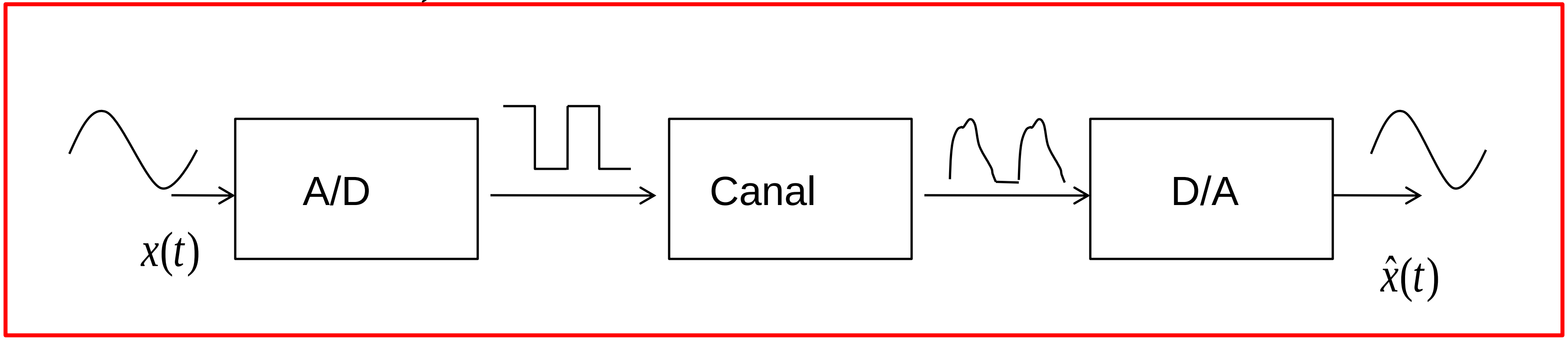
Sistemas de Comunicación

Clase 22-23: PCM – Modulación de pulsos codificados.

Objetivo

Estudiar distintas formas de convertir una señal analógica en formato digital para su trasmisión (PCM, DPCM, Modulación Δ)



- PCM- Modulación de pulsos codificados
- DPCM-Modulación diferencial de pulsos codificados.
- Modulación Δ.

.

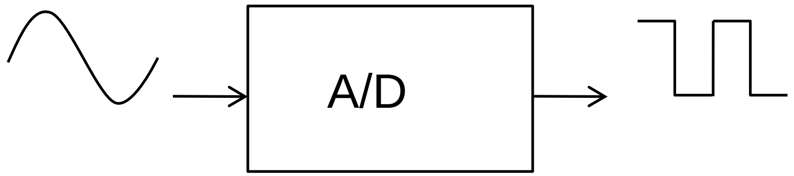
Motivación

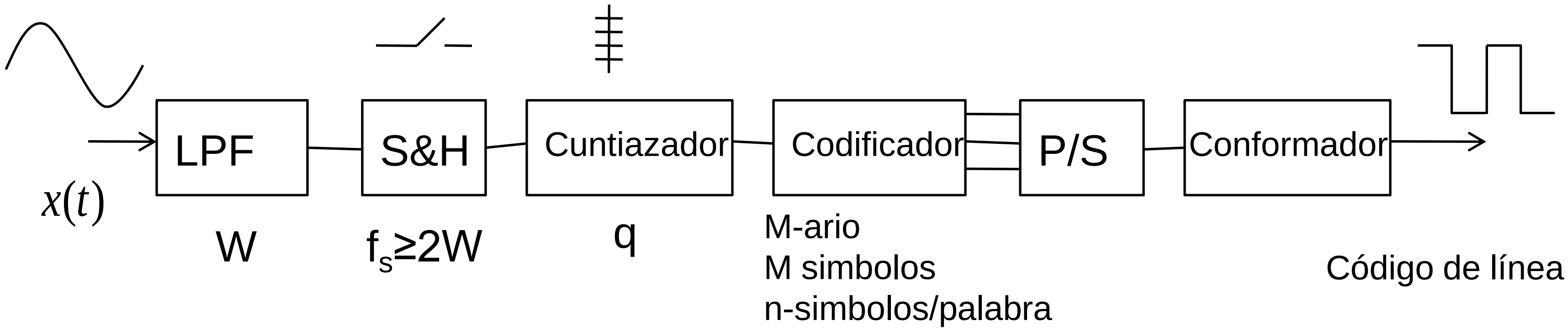
- ¿ Por qué surge la idea de convertir una señal analógica en digital para su trasmisión?
- Para aprovechar las ventajas de los sistemas digitales:
  1. Inmunidad frente al ruido de canal
  2. Repetidores regenerativos
  3. Convergencia de servicios- multiplexado temporal: trasmitir en un mismo canal voz, video y datos.
  4. Robustez, flexibilidad de los sistemas digitales.

Requerimientos:

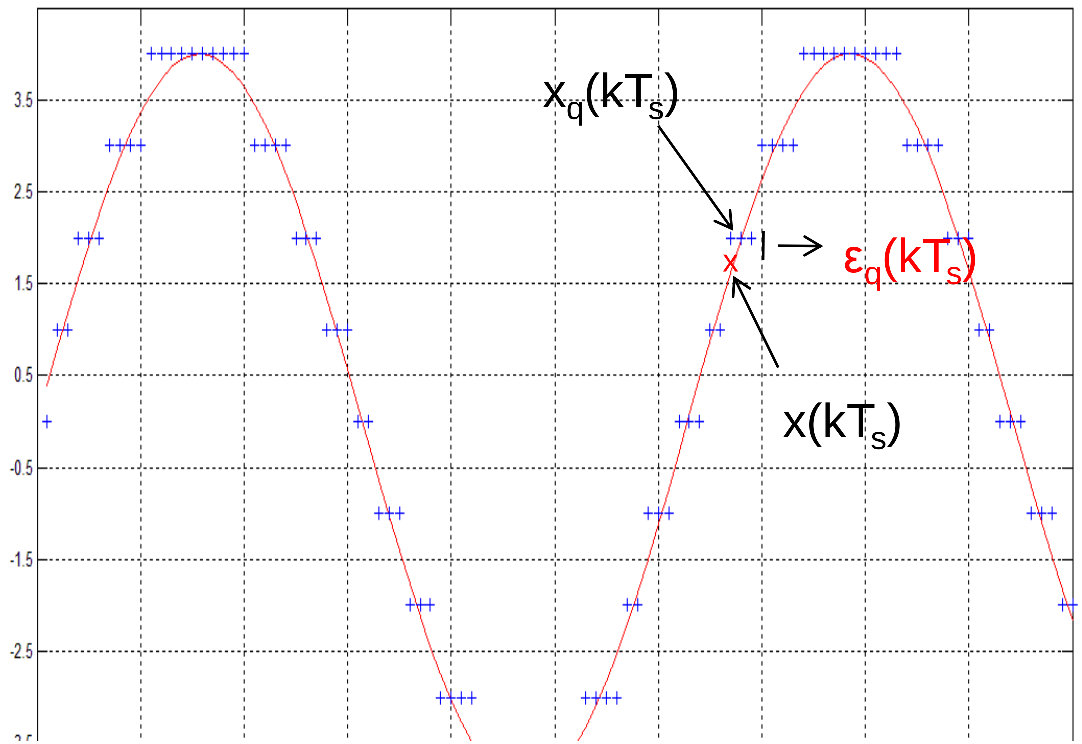
1. Necesidad de sincronismo
2. Ancho de banda (Ej: Televisión Digital /PCM telefónico) antes implicaba necesidad de mayor ancho de banda que analógico, con nuevas técnicas de compresión se logra mayor eficiencia en el uso del espectro.

Diagrama de bloques de un TX PCM

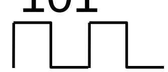




Cuantificación



‘7’	111
‘6’	110
‘5’	101
‘4’	100
‘3’	011
‘2’	010
‘1’	001
‘0’	000

Valor luego del muestreo 1,6 V
Valor cuantificado 2V
Código asociado ‘5’
Secuencia PCM 101
Señal trasmitida  código polar

TX PCM

1) Muestreo: $\boxed{f_s \geq 2W}$ Condición de Nyquist

2) Cuantificador : asocia a la muestra valor cuantizado más próximo, $\boxed{\text{q - niveles}}$: $\boxed{x_q(kT_s) = x(kT_s) + \varepsilon_q(kT_s)}$

ε_q – ruido de cuantificación se introduce en esta etapa

3) Codificador : asocia a cada muestra una palabra de código $\boxed{\text{M - ario de largo n.}}$

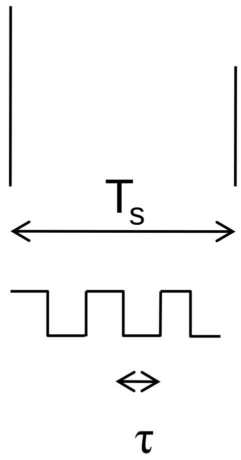
M - número de símbolos del alfabeto (M = 2 binario)

n - número de símbolos por palabra - $\boxed{M^n \geq q}$

4) P/S : genera secuencia de símbolos

5) Conformación : elijo formato - código de línea (polar, unipolar, AMI)

Estimación de ancho de banda de TX



n : número de símbolos por palabra (por muestra)

$$T_s = \frac{1}{f_s} \quad \text{tiempo entre muestras}$$

$$\tau = \frac{T_s}{n} \quad \text{duración de un símbolo}$$

$$\mathrm{r} = \frac{1}{\tau} \quad \text{tasa de símbolos por segundo}$$

Condición no ISI : $\quad B_T \geq \dfrac{r}{2} \qquad \boxed{B_T \geq \dfrac{n}{2T_s} = \dfrac{nf_s}{2} \geq nW}$

$M^n \geq q \qquad \boxed{\mathrm{n} \geq \log_{\mathrm{M}} \mathrm{q} \ \ (\text{n - entero})}$

Tarea: PCM telefónico

Valores típicos PCM telefónico

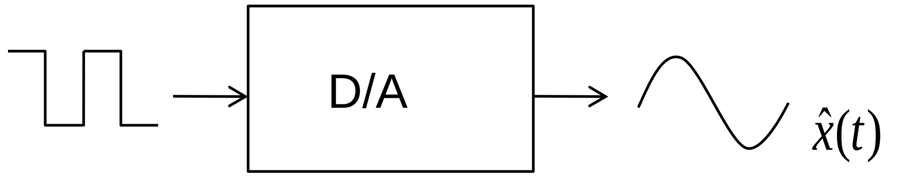
$W = 3.4\ kHz \quad f_s = 8kHz$

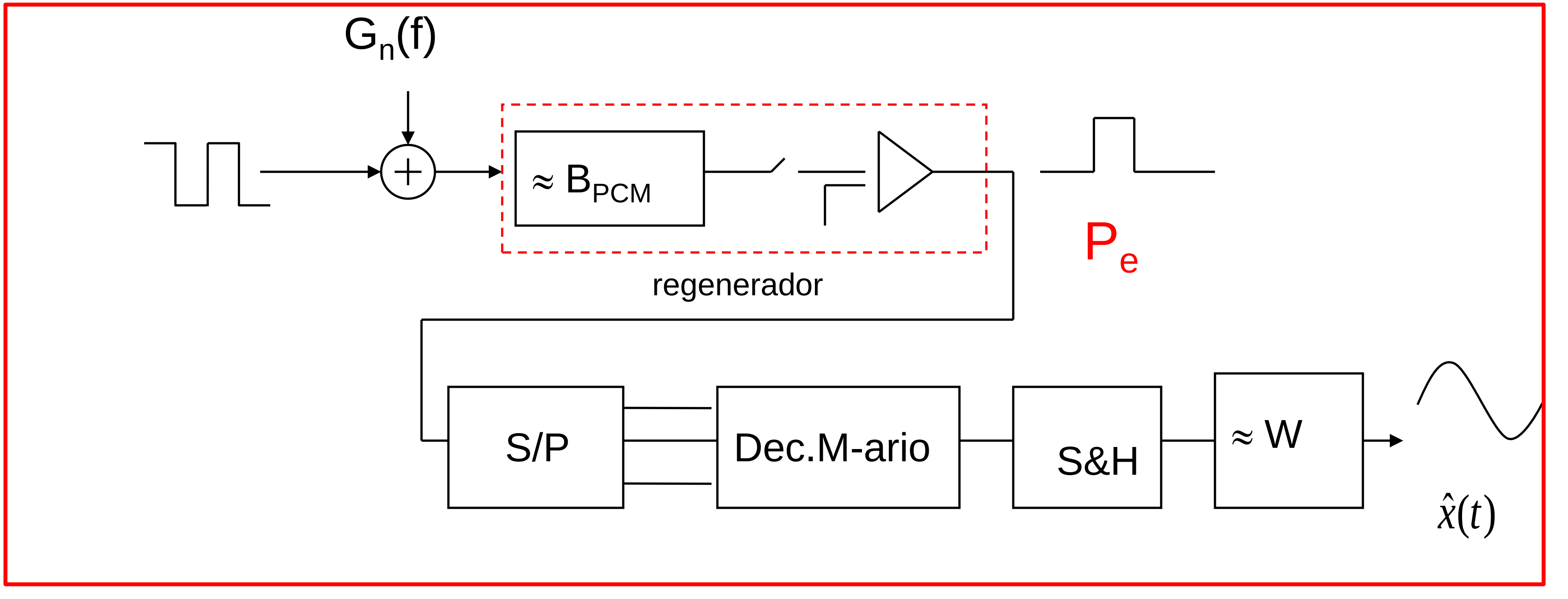
PCM binario con n = 8.

¿Determinar el ancho de banda necesario para la trasmisión un canal PCM?

¿Cual es la capacidad de un E1?

Diagrama del receptor PCM





Ruido en la señal detectada

$$\hat{x}(t) = x(t) + \varepsilon_q(t) + \varepsilon_d(t)$$

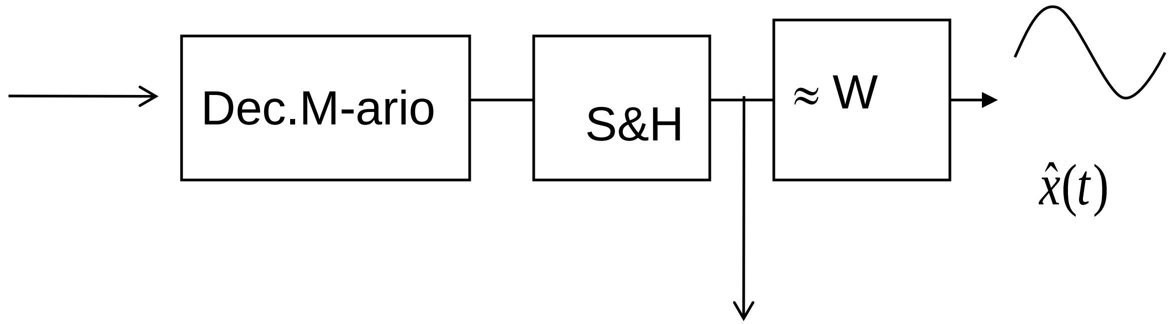
$\varepsilon_q(t)$: ruido de cuantificación introducido en TX

$\varepsilon_d(t)$: ruido de decodificación causado por errores de detección, P_e : debida al ruido del canal

$$\text{valores admisibles}: P_e = \begin{cases} 10^{-5} & \text{datos} \\ 10^{-4} & \text{telefonía} \end{cases}$$

$\varepsilon_q(t)$ y $\varepsilon_d(t)$ son dos fuentes independientes de ruido.

Ruido de cuantificación



$$x_q\left(kT_s\right)=x\left(kT_s\right)+\varepsilon_q\left(kT_s\right)$$

Vamos a calcular cuál es la potencia de ruido de cuantificación luego de interpolar con un pasabajos ideal. Supongo que no hay ruido en el canal por lo que la palabra decodificada es igual a la trasmitida y corresponde con la muestra cuantificada.

Relación Señal a Ruido de cuantificación

$$\hat{x}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_q(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left(2W(t\text{-}kT_s)\right)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left(2W(t\text{-}kT_s)\right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_q(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left(2W(t\text{-}kT_s)\right)$$

$$\hat{x}(t) = x(t) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_q(kT_s)\,\mathrm{sinc}\left(2W(t\text{-}kT_s)\right) = x(t) + e(t)$$

Señal error

$$\boxed{SNR_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{S_x}{\int_{-W}^{W} G_\varepsilon(f)\,df}}$$

Relación Señal a Ruido de cuantificación

Notación : en $t = kT_s$ defino variables aleatorias :

$$x = x(kT_s) \quad x_q = x_q(kT_s) \quad \varepsilon_q = \varepsilon_q(kT_s)$$

$$\varepsilon_q(x) = (x - x_q)$$

Error cuadrático medio al aproximar :

$$\boxed{\sigma_q^2 = E(x - x_q)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_q^2(x) p(x) dx}$$

Cuantificador trabaja en un rango de valores $[-\mathrm{E}_{\max}, \mathrm{E}_{\max}]$

los valores superiores a $\mathrm{E}_{\max}$ saturan en ese valor, idem

inferiores $-\mathrm{E}_{\max}$

Relación Señal a Ruido de cuantificación

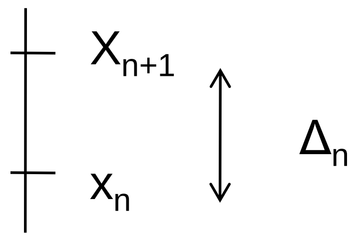
$$\sigma_q^2 = \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} \varepsilon_q^2(x)\,p(x)\,dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{-E_{\max}} \varepsilon_q^2(x)\,p(x)\,dx + \int_{E_{\max}}^{+\infty} \varepsilon_q^2(x)\,p(x)\,dx}_{\text{Error de saturación}}$$

- Supuesto: los valores fuera del rango del cuantificador son poco probables

$$\sigma_q^2 \cong \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} \varepsilon_q^2(x)\,p(x)\,dx$$

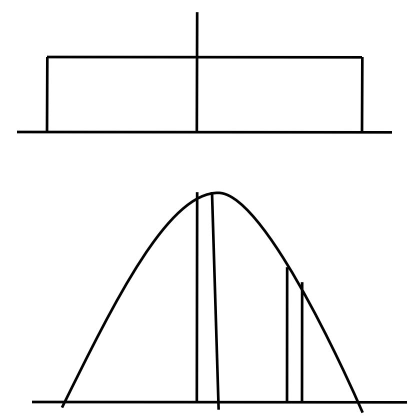
Relación Señal a Ruido de cuantificación

Consideremos un intervalo de cuantificación x_n, x_{n+1} de ancho Δ_n



- Supuesto: p(x) constante en el intervalo Δ_n

1. p(x) = cte para todo x.
2. q grande $\rightarrow$ p(x) = cte en el intervalo Δ_n



Relación Señal a Ruido de cuantificación

$$\sigma_{q_n}^2 = \int_{-\Delta_n/2}^{\Delta_n/2} \varepsilon_q^{\ 2} p(\varepsilon_q) d\varepsilon_q \qquad \sigma_{q_n}^2 = \frac{\Delta_n^2}{12}$$

$$\text{Supuesto: errores en distintos intervalos independientes}$$

$$\sigma_q^2 = \sum_n \sigma_{q_n}^2 p(I_n) = \sum_n \frac{\Delta_n^2}{12} p(I_n)$$

$$\text{Supuesto: cuantificación uniforme}$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \qquad \Delta = \frac{2E_{\max}}{q} \qquad \boxed{\sigma_q^2 = \frac{E_{\max}^2}{3q^2}}$$

Relación Señal a Ruido de cuantificación

Supongamos ahora que consideramos dos instantes

de muestreo distintos:

$\varepsilon_q(\mathrm{k}) = \varepsilon_q(kT_s)$ error de cuantificación en kT_s

$\varepsilon_q(\mathrm{m}) = \varepsilon_q(mT_s)$ error de cuantificación en mT_s

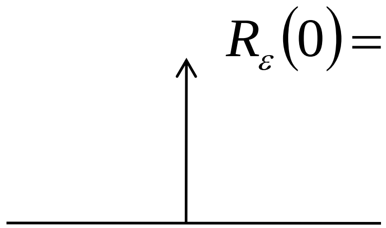
En las hipóotesis:

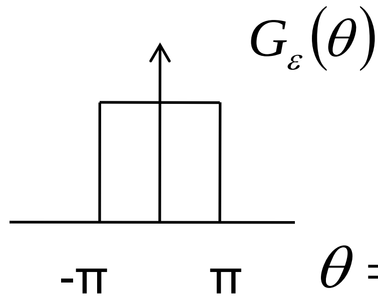
$$\boxed{\begin{array}{l} E(\varepsilon_q(k)) = 0 \\ E(\varepsilon_q(k)\varepsilon_q(m)) = 0 \text{ para todo } k \neq \end{array}} m, \text{ no}$$

correlacionado muestra a muestra.

$$\boxed{R_{\varepsilon_q}(0) = \sigma_q^2}$$

Relación Señal a Ruido de cuantificación





$$\theta = \frac{2\pi f}{f_s} \quad \text{frecuencia normalizada}$$

$$\sigma_q^2 = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} G_\varepsilon(f)\,df = G_\varepsilon(f)\,f_s$$

$$G_\varepsilon(f) = \frac{\sigma_q^2}{f_s} \quad \text{para todo f en} \left[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}\right]$$

Luego del pasabajos de ancho W :

$$\boxed{\mathrm{N_D} = \int_{-W}^{W} G_\varepsilon(f)\,df = \frac{\sigma_q^2}{f_s} 2W = \sigma_q^2 \frac{2W}{f_s}}$$

SNR cuantificación uniforme

$$N_D = \sigma_q^2 \frac{2W}{f_s} = \frac{E_{\max}^2}{3q^2}\frac{2W}{f_s}$$

Si sobremuestreo la portencia de ruido de cuantificación disminuye siempre que sean válidas las hipótesis de independencia.

$$S_D = S_x = \sigma_x^2 \quad (\overline{x} = 0)$$

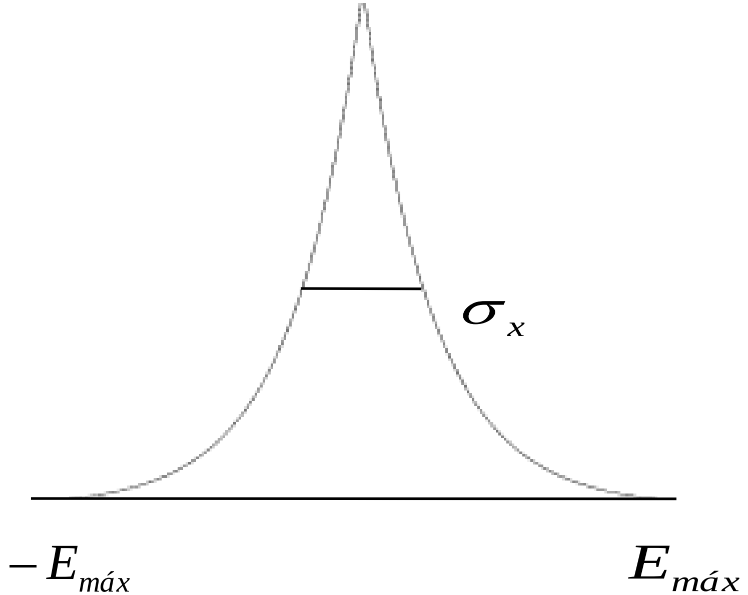
$$(S/N)_D = S_x \frac{3q^2}{E_{\max}^2}\frac{f_s}{2W} \qquad \boxed{(S/N)_D = 3q^2 \frac{S_x}{E_{\max}^2}\frac{f_s}{2W}}$$

Si $\boxed{E_{\max}^2 = 1 \quad \text{y} \quad f_s = 2W : \quad (S/N)_D = 3q^2 S_x}$

Factor de Cresta

$$\boxed{\text{Factor de cresta} = \frac{E_{\text{máx}}}{\sigma_x}}$$ depende de la estadística de la señal

La voz tiene una p(x) laplaciana, con factor de cresta grande, niveles pequeños son más frecuentes.



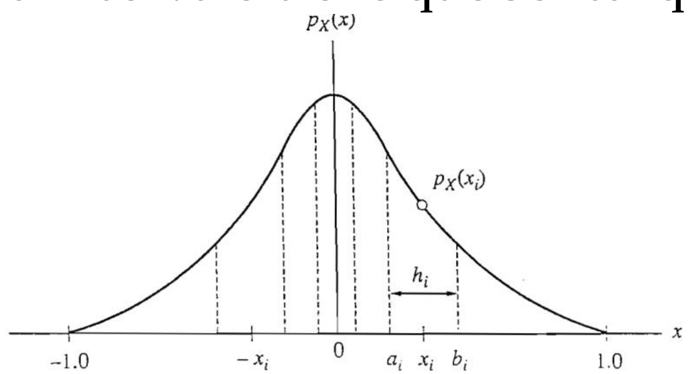
Cuantificación no uniforme

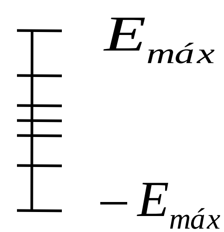
La $(S/N)_D$: es inversamente proporcional al factor de cresta

Si la p(x) es poco uniforme necesito un q alto para tener bajo ruido de cuantificación, lo que lleva a cuantificar con mucha precisión valores grandes poco frecuentes.¿ Como puedo mejorar $(S/N)_D$ sin aumentar q?

Cuantificación no uniforme : $\boxed{\sigma_q^2 = \sum \frac{\Delta_n^2}{12} p(I_n)}$

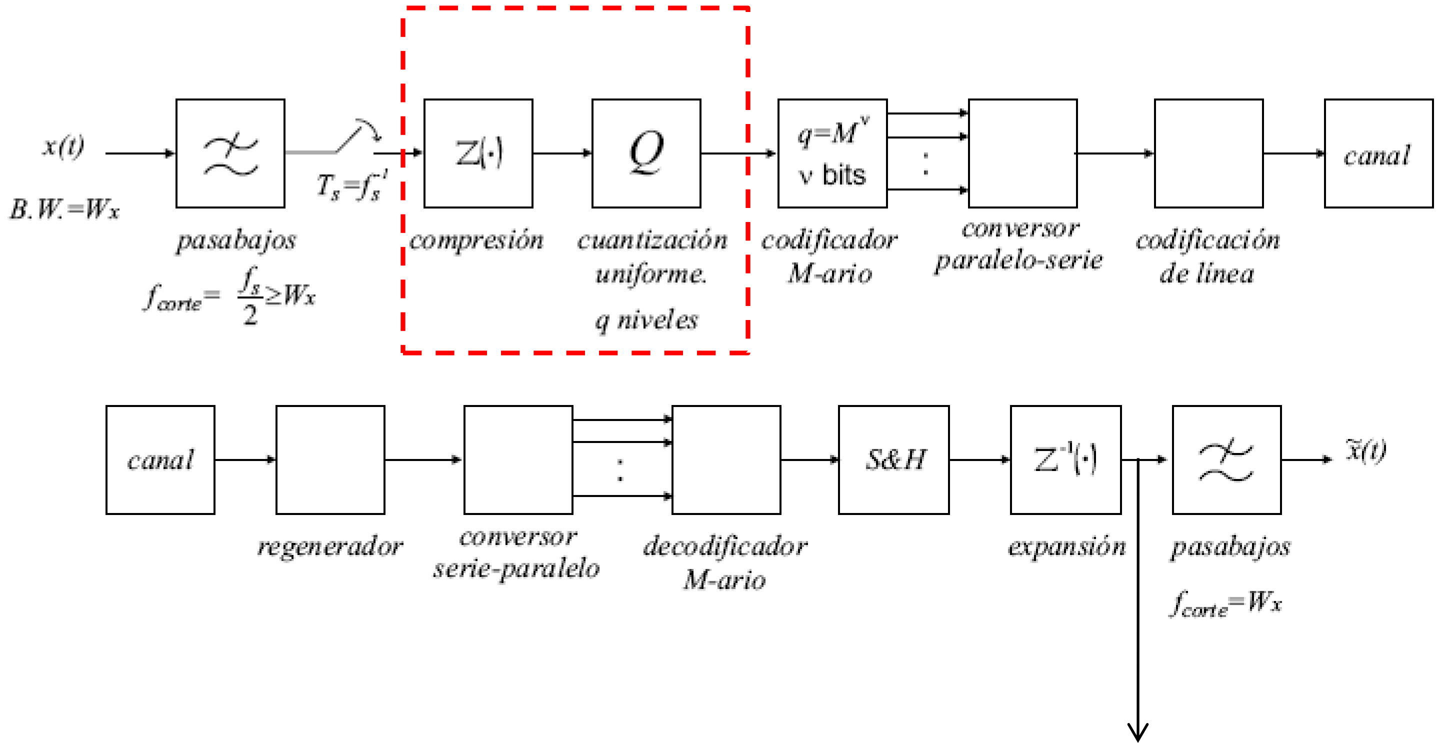
El ancho de cada intervalo tiene que ser tal que p(x) sea aproximad. constante.





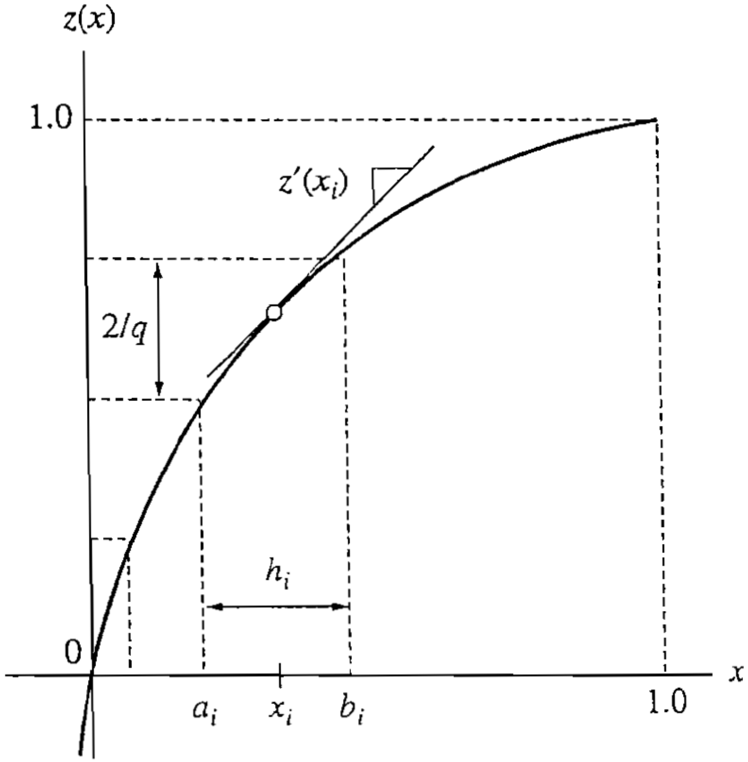
Compansión

Cuantificador no uniforme



$$x_q(kT_s) = x(kT_s) + \varepsilon_{q_{\text{no\_uniforme}}}(kT_s)$$

Cuantificación no uniforme



$$\boxed{(S/N)_D = \frac{3q^2 S_x}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{|z'(x)|^2}\,dx}}$$

$$E_{máx} = 1 \quad f_s = 2W$$

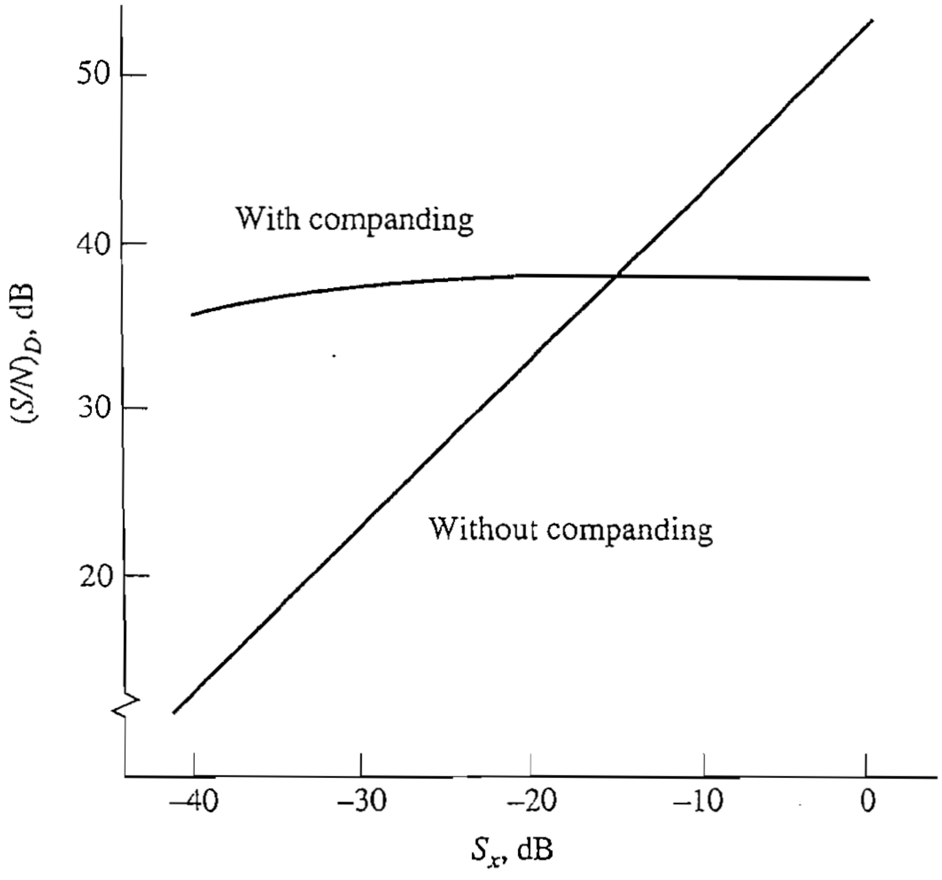
Elección de z(x)

- *(S/N)*$_D$ independiente de *p(x)*, leyes logarítmicas
  - Ley μ (μ =255 en USA)

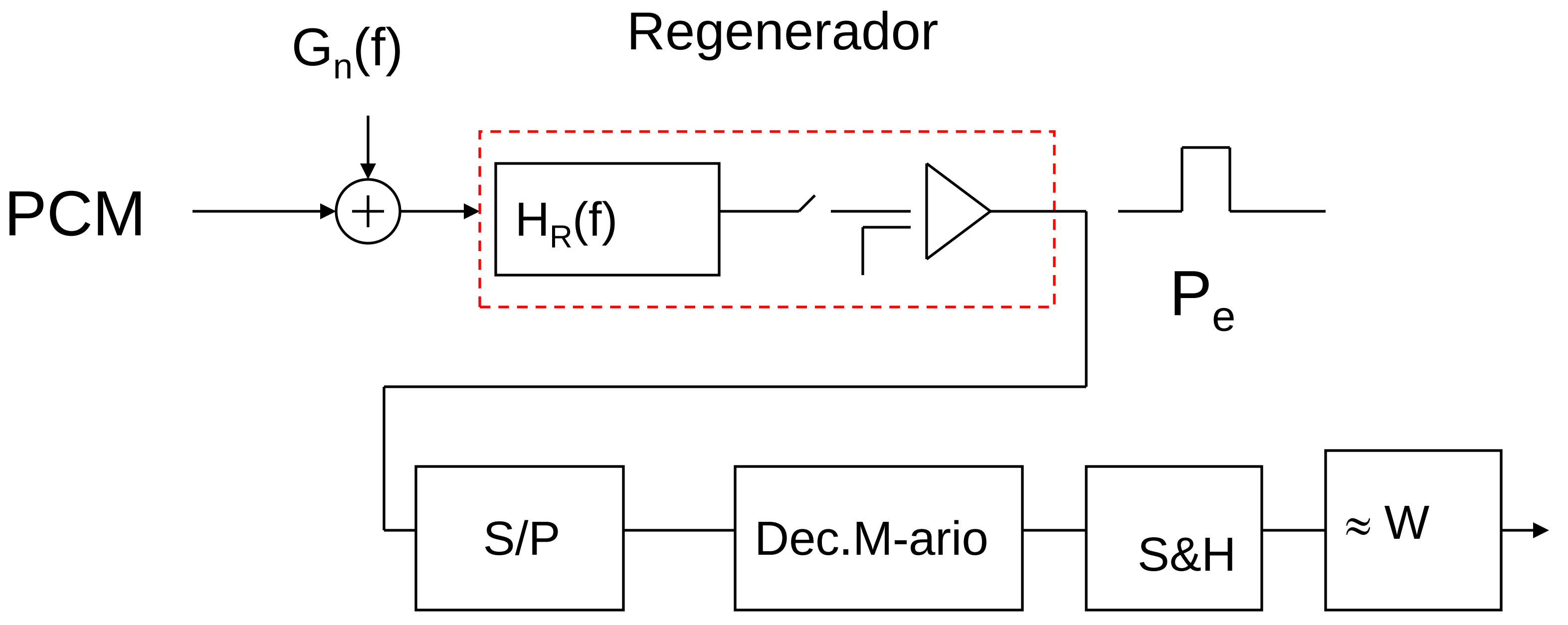
$$z(x) = E_{máx} \frac{\ln\left(1 + \frac{\mu |x|}{E_{máx}}\right)}{\ln(1+\mu)} sign\left(\frac{x}{E_{máx}}\right) \qquad \text{con} \quad \frac{|x|}{E_{máx}} \leq 1$$

- Relación señal a ruido independiente del usuario
- Europeos usan Ley A.

Cuantificación no uniforme



Ruido de decodificación



$$\hat{x}(kT_s) = x(kT_s) + \varepsilon_q\left(kT_s\right) + \varepsilon_d\left(kT_s\right)$$

$$\varepsilon_d\left(kT_s\right): \text{error decodificación}$$

Ruido de decodificación

Supuesto: Código binario

palabra recibida : $b_{n-1}b_{n-2}.....b_1b_0$ n bits

P_e : probabilidad de error de un bit

$$P_{epalabra} = 1-\left(1-P_e\right)^n \approx nP_e \qquad (\text{si } P_e << 1)$$

aproximo, solo tengo errores simples

Ruido de decodificación

¿cuanto me equivoco cuando tengo un error en el bit m?

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{m}} = \pm\left[\frac{2E_{\max}}{q}\right]2^{m}} \qquad \text{con } q = 2^{n}$$

Error en el bit menos significativo

$$\text{si } \mathrm{m} = \mathrm{n} - 1 \quad \varepsilon_{\mathrm{n-1}} = \pm E_{\max}$$

$$\text{si } \mathrm{m} = \mathrm{n} - 2 \quad \varepsilon_{\mathrm{n-2}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{n-1}}}{2} = \pm\left[\frac{2E_{\max}}{q}\right]\frac{2^{n-1}}{2}$$

Ruido de decodificación

Error cuadrático medio en palabra con error :

$$\overline{\varepsilon^2_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left[\frac{2E_{\max}}{q}\right]^2 2^{2m} = \frac{4E^2_{\max}}{nq^2}\sum_{m=0}^{n-1}4^m = \frac{4E^2_{\max}}{nq^2}\,\frac{4^n-1}{3} = \frac{4E^2_{\max}}{3n}$$

Error cuadrático medio en todas las palabras :

$$\sigma^2_{\mathrm{d}} = \overline{\varepsilon^2_{\mathrm{m}}}\,P_{epalabra} = nP_e\,\frac{4E^2_{\max}}{3n} = \frac{4E^2_{\max}}{3}P_e$$

Ruido de cuantificación+decodificación

$$\hat{x}(kT_s) = x(kT_s) + \varepsilon_q(kT_s) + \varepsilon_d(kT_s)$$

$$\hat{x}(t) = x(t_s) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_q(kT_s)\operatorname{sinc}\big(2\mathrm{W}(\mathrm{t} - kT_s)\big) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_d(kT_s)\operatorname{sinc}\big(2\mathrm{W}(\mathrm{t} - kT_s)\big)$$

Bajo el supuesto que: Los errores son independientes entre si y no correlacionados entre muestras:

$$\mathrm{N_D} = \left[\sigma_q^2 + \sigma_d^2\right]\frac{2W}{f_s} = \left[\frac{E_{máx}^2}{3q^2} + \frac{4E_{máx}^2}{3}P_e\right]\frac{2W}{f_s}$$

$$\boxed{(S/N)_D = \frac{S_x}{E_{máx}^2}\left[\frac{3q^2}{1+4q^2P_e}\right]\frac{f_s}{2W}}$$

Ruido de cuantificación+decodificación

$$E_{\max}^2 = 1 \quad f_s = 2W$$

$$\boxed{(S/N)_D = S_x \left| \frac{3q^2}{1+4q^2 P_e} \right|}$$

$$(S/N)_D = \begin{cases} 3q^2 \dfrac{S_x}{E_{\max}^2} \dfrac{f_s}{2W} & \text{si} \quad \mathrm{P_e} << \dfrac{1}{4q^2} \\ \dfrac{3}{4\mathrm{P_e}} \dfrac{S_x}{E_{\max}^2} \dfrac{f_s}{2W} & \text{si} \quad \mathrm{P_e} >> \dfrac{1}{4q^2} \end{cases}$$

PCM se diseña para trabajar con $\mathrm{P_e} << \dfrac{1}{4q^2}$ (solo ruido de cuantificación, ruido de decodificación despreciable, me independizo ruido de canal)

$$\boxed{(S/N)_D = 3q^2 \frac{S_x}{E_{\max}^2} \frac{f_s}{2W}}$$

Umbral

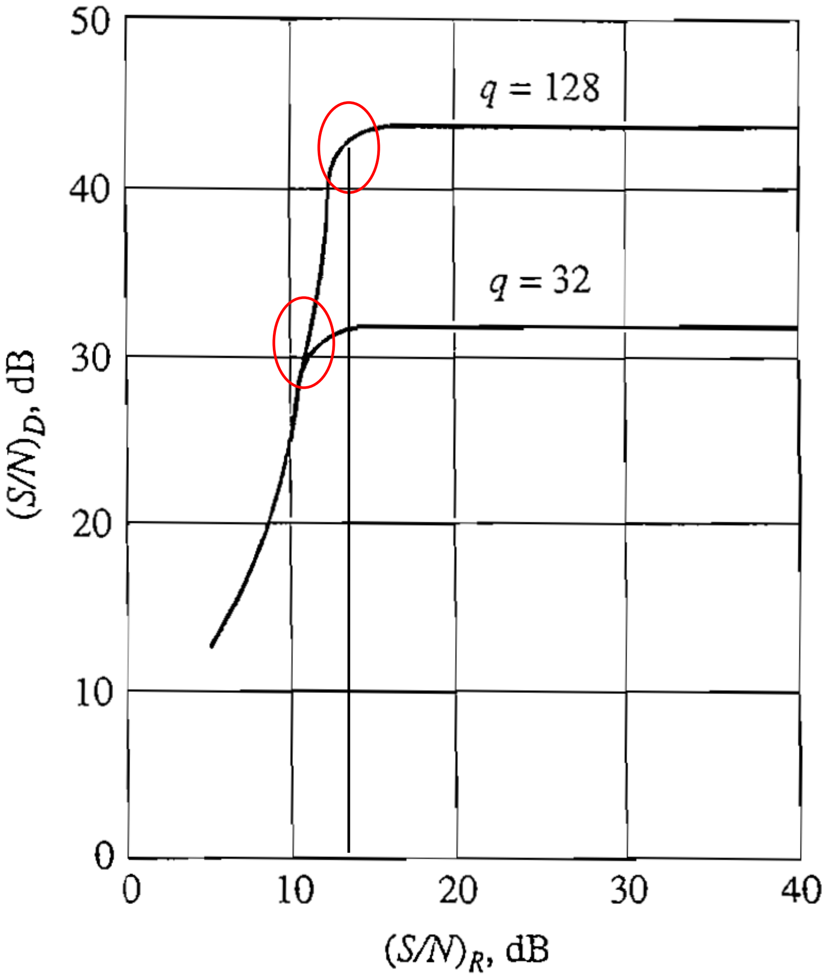
Supuesto: señalización polar, ruido gaussiano :

$$P_e = Q\left(\sqrt{(S/N)_R}\right)$$

relación señal a ruido grande implica P_e pequña, independencia ruido canal.

$(S/N)_{R\_umbral}$ relación señal a ruido mínima para que solo importe ruido de cuantificación.

Relación $(S/N)_D$ en PCM



Umbral punto en el que la relación señal a ruido en detección baja 1dB debido al ruido de decodificación.

En la práctica es cuando la Pe es del orden de 10^{-5} para Datos y 10^{-4} para voz

PCM M-ario

$$P_e = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}(S/N)_R}\right)$$

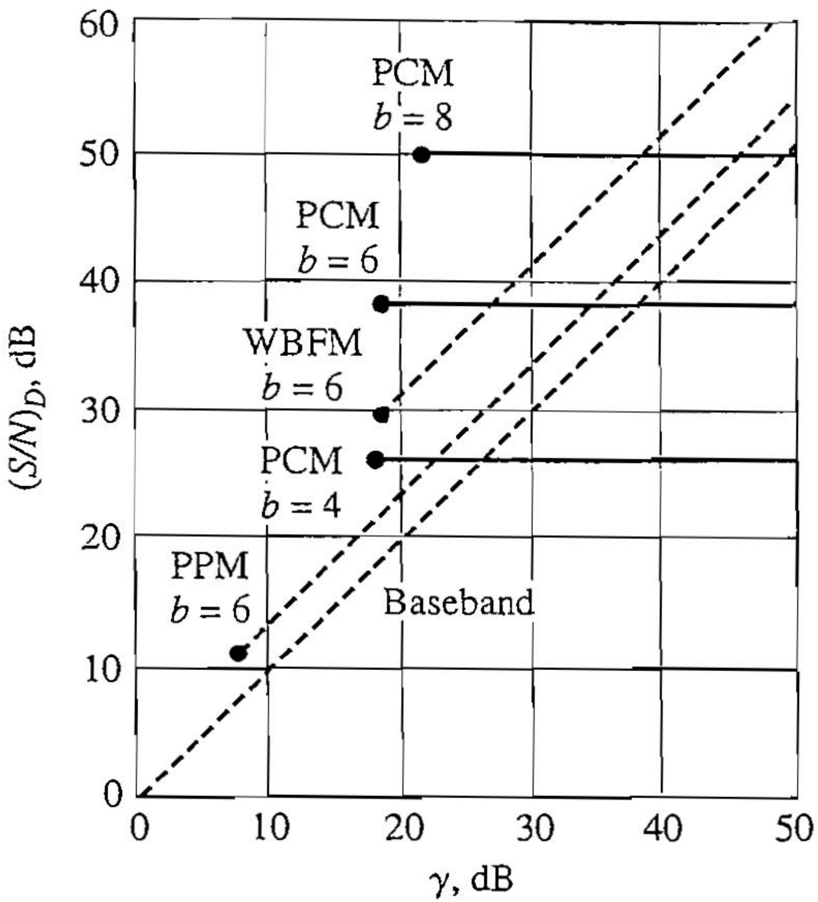
$$\boxed{(S/N)_{R\_umbral} \approx 6(M^2-1)}$$

$$(S/N)_D = 3q^2 S_x \qquad \mathrm{n} \le \frac{\mathrm{B_T}}{\mathrm{W}} \qquad q \le M^n \le M^{\frac{\mathrm{B_T}}{\mathrm{W}}}$$

$$\boxed{(S/N)_D = 3M^{2\frac{\mathrm{B_T}}{\mathrm{W}}} S_x}$$

Si aumento el $\mathrm{B_T}$ disponible, impacto exponencial en $(S/N)_D$, en FM el impacto es al cuadrado.

Comparación PCM otros modulaciones analógicas



$b=B_T/W$