Problema 3

a. i) Asumimos el diodo en OFF con la llave cerrada la topología del circuito queda como en la figura 1.

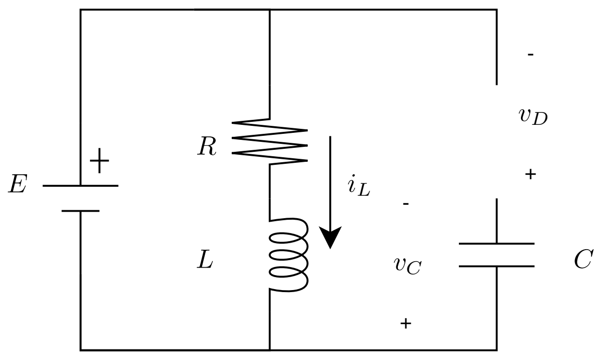

Figura 1: circuito equivalente para el primer tramo

$v_D = -v_C - E = -E < 0$ por lo que se verifica la condición. Notar que v_C es cero porque la corriente es nula y su valor inicial también.
$v_C(t) = 0$ La corriente por la bobina va a aumentar de forma exponencial, con asíntota $\frac{E}{R}$ y valor inicial nulo.

$$i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t\frac{R}{L}}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

La gráfica se muestra en la figura 2

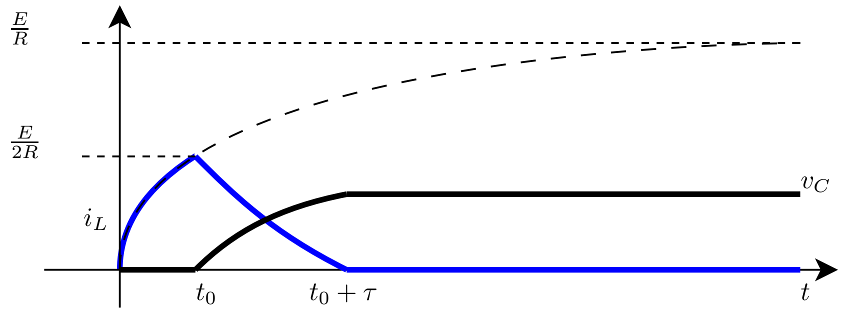

Figura 2: Gráfico de $i_L(t)$ y $v_C(t)$

ii) La energía entregada en este intervalo por la fuente es:

$$E_1 = \int_0^{t_0} E i_L(t)dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{t_0} 1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{E^2}{R}\left(t_0 + \frac{\tau}{2}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^{t_0}\right) dt = \frac{E^2\tau}{2R}\left(\ln 2 + e^{-\ln 2} - 1\right) \tag{1}$$

$$= \frac{E^2\tau}{2R}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}097\frac{E^2\tau}{R} \tag{2}$$

b. En $t = t_0$ se abre la llave. Calcular y graficar $i_L(t)$ para $t > t_0$. Al abrirse la llave la bobina tiende a mantener la corriente por lo que lo razonable es asumir el diodo en ON.

El equivalente en Laplace del circuito queda como en la figura 3.

Donde $i_0 = i_L(t_0) = \frac{E}{2R}$

$$I_L(s) = \frac{Li_0}{\frac{1}{Cs} + R + Ls} = \frac{i_0 s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{i_0 s}{s^2 + \frac{2}{\tau}s + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{i_0 s}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} \tag{3}$$

Para antitransformar usamos fracciones simples:

$$I_L(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{B}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} = \frac{As + \frac{A}{\tau} + B}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2} \tag{4}$$

Igualando coeficientes de polinomios con la expresión 3 obtenemos $A = i_0$, $B = -\frac{A}{\tau} = -\frac{i_0}{\tau}$

Pasando al tiempo y definiendo $t' = t - t_0$:

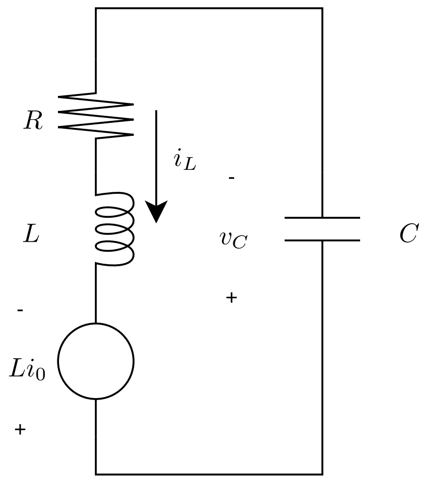

Figura 3: circuito equivalente para el segundo tramo

$$i_L(t') = i_0 \left(1 - \frac{t'}{\tau}\right) e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

Esto vale mientras la corriente por el diodo (que es igual a i_L sea positiva o sea hasta que $t' = \tau$.

A partir de ese momento el diodo corta y su tensión pasa a ser $V_D = -v_C(t' = \tau)$.

$$V_C(s) = \frac{i_0}{C} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)^2}$$

Por lo tanto:

$$v_c(t') = \frac{i_0}{C} t' e^{-\frac{t'}{\tau}} = \frac{E}{4\tau} t' e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

$$v_f = v_C(t' = \tau) = \frac{E}{4e}$$

c. Por el teorema de Tellegen la energía disipada por la resistencia será la energía entregada por la fuente menos la energía almacenada al final en el condensador y en la bobina. La energía final en la bobina es nula, mientras que la del condensador es:

$$E_C = \frac{1}{2} C v_f^2 = \frac{E^2}{8e^2} \frac{2\tau}{R} \simeq 0{,}034 \frac{E^2 \tau}{R}$$

$$E_R = E_1 - E_C = 0{,}063 \frac{E^2 \tau}{R}$$