Ejemplo de demostración de que cierto lenguaje es el lenguaje generado por una Gramática Libre de Contexto

Sea la gramática libre de contexto G, con las siguientes producciones:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aSa \mid aXa \\ X & \rightarrow & bXb \mid bSb \mid \epsilon \end{array}$$

Demostraremos que G genera exactamente el lenguaje de las tiras sobre $\{a, b\}$ que son palíndromos[1] de largo par y mayor que cero, y que comienzan por el símbolo a (llamamos L a este lenguaje y L_G al lenguaje generado por la gramática G).

Previamente,definimos lenguajes para las propiedades que queremos demostrar de las tiras generadas por cada uno de los símbolos.

- $L_a = \{$ w / w es un palíndromo de largo par mayor que 0 y comienza por a$\}$
- $L_b = \{$ w / w es la tira vacía o un palíndromo de largo par que comienza por b$\}$

Primero demostramos que $L \subseteq L_G$. Para ello probaremos por inducción completa en el largo de las tiras de L, las siguientes propiedades de las tiras cualesquiera sobre $\{a, b\}$:

- P_1) Si $w \in L_a$, entonces $S \Rightarrow^* w$
- P_2) Si $w \in L_b$, entonces $X \Rightarrow^* w$

Paso Base Consideramos las tiras más cortas que cumplen cada una de las propiedades

- PB1) Si $w \in L_a$, y $|w| = 2 \Rightarrow w = aa \Rightarrow S \Rightarrow^* w($ $S \Rightarrow aXa \Rightarrow aa$ es una derivación para $w)$
- PB2) Si $w \in L_b$ y $|w| = 0 \Rightarrow w = \epsilon \Rightarrow X \Rightarrow^* w($ $X \Rightarrow \epsilon$ es una derivación para $w)$

[1] un palíndromo se define inductivamente como la tira vacía, un solo símbolo o un palíndromo precedido y seguido del mismo símbolo

Paso Inductivo Para un cierto h, suponemos que se cumplen las siguientes hipótesis inductivas:

- HI1) Si $w \in L_a$, y $|w| \leq h$, entonces $S \Rightarrow^* w$
- HI2) Si $w \in L_b$ y $|w| \leq h$, entonces $X \Rightarrow^* w$

Tesis Inductiva Si las hipótesis inductivas son válidas, entonces para toda tira se cumple:

- TI1) Si $w \in L_a$, y $|w| = h + 1$, entonces $S \Rightarrow^* w$
- TI2) Si $w \in L_b$ y $|w| = h + 1$, entonces $X \Rightarrow^* w$

Demostración

- TI1) Si $w \in L_a$ y $|w| = h + 1$, como w es palíndromo de largo par que comienza por a, la forma de w será $w = aw'a$, con dos formas posibles para w':
  - $w' \in L_a$ (es decir, es un palíndromo de largo par que comienza por a). Como necesariamente $|w'| < h$, por la hipótesis inductiva HI1), tenemos que existe una derivación $S \Rightarrow^* w'$. Pero entonces, $S \Rightarrow aSa \Rightarrow^* aw'a = w$, esto es, $S \Rightarrow^* w$
  - $w' \in L_b$ (es decir, es la tira vacía o un palíndromo de largo par que comienza en b). Como necesariamente $|w'| < h$, por la hipótesis inductiva HI2), tenemos que existe una derivación $X \Rightarrow^* w'$. Pero entonces, $S \Rightarrow aXa \Rightarrow^* aw'a = w$, esto es, $S \Rightarrow^* w$
- TI2) Si $w \in L_b$ y $|w| = h + 1$, w es un palíndromo de largo par que comienza por b,la forma de w será $w = bw'b$, con dos formas posibles para w'
  - $w' \in L_a$ (es decir, es un palíndromo de largo par que comienza por a). Como necesariamente $|w'| < h$, por la hipótesis inductiva HI1), tenemos que existe una derivación $S \Rightarrow^* w'$. Pero entonces, $X \Rightarrow bSb \Rightarrow^* bw'b = w$, esto es, $X \Rightarrow^* w$
  - $w' \in L_b$ (es decir, es la tira vacía o un palíndromo de largo par que comienza en b). Como necesariamente $|w'| < h$, por la hipótesis inductiva HI2), tenemos que existe una derivación $X \Rightarrow^* w'$. Pero entonces, $X \Rightarrow bXb \Rightarrow^* bw'b = w$, esto es, $X \Rightarrow^* w$

Entonces, por el principio de inducción completa toda tira del alfabeto cumple las propiedades P_1 y P_2. En particular, la propiedad P_1 es la que se quería demostrar.

A continuación, se demuestra el recíproco de la propiedad anterior, es decir que $L_G \subseteq L$. Para ello demostraremos, por inducción completa en la cantidad de derivaciones de una tira w a partir de los símbolos de la gramática, las siguientes propiedades (recíprocas de las demostradas anteriormente):

- P_1') Si $S \Rightarrow^* w$, entonces $w \in L_a$
- P_2') Si $X \Rightarrow^* w$, entonces $w \in L_b$

Paso Base Consideramos las tiras que cumplen cada una de las propiedades y cuya derivación es la que tiene menos pasos para cada caso:

- PB1) La derivación más corta a partir de S es $S \Rightarrow aSa \Rightarrow aa$. La tira aa es un palíndromo de largo para que comienza en a, así que $aa \in L_a$
- PB2) La derivación más corta a partir de X es $X \Rightarrow \epsilon$. La tira ϵ pertenece por definicion a L_b

Paso Inductivo Para un cierto h, suponemos que se cumplen las siguientes hipótesis inductivas:

- HI1) Si $S \Rightarrow_k w$ y $k \leq h$, entonces $w \in L_a$
- HI2) Si $X \Rightarrow_k w$ y $k \leq h$, entonces $w \in L_b$

Tesis Inductiva Si las hipótesis inductivas son válidas, entonces para toda tira se cumple:

- TI1) Si $S \Rightarrow_{h+1} w$, entonces $w \in L_a$
- TI2) Si $X \Rightarrow_{h+1} w$, entonces $w \in L_b$

Demostración

- TI1) Si $S \Rightarrow_{h+1} w$ hay dos posibles primeros pasos en la derivación de w:
  - Si la primera derivación fue $S \Rightarrow aSa$, entonces $w = aw'a$, con $S \Rightarrow_h w'$. Por la hipótesis inductiva H1, w' es un palíndromo de largo par que comienza en a, y por lo tanto, w también lo será. Esto es, $w \in L_a$.
  - Si la primera derivación fue $S \Rightarrow aXa$, entonces $w = aw'a$, con $X \Rightarrow_h w'$. Por la hipótesis inductiva H2, w' es ϵ o un palíndromo de largo par que comienza en b, y por lo tanto, en ambos casos, $w \in L_a$.
- TI2) Si $X \Rightarrow_{h+1} w$, hay tres posibles primeros pasos en la derivación:
  - Si la primera derivación fue $X \Rightarrow bSb$, entonces $w = bw'b$, con $S \Rightarrow_h w'$. Por la hipótesis inductiva H1, w' es un palíndromo de largo par que comienza en a, y por lo tanto, w será un palíndromo de largo para que comienza en b. Esto es, $w \in L_b$.
  - Si la primera derivación fue $X \Rightarrow bXb$, entonces $w = bw'b$, con $X \Rightarrow_h w'$. Por la hipótesis inductiva H2, w' es ϵ o un palíndromo de largo par que comienza en b, y por lo tanto, en ambos casos, $w \in L_b$.

- Si la primera derivación fue $X \Rightarrow \epsilon$, entonces $w = \epsilon$, y por definición, $w \in L_b$.

Entonces, por el principio de inducción completa toda tira del alfabeto cumple las propiedades P_1' y P_2'. En particular, la propiedad P_1' es la que se quería demostrar.