Sistemas de Comunicación

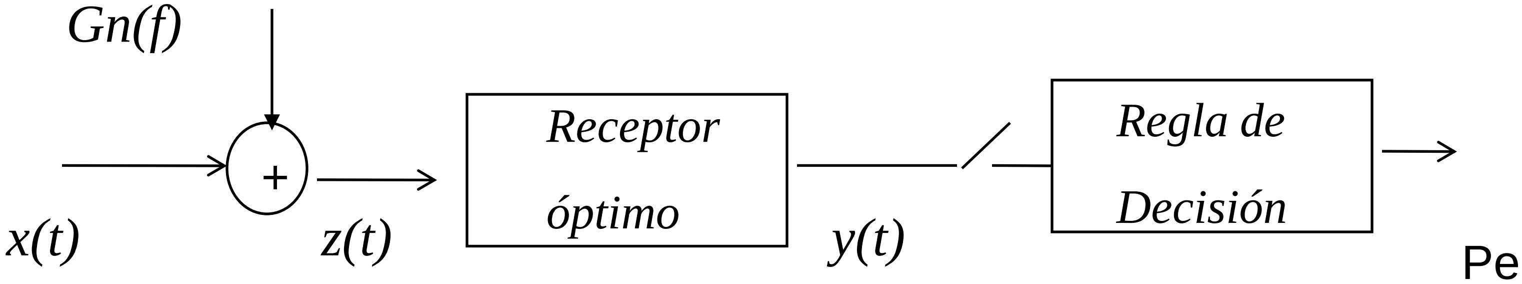
Clase 18: Receptor de Correlación

Probabilidad de error: Caso M-ario

Objetivo

- Diseño II: Receptor de correlación.
- Probabilidad de error: Caso M-ario

Diseño II: Receptor óptimo



$$\frac{p_y(y/H_1)}{p_y(y/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$ Regla de decisión óptima

Define una partición en dos regiones sobre los z $\{z_0, z_1\}$

$P_e = P(H_1/H_0)P(H_0) + P(H_0/H_1)P(H_1)$ mínima Pe:

$$\left.\begin{aligned} P(H_1/H_0) &= \int_{z_1} p_Z(z/H_0)dz \\ P(H_0/H_1) &= \int_{z_0} p_Z(z/H_1)dz \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{p_Z(z/H_1)}{p_Z(z/H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}}$$

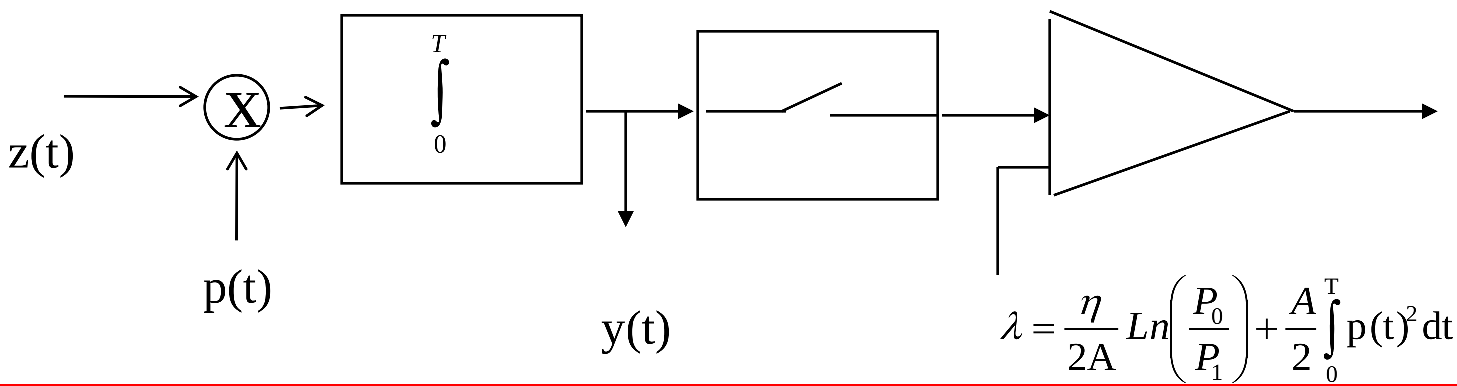
Diseño II: Receptor de Correlación

$$\text{Caso Particular: Ruido Blanco, Unipolar } 0,\ Ap(t)$$

$$\text{Receptor óptimo que minimiza Pe:}$$

$$z(t) = x(t) + n(t)$$

$$\int_0^T p(t)z(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda \quad \text{con } \lambda = \frac{\eta}{2A} Ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) + \frac{A}{2}\int_0^T p(t)^2 dt$$



Receptor óptimo: Caso Polar

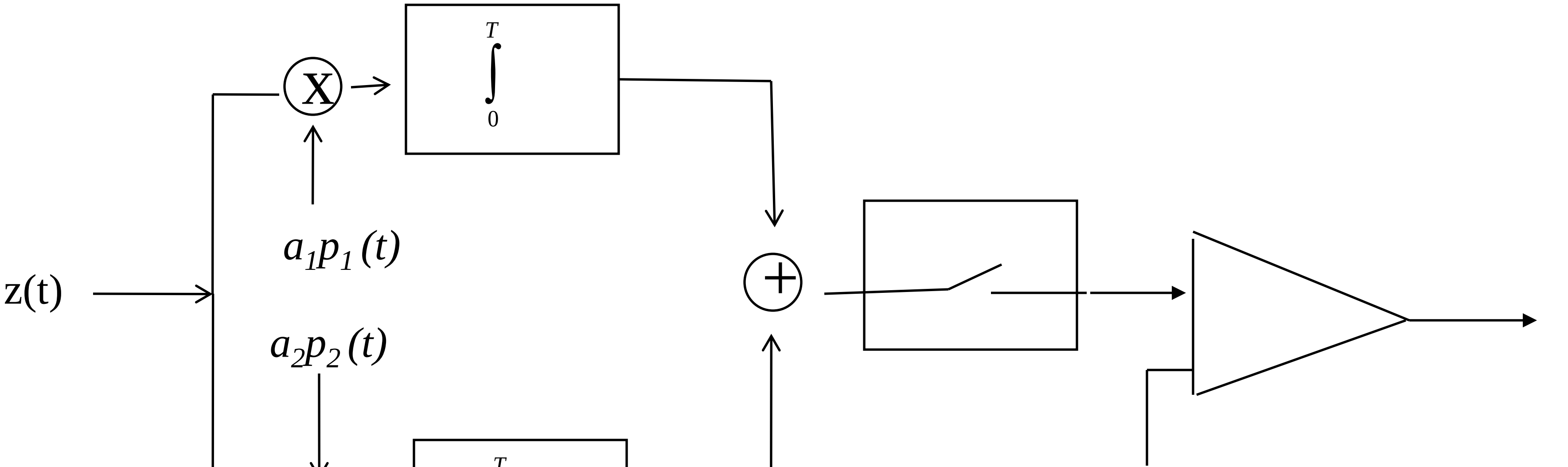
Ruido Blanco, Polar $a_0 p_0(t), a_1 p_1(t)$

$$z(t) = \begin{cases} a_0 p_0(t) + n(t) & \mathrm{H}_0 \\ a_1 p_1(t) + n(t) & \mathrm{H}_1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left(a_1 p_1(t) - a_0 p_0(t) \right) \mathrm{z(t)dt} \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{\mathrm{H}_1}{\gtrless}} \lambda \quad \text{con}$$

$$\lambda = \frac{\eta}{2} Ln\left(\frac{P_0}{P_1} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} \left(a_1{}^2 \mathrm{p}_1(\mathrm{t})^2 - a_0{}^2 \mathrm{p}_0(\mathrm{t})^2 \right) \mathrm{dt}$$

Caso Polar



$$\lambda = \frac{\eta}{2} Ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \left(a_1^{\,2} p_1(t)^2 - a_0^{\,2} p_0(t)^2\right) dt$$

Se puede extender el resultado para señales M-arias

Comparación Receptor de Correlación-Filtro Acoplado

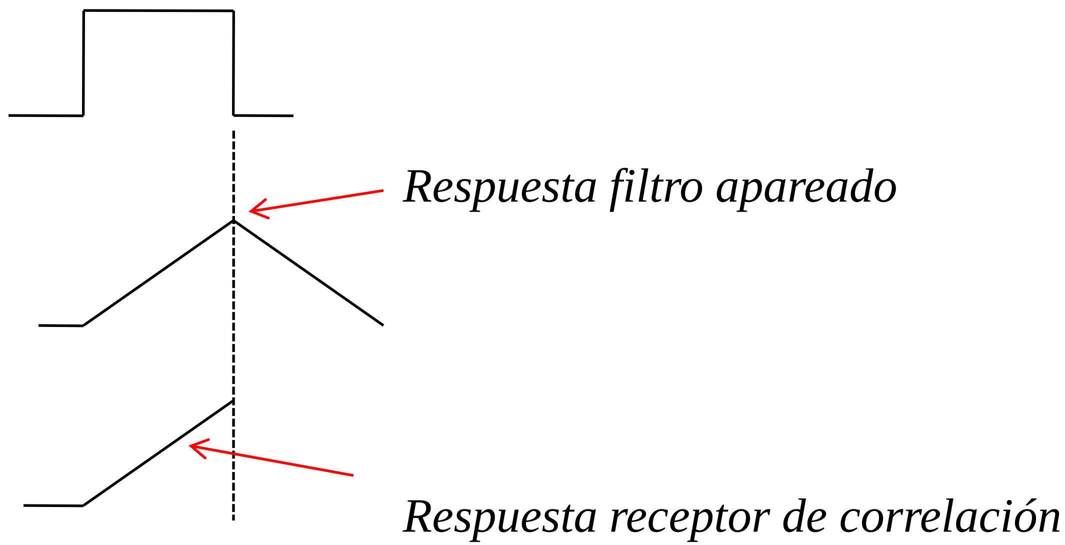
$$y_c(T) = \int_0^T p(t)z(t)dt$$

$$y_a(T) = z(t) * h(t)\Big|_T = \int_{-\infty}^{+\infty} p(T-t+s)z(s)ds\Bigg|_T$$

$$y_a(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s)z(s)ds$$

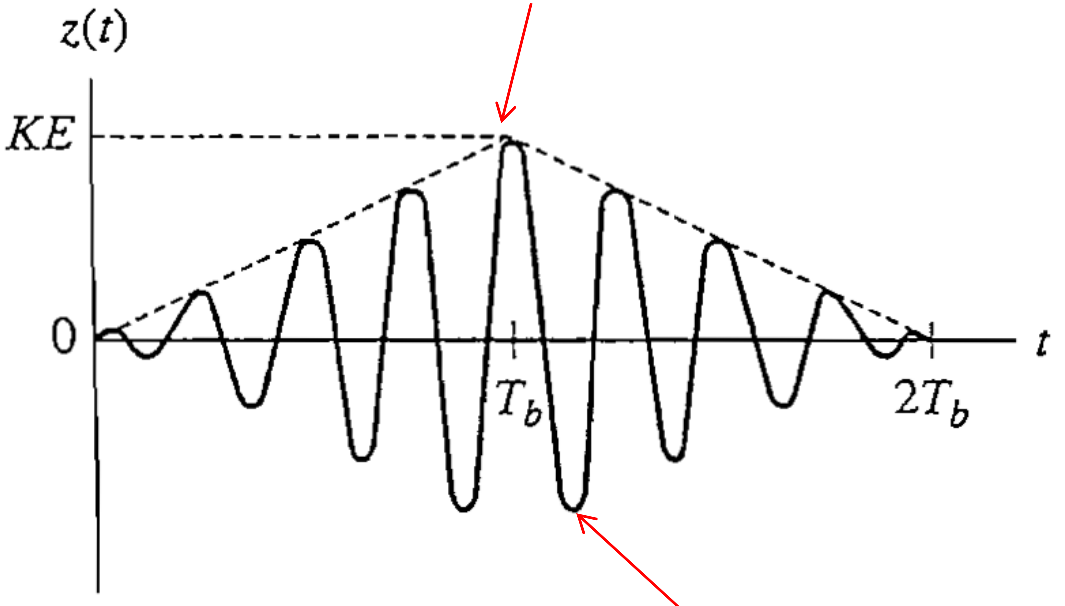
Toman el mismo valor en T, pulso p(t) duración T.

Comparación Receptor de Correlación-Filtro Acoplado



Comparación Receptor de Correlación-Filtro Acoplado

Respuesta receptor de correlación



Respuesta filtro apareado

Apareado más sensible a errores de sincronismo si p(t) pasabanda

Probabilidad de error caso M-ario

- Señalización binaria genera inmunidad frente al ruido porque solo tiene que distinguir entre dos niveles pero puede requerir un gran ancho de banda $B_T=r/2$

- Si queremos trasmitir una fuente binaria utilizando menor ancho de banda podemos empaquetar l símbolos y formar una fuente M-aria con $M= 2^l$ niveles.

- Ej: 00 ‘0’ $l=2$ $M= 2^2 =4$

  01 ‘1’

  10 ‘2’

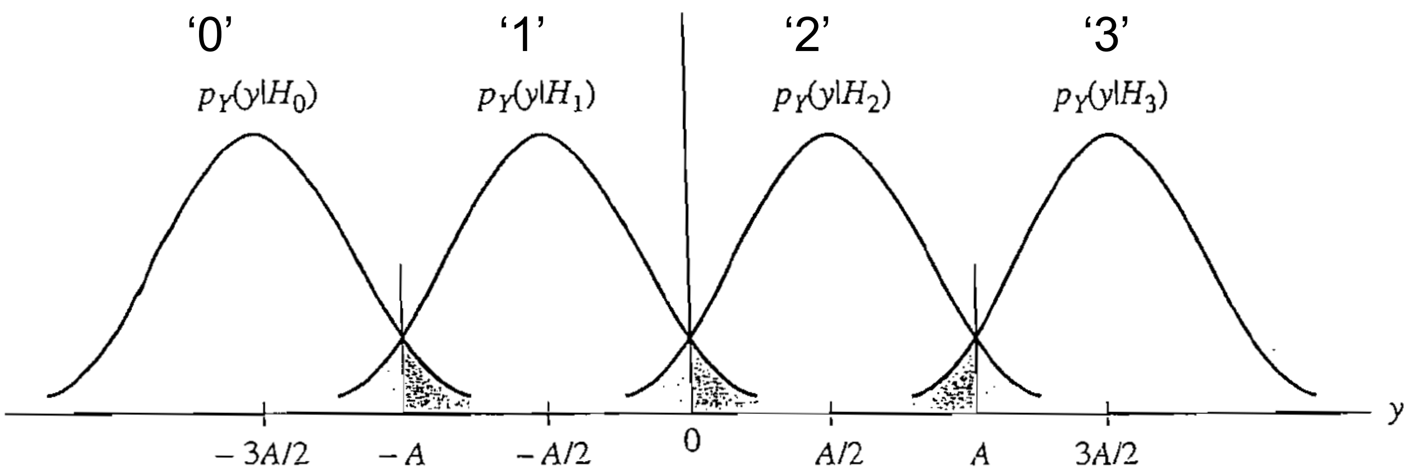
  11 ‘3’

Probabilidad de error caso M-ario

Asumamos:

$$a_k = \pm\frac{A}{2}, \pm\frac{3A}{2} \dots \pm\frac{(M-1)A}{2} \quad \text{niveles, equip. } \mathrm{P_i} = \frac{1}{M}$$

$$P_{es} = \frac{1}{M}\left(P_{e0} + P_{e1} + \dots P_{eM-1}\right)$$



Probabilidad de error caso M-ario

$$P_{e0} = P_{e3} = Q\left(A/2\sigma\right)$$

$$P_{e1} = P_{e2} = 2Q\left(A/2\sigma\right)$$

En general :

$$P_{es} = \frac{1}{M}\left(2Q\left(A/2\sigma\right)(M-2) + 2Q\left(A/2\sigma\right)\right)$$

$$\boxed{P_{es} = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right)Q\left(A/2\sigma\right)}$$

Probabilidad de error caso M-ario

$$\text{Si los símbolos son equiprobables}: \overline{a_k^2} = \frac{M^2-1}{12}A^2$$

$$P_{es} = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(A/_{2\sigma}\right) = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{A^2/_{4\sigma^2}}\right)$$

$$P_{es} = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{E_d/_{2\eta}}\right) \quad \text{con} \quad E_d = A^2\int p^2(t)dt$$

$$E_b = \frac{1}{M}\left(\sum_k \int a_k^2 p^2(t)dt\right) = \frac{M^2-1}{12}A^2\int p^2(t)dt$$

$$\boxed{P_{es} = 2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_b}{\eta}}\right)}$$

Probabilidad de error de bit en trasmisión M-aria

$$l = \log_2 M \qquad r_s = \frac{r_b}{l} = \frac{r_b}{\log_2 M}$$

Bajo el supuesto que el error en un símbolo solo cambia genera un cambio al código contiguo y cambia un solo bit.

$$\boxed{P_{be} \approx 2\frac{M-1}{M\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_b}{\eta}}\right)}$$