# Fundamentos de Programación Entera
# 8. Generación de columnas

Carlos Testuri – Fernando Islas

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2012–2025

## Contenido

## Formulación con intersección de regiones factibles

Una alternativa para resolver los problemas es descomponerlos según conjuntos de variables (columnas).
Dado el problema *IP* max $\{c^\tau x : x \in X\}$, su región factible puede describirse como intersección de regiones, $X = \cap_{k=0}^{K} X^k$.

Un caso particular es

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k \\ \text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b \qquad (1) \\ & D^k x^k \leq e^k, \quad k = 1, ..., K \quad (2) \\ & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, ..., K. \end{array}$$

donde los conjuntos $X^k = \{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k} : D^k x^k \leq e^k\}$ son independientes, y solo las restricciones (1) (conjunto $X^0$) vinculan las variables.

## Formulación con intersección de regiones factibles

Donde se tiene la formulación definida en términos de las regiones independientes

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k \\ \text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b \\ & x^k \in X^k, \quad k = 1, ..., K. \end{array}$$

Se transforma el problema en uno equivalente, en el que se representan directamente los puntos de la regiones factibles, $X^k$, y su selección a partir de nuevas variables.

El problema equivalente, denominado *problema maestro*, tiene una gran cantidad de variables.

# Reformulación Dantzig-Wolfe

Dado el problema *IP* se asume que cada región factible $X^k$ es finita y puede describirse a partir de sus puntos factibles, $x^{ks}$, $s = 1, ..., S_k$, con $k = 1, ..., K$.

Lo que permite reformular la descripción de $X^k =$
$\{x^k \in \mathbb{R}^{n_k} : x^k = \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} x^{ks},\ \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1,\ \lambda_{ks} \in \{0, 1\},\ s = 1, ..., S_k\}$.

Sustituyendo la nueva descripción de $x^k$ en la formulación original se tiene el problema maestro

$$
(IPM) \quad \begin{array}{ll}
\max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S_k} (c^k x^{ks}) \lambda_{ks} \\
\text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S_k} (A^k x^{ks}) \lambda_{ks} = b \\
& \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1, \quad k = 1, ..., K \\
& \lambda_{ks} \in \{0, 1\},\ s = 1, ..., S_k,\ k = 1, ..., K.
\end{array}
$$

## Relajación a programación lineal del problema maestro

La idea es resolver la relajación a programación lineal del problema *IPM*.

Se tiene el problema maestro relajado

$$
(LPM) \qquad \begin{array}{rll}
z^{LPM} = & \max & \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S_k}(c^k x^{ks})\lambda_{ks} \\
& \text{s.a} & \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S_k}(A^k x^{ks})\lambda_{ks} = b \qquad (1) \\
& & \sum_{s=1}^{S_k}\lambda_{ks} = 1, \quad k = 1, ..., K \quad (2) \\
& & \lambda_{ks} \geq 0,\ s = 1, ..., S_k,\ k = 1, ..., K.
\end{array}
$$

Para el que se definen las variables duales asociadas a las restricciones de enlace, (1), como $\pi_i, i = 1, ..., m$, y las variables duales asociadas a las restricciones de las regiones, (2), como $\mu_k, k = 1, ..., K$.

## Resolución del problema maestro relajado a lineal

En el proceso de resolución y debido a la gran cantidad de variables, no se las considera simultáneamente a todas las que están fuera de la base para determinar cual es la mejor para entrar a la base (condición de optimalidad en método simplex: $c_N^\tau - c_B^\tau B^{-1}N \leq 0$, para maximización), por escasez de recursos y porque la mayoría de las variables nunca entran en la base.

Por lo que se necesita un método para determinar algunas variables que estando fuera de la base son candidatas a mejorar el objetivo, sin tener que hacerlo para todas las variables.

Este método se logra resolviendo un problema auxiliar que no indaga todos los costos reducidos y que en su función objetivo determina una cota de los valores de costos reducidos; con lo que además, permite establecer la condición de optimalidad general.

## Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 1/4

**Algoritmo**

*1. Inicialización*

Se disponible un conjunto inicial de variables con al menos un punto en representación de cada región $k$, con lo que se define y resuelve el problema restringido

$$(RLPM) \qquad \begin{array}{rll} \tilde{z}^{LPM} = & \max & \tilde{c}\tilde{\lambda} \\ & \text{s.a} & \tilde{A}\tilde{\lambda} = \tilde{b} \\ & & \tilde{\lambda} \geq 0. \end{array}$$

Su resolución da solución primal óptima $\tilde{\lambda}^*$ y solución dual óptima $(\pi^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^K$.

# Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 2/4

## Algoritmo

*1. Inicialización (Cont)*

Donde $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{c}$ son subvectores de

$$\begin{array}{ccccccc} (\lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1S_1} & \cdots & \lambda_{K1} & \ldots & \lambda_{KS_K}) \\ (c^1x^{11} & \ldots & c^1x^{1S_1} & \ldots & c^Kx^{K1} & \ldots & c^Kx^{KS_K}) \end{array}$$

respectivamente, y donde $\tilde{A}$ es una submatriz de y $\tilde{b}$ es

$$\begin{pmatrix} A^1x^{11} & \ldots & A^1x^{1S_1} & \cdots & A^Kx^{K1} & \ldots & A^Kx^{KS_K} \\ 1 & \ldots & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 3/4

## Algoritmo (cont.)

*2. Factibilidad primal*

Toda solución factible de *RLPM* es factible para *LPM*. En particular $\tilde{\lambda}^*$ es solución factible para *LPM*.

Además, $\tilde{z}^{LPM} = \tilde{c}\tilde{\lambda}^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^* b_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k^* \leq z^{LPM}$.

*3. Optimalidad*

Se verifica si $(\pi^*, \mu^*)$ es dual factible para *LPM*. Para cada variable, es decir $x \in X^k$ con $k = 1, ..., K$, se debe cumplir que los costos reducidos son $c^k x - \pi^* A^k x - \mu_k^* \leq 0$.

En lugar de indagar todas las variables, se resuelve (para $X^k$) el subproblema

$$\gamma_k = \max\{(c^k - \pi^* A^k)x - \mu_k^* : x \in X^k\}.$$

## Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 4/4

### Algoritmo (cont.)

*4. Criterio de parada*

Si $\gamma_k = 0$ para $k = 1, ..., K$, entonces la solución $(\pi^*, \mu^*)$ es dual factible para $LPM$, y se cumple que $z^{LPM} \leq \sum_{i=1}^{m} \pi_i^* b_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k^*$. Como el valor objetivo de la solución primal factible $\tilde{\lambda}^*$ iguala al de su cota superior, entonces $\tilde{\lambda}^*$ es óptima para $LPM$.

*5. Generación de nueva columna (ingreso de nueva variable)*

Si $\gamma_k > 0$ para algún $k$, entonces la variable correspondiente a la solución óptima del subprolema, $\tilde{x}^{k*}$, se agrega al problema $RLPM$.

*6. Resolución*

Se resuelve el nuevo problema $RLPM$, que solo difiere en una variable con el anterior. Se continúa en el paso 2.

## Fortaleza del problema maestro relajado

El problema maestro relajado se obtuvo del problema maestro al sustituir $x^k$ por $\sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} x^{ks}$, donde $\sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1,\ \lambda_{ks} \geq 0,\ s = 1, ..., S_k$.
Lo que es equivalente a sustituir $x^k \in X^k$ por $x^k \in \text{conv}(X^k)$, por lo que se tiene que

**Proposición (1)**

$$\begin{array}{rll} z^{LPM} = & \max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k \\ & s.a & \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b \\ & & x^k \in conv(X^k),\ k = 1, ..., K. \end{array}$$

## Resolución mediante planos de corte y relajación Lagrangeana

El problema *IP* original también puede resolverse mediante planos de corte, generando inecuaciones válidas para cada región $X^k$.

Alternativamente, también puede resolverse mediante relajación Lagrangeana, relajando las restricciones de enlace y resolviendo el problema dual $z^{LD} = \min_u L(u)$ donde

$$L(u) = \begin{array}{ll} \max & \sum_{k=1}^{K}(c^k)^\tau x^k + u^\tau(b - \sum_{k=1}^{K} A^k x^k) \\ \text{s.a} & x^k \in X^k,\ k = 1, ..., K, \end{array}$$

el cual es separable en subproblemas según regiones

$$L(u) = u^\tau b + \sum_{k=1}^{K} \left( \begin{array}{ll} \max & (c^k - u^\tau A^k)^\tau x^k \\ \text{s.a} & x^k \in X^k \end{array} \right).$$

## Comparación con resolución con planos de corte y relajación Lagrangeana

Sea $z^{LD}$ el valor óptimo del problema dual Lagrangeano con relajación de las restricciones de enlace.
Sea $z^{Corte}$ el valor óptimo cuando se incorporan inecuaciones válidas a la relajación a programación lineal del problema *IP* original de forma de obtener $\text{conv}(X^k)$ para cada $k$.

**Proposición (2)**

*Las cotas duales obtenidas por generación de columnas, relajación Lagrangeana y planos de corte coinciden,* $z^{LPM} = z^{LD} = z^{Corte}$.

La complejidad de los problemas de optimización y separación de $\text{conv}(X^k)$ es la misma, por lo que la elección entre ellos depende de su dificultad relativa y la convergencia de los métodos.