Fundamentos de Programación Entera
7. Relajación Lagrangeana

Carlos Testuri – Fernando Islas

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2012–2025

Contenido

Relajación

Si las restricciones de un problema pueden clasificarse en fáciles y difíciles de resolver, entonces se podría relajar el problema al no consider las restricciones difíciles.
La relajación resultante es más fácil de resolver pero a costa de establecer una cota dual más débil del problema.

Una alternativa de relajación es incorporar en la función objetivo una penalización por el incumplimiento de las restricciones no consideradas.

Relajación Lagrangeana

Sea el problema *IP*

$$\begin{array}{lll} z = & \max & c^\tau x \\ & \text{s.a} & Ax \leq b \\ & & x \in X, \end{array}$$

donde las m restricciones $Ax \leq b$ son difíciles de resolver.

Se definen las tasas de penalización, $u = (u_1, ..., u_m) \geq 0$, *multiplicadores de Lagrange*, correspondientes a cada restricción. donde las m restricciones $Ax \leq b$ son difíciles de resolver.
Se tiene el problema relajado $IP(u)$

$$\begin{array}{lll} z(u) = & \max & c^\tau x + u^\tau (b - Ax) \\ & \text{s.a} & x \in X. \end{array}$$

Cada problema $IP(u)$ es una *relajación Lagrangeana* de *IP*, para todo $u \geq 0$.

Proposición (1)

Dado $IP(u)$, entonces $z(u) \geq z$, para todo $u \geq 0$.

Problema dual de relajación Lagrangeana

Dado que $IP(u)$ es una relajación de IP, su valor óptimo es una cota superior del valor óptimo de IP, $z(u) \geq z$.

La cota más ajustada sobre los valores de u se determina mediante el problema *dual Lagrangeano LD*

$$w_{LD} = \min \quad \{z(u) : u \geq 0\}.$$

En el caso de que las restricciones del problema IP son de igualdad, los multiplicadores de Lagrange son libres y el problema dual de relajación Lagrangeana es

$$w_{LD} = \min_u \quad z(u).$$

Resolución de IP mediante resolución de relajación Lagrangeana

La resolución de $IP(u)$ puede llevar a la resolución de IP.

Proposición (2)

Si $u \geq 0$*,*

1. $x^*(u)$ *es solución óptima de* $IP(u)$*,*
2. *se cumple que* $Ax^*(u) \leq b$*, y*
3. $(Ax^*(u))_i = b_i$ *cuando* $u_i > 0, i = 1, \ldots, m$*,*

entonces $x^*(u)$ *es solución óptima para* IP*.*

Prueba.

De (1) se tiene que $w_{LD} \leq z(u) = c^\tau x^*(u) + u^\tau(b - Ax^*(u))$.
De (3), $c^\tau x^*(u) + u^\tau(b - Ax^*(u)) = c^\tau x^*(u)$.
De (2), $x^*(u)$ es factible en IP por lo que $c^\tau x^*(u) \leq z$.
Entonces $w_{LD} \leq c^\tau x^*(u) + u^\tau(b - Ax^*(u)) = c^\tau x^*(u) \leq z$.
Debido a ser relajación $w_{LD} \geq z$, entonces $w_{LD} = z$, por lo que $x^*(u)$ es solución óptima para IP. □

Relajación Lagrangeana: caso UFL 1/2

Dado el problema *IP* de localización de instalación no-capacitada

$$\begin{array}{rll} z = & \max & -\sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ & \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m \\ & & x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n \\ & & x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n. \end{array}$$

Relajando la restricción de demanda se obtiene el problema $IP(u)$

$$\begin{array}{rll} z(u) = & \max & -\sum_{j=1}^{n} f_j y_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + u_i) x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \\ & \text{s.a} & x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n \\ & & x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n. \end{array}$$

Relajación Lagrangeana: caso UFL 2/2

El problema $IP(u)$ puede separarse según localizaciones; por lo que se tiene que $z(u) = \sum_{j=1}^{n} z_j(u) + \sum_{i=1}^{m} u_i$, donde cada subproblema $IP_j(u)$ es

$$
\begin{array}{rll}
z_j(u) = & \max & -f_j y_j - \sum_{i=1}^{m} (c_{ij} + u_i) x_{ij} \\
 & \text{s.a.} & x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m \\
 & & x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, i = 1, ..., m.
\end{array}
$$

Dado u, $IP_j(u)$ puede resolverse directamente:

i. si $y_j = 0$, entonces $x_{ij} = 0$ y $z_j(u) = 0$;
ii. si $y_j = 1$, entonces $x_{ij} = 1$, y si $-(c_{ij} + u_i) > 0$ entonces $z_j(u) = -f_j - \sum_{i=1}^{m} \min\{0, (c_{ij} + u_i)\}$.

Reforzamiento del problema dual Lagrangeano 1/2

¿Cuán buena es la cota dual, w_{LD}, obtenida?

Si el conjunto factible X puede definirse por un conjunto finito de puntos $\{x^1, ..., x^S\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
w_{LD} &= \min_{u\geq 0} z(u) \\
&= \min_{u\geq 0} \{\max_{x\in X} \{c^\tau x + u^\tau (b - Ax)\}\} \\
&= \min_{u\geq 0} \{\max_{s=1,\dots,S} \{c^\tau x^s + u^\tau (b - Ax^s)\}\} \\
\\
&= \min \theta \\
& \quad \text{s.a} \quad \theta \geq c^\tau x^s + u^\tau (b - Ax^s), \quad s = 1, ..., S, \\
& \qquad\qquad u \geq 0, \theta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donde el problema obtenido es lineal.

Reforzamiento del problema dual Lagrangeano 2/2

El problema dual del problema lineal es

$$\begin{array}{rll} w_{LD} = & \max & \sum_{s=1}^{S} \lambda_s (c^\tau x^s) \\ & \text{s.a} & \sum_{s=1}^{S} \lambda_s (Ax^s - b) \leq 0 \\ & & \sum_{s=1}^{S} \lambda_s = 1 \\ & & \lambda_s \geq 0, s = 1, ..., S. \end{array}$$

Si se establece $x = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s x^s$, con $\sum_{s=1}^{S} \lambda_s = 1, \lambda_s \geq 0, s = 1, ..., S$ (combinación convexa), se tiene que

$$\begin{array}{rll} w_{LD} = & \max & c^\tau x \\ & \text{s.a} & Ax \leq b \\ & & x \in \text{conv}(X). \end{array}$$

Lo que da una medida de fortaleza de la cota obtenida por el problema dual Lagrangeano.

Resolución del problema dual Lagrangeano 1/3

¿Cómo resolver el problema?

Una forma de resolución es mediante programación lineal, pero debido a la cantidad de restricciones se requiere usar un mecanismo de generación de restricciones.

Otra alternativa es utilizar un *algoritmo de subgradiente*.
El subgradiente es una generalización del gradiente, cuando éste no está definido.
El *subgradiente* en u de una función convexa $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es un vector $\eta(u) \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(v) \geq f(u) + \eta(u)^\tau (v - u)$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

El algoritmo permite resolver el problema de minimización de una función convexa lineal a tramos.

Resolución del problema dual Lagrangeano 2/3

Dado el problema *LD*

$$w_{LD} = \quad \min \quad \{z(u) : u \geq 0\},$$

donde $z(u) = \max_{s=1,\ldots,S} \{c^\tau x^s + u^\tau (b - Ax^s)\}$.

La función $z(u)$ es una función convexa lineal a trozos.

Resolución del problema dual Lagrangeano 3/3

Subgradiente para dual Lagrangeano

Inicialización. Se establece punto de partida u^1; $k := 1$,
Iteración
Resolver el problema Lagrangeano $IP(u^k)$ obteniendo solución $x^*(u^k)$.
Elegir subgradiente, si es cero o se detecta un cambio de concavidad, u^k es óptimo. Parar.
Sino establecer $u^{k+1} := \max\{u^k - \mu_k(b - Ax^*(u^k)), 0\}$
$k := k + 1$

Donde $(b - Ax^*(u^k))$ es subgradiente de $z(u)$ en u^k.
En cada iteración se da un paso de largo μ_k, desde u^k en la dirección opuesta al subgradiente. La dificultad reside en determinar el tamaño de los pasos.

Proposición (3)

Si $\sum_k \mu_k \to \infty$, *y* $\mu_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$, *entonces* $z(u^k) \to w_{LD}$.

Selección del problema dual Lagrangeano

Si se quiere resolver mediante relajación Lagrangeana el problema *IP*

$$\begin{array}{rll} z = & \max & c^{\tau}x \\ & \text{s.a} & A^1x \leq b^1 \\ & & A^2x \leq b^2 \\ & & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

¿Qué restricciones seleccionar para relajar?

La decisión depende del compromiso entre

1. la fortaleza de la cota dual, w_{LD}, obtenida,
2. la facilidad de resolución de los subproblemas $IP(u)$,
3. la facilidad de resolución del problema $w_{LD} = \min_{u \geq 0} z(u)$