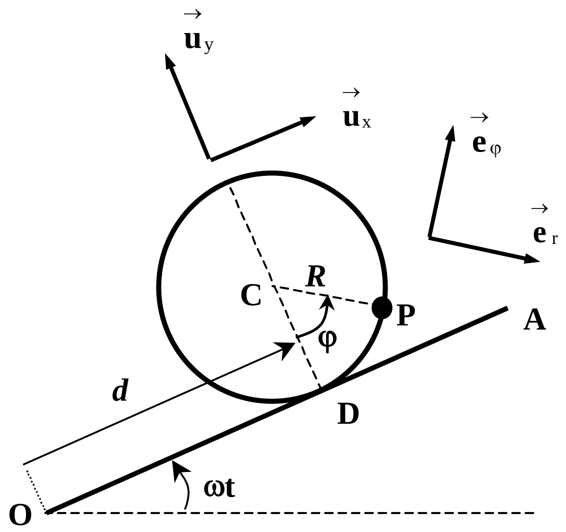
a) Escribiendo genéricamente el vector $\vec{r}_P$, posición del punto P, considerando O como origen de coordenadas, y derivándolo directamente.

b) Utilizando los teoremas de Roverbal y Coriolis para calcular la velocidad y la aceleración absolutas de la partícula en función de sus valores en sistemas en movimiento. ¿Cuáles pueden ser sistemas en movimiento convenientes?

Evalúe además posibles sistemas de versores en los cuales expresar sus respuestas.

Ejercicio Nº 10

La guía OA gira alrededor del punto O (fijo) con velocidad angular ω constante. A una distancia d de O se halla el punto D. Sea C la circunferencia de centro C y radio R tangente a OA en D. Sobre C se mueve un punto P describiendo un movimiento circular. Sea φ el ángulo entre CD y CP (ver figura). Se toman los versores $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi$ de acuerdo al diagrama mostrado.



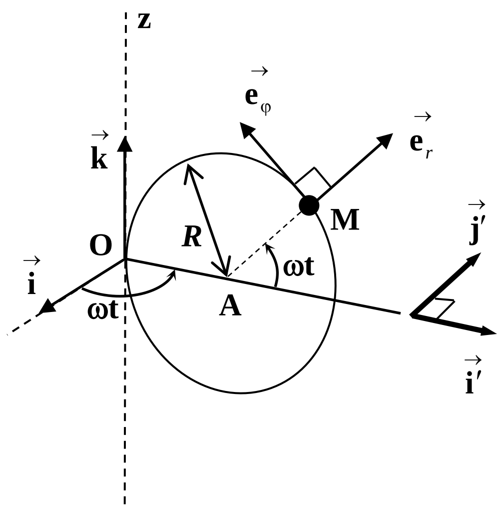
a) Halle directamente (es decir, a partir de su definición) la derivada respecto del tiempo de los versores anteriores.

b) Halle la velocidad y aceleración absolutas de P a partir de escribir el vector $\vec{r}_P$ en un sistema conveniente con O como origen, y derivándolo respecto del tiempo.

c) Recupere el resultado de la parte b) repitiendo el cálculo por otro método alternativo.

Ejercicio Nº 11

La circunferencia de radio *R* es tangente a Oz en O y está contenida en un plano que pasa por dicho eje. La misma gira con una velocidad angular ω constante alrededor de Oz. Sobre la circunferencia se mueve un punto M, que tiene movimiento relativo a ella uniforme, de velocidad angular ω, de mismo módulo que la anterior. Utilizando los sistemas fijo y móvil indicados en la figura, halle:



a) Velocidad relativa, de arrastre y absoluta de M.

b) Aceleración relativa, de arrastre y absoluta de M.

NOTA: Se recomienda resolver cada una de las partes de este problema por dos caminos diferentes, como en el ejercicio anterior.

Parte C: Resultados de algunos Ejercicios Seleccionados:

Ejercicio Nº 1: b) $\vec{v} = 380\,\mathrm{m/s}\,\vec{e}_\varphi = 1370\,\mathrm{km/h}\,\vec{e}_\varphi$, $\vec{a} = \left(-2{,}3\,\vec{e}_r + 1{,}6\,\vec{e}_\theta\right)\mathrm{cm/s^2}$.

Ejercicio Nº 3: a) $\rho(t) = R,\ \varphi = \omega t + \varphi_0$ y $z(t) = v_0 t$

b) La trayectoria es una *hélice*.

c) $s(t) = ct$, $\vec{\mathbf{t}} = \cos\alpha\,\vec{e}_\varphi + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{k}$, $\vec{\mathbf{n}} = -\vec{e}_\rho$,

Radio de Curvatura: $\dfrac{c^2}{R\omega^2} = \dfrac{R}{(\cos\alpha)^2}$.

Ejercicio Nº 5: a) $\vec{v} = (v_0)\vec{i}' + (\omega v_0 t)\vec{j}'$, $\vec{a} = -(\omega^2 v_0 t)\vec{i}' + (2\omega v_0)\vec{j}'$.

b) $\vec{v} = (v_0\cos\omega t - \omega v_0 t\operatorname{sen}\omega t)\vec{i} + (v_0\operatorname{sen}\omega t + \omega v_0 t\cos\omega t)\vec{j}$,

$\vec{a} = (-\omega^2 v_0 t\cos\omega t - 2\omega v_0\operatorname{sen}\omega t)\vec{i} + (-\omega^2 v_0 t\operatorname{sen}\omega t + 2\omega v_0\cos\omega t)\vec{j}$

Ejercicio Nº 6: a) $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\theta}\vec{i}'$ con $\vec{i}'$ según OA.

b) $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{i}' + \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\vec{j}'' + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}''$ con $\vec{k}''$ según BA.

Ejercicio Nº 8: b) $\vec{v}_O = 0.9\,\vec{i}\ m/s$.

Ejercicio Nº 10: a) $\dot{\vec{u}}_x = \omega\vec{u}_y$, $\dot{\vec{u}}_y = -\omega\vec{u}_x$, $\dot{\vec{e}}_r = (\omega + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$, $\dot{\vec{e}}_\varphi = -(\omega + \dot{\varphi})\vec{e}_r$.

b) $\vec{v}_P = d\omega\vec{u}_y - r\omega\vec{u}_x + r(\omega + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$,

$\vec{a}_P = -d\omega^2\vec{u}_x - r\omega^2 u_y + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r(\omega + \dot{\varphi})^2\vec{e}_r$.

Ejercicio Nº 11: a) $\vec{v}_R = R\omega\vec{e}_\varphi$, $\vec{v}_T = \omega R(1 + \cos\omega t)\vec{j}'$,

$\vec{v} = -(\omega R\operatorname{sen}\omega t)\vec{i}' + \omega R(1 + \cos\omega t)\vec{j}' + (\omega R\cos\omega t)\vec{k}'$.

b) $\vec{a}_R = -(\omega^2 R)\vec{e}_r$, $\vec{a}_T = -\omega^2 R(1 + \cos\omega t)\vec{i}'$, $\vec{a}_C = -(2\omega^2 R\operatorname{sen}\omega t)\vec{j}'$,

$\vec{a} = -\omega^2 R(1 + 2\cos\omega t)\vec{i}' - (2\omega^2 R\operatorname{sen}\omega t)\vec{j}' - (\omega^2 R\operatorname{sen}\omega t)\vec{k}'$