Fundamentos de Programación Entera
6. Planos de corte

Carlos Testuri – Fernando Islas

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2012–2025

Contenido

1. Introducción
2. Inecuaciones válidas
3. Inecuaciones válidas para LP
4. Inecuaciones válidas para IP
5. Procedimiento de Chvátal-Gomory
6. Algoritmo de planos de corte

Resolución mediante planos de corte

La metodología de resolución mediante *planos de corte* (inecuaciones) trata de la construcción aproximada del casco convexo de las soluciones factibles de un problema de programación entera.

Mediante un proceso iterado de inclusión de inecuaciones (planos de corte) se busca ajustar la formulación del problema de forma que sea lo más próxima al casco convexo de las soluciones factibles.

Esquema de resolución mediante planos de corte

Dado el problema IP

$$\begin{array}{ll} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & x \in P \cap \mathbb{Z}^n = X, \end{array}$$

el objetivo es ajustar la formulación P de forma que ésta tienda a ser similar al $\operatorname{conv}(X)$; e idealmente, resolver el problema de programación lineal equivalente

$$\begin{array}{ll} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & x \in \operatorname{conv}(X). \end{array}$$

Para los problemas en $\mathcal{NP}$-completo no se espera tener una descripción explícita del casco convexo.
Lo que se espera es, para algunas de sus instancias, tener una aproximación del casco en "vecindades" donde hay condiciones de optimalidad.

Inecuaciones válidas

Se dice que una inecuación $\pi^\tau x \leq \pi_0$ es una *inecuación válida* para X si la inecuación se cumple para todo $x \in X$.

Dados $X = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b\}$ y $\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : \hat{A}x \leq \hat{b}\}$, las inecuaciones que definen ambas formulaciones son inecuaciones válidas para X.

¿Cómo determinar y utilizar inecuaciones válidas relevantes?

Inecuaciones válidas: ejemplos 1/8

1. *Inecuaciones lógicas*
   Dado $X = \{x \in \mathbb{B}^4 : 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1\}$.

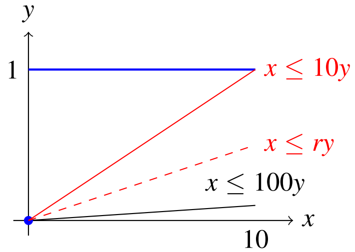
   Si $x_1 = 1$ entonces $x_2 = 1$ y $x_4 = 1$, por lo que se infieren las inecuaciones válidas $x_1 \leq x_2$ y $x_1 \leq x_4$.

   Además, es infactible si $x_1 = 1$ y $x_3 = 1$, por lo que se infiere la inecuación válida $x_1 + x_3 \leq 1$.

   ¿Alguna otra inecuación válida?

Inecuaciones válidas: ejemplos 2/8

2. *Inecuaciones binarias mixtas* 1/2
   Dado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B} : x \leq 100y, 0 \leq x \leq 10\}$.
   Todas las inecuaciones $x \leq ry$, con $r \in [10, 100]$ son válidas



En particular la inecuación válida con $r = 10$ permite determinar $\text{conv}(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq 10y, 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 1\}$.

Inecuaciones válidas: ejemplos 3/8

3. *Inecuaciones binarias mixtas* 2/2
   Dado el problema de localización de instalación capacitada (CFL) con demanda absoluta

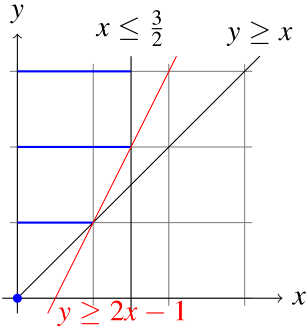
$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, ..., m, \\
 & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j y_j, \quad j = 1, ..., n, \\
 & x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.
\end{array}
$$

   Las soluciones factibles cumplen $x_{ij} \leq a_i$ y $x_{ij} \leq b_j y_j$, para $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$.

   ¿Es $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\} y_j$ una inecuación válida de CFL?

Inecuaciones válidas: ejemplos 4/8

4. *Inecuaciones enteras mixtas*
Dado $X = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : y \geq x, 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, y \geq 0\}$.



Se tiene la inecuación válida $y \geq 2x - 1$ que permite obtener
$\text{conv}(X) = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq x, 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, y \geq 2x - 1, y \geq 0\}$.

Inecuaciones válidas: ejemplos 5/8

5. *Inecuaciones de redondeo a entero*
   Sea $X = P \cap \mathbb{Z}^2$ donde $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : 9x_1 + 15x_2 \geq 23, x \geq 0\}$.

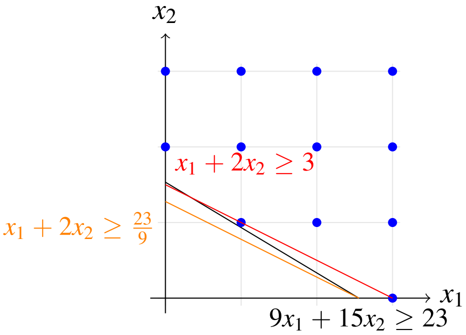
   Dividiendo entre 9 se tiene la inecuación válida para P
   $$x_1 + \tfrac{5}{3}x_2 \geq \tfrac{23}{9}.$$

   Dado que $x \geq 0$ se sustituyen sus coeficientes por los enteros superiores (función techo) y se tiene la inecuación válida para P
   $$x_1 + 2x_2 \geq x_1 + \tfrac{5}{3}x_2 \geq \tfrac{23}{9}.$$

   Dado que x y sus coeficientes en la expresión son enteros, la valoración de la expresión es entera; por lo que se puede redondear $\frac{23}{9}$ a su entero superior, obteniéndose la inecuación válida para X
   $$x_1 + 2x_2 \geq 3.$$

Inecuaciones válidas: ejemplos 6/8

Representación gráfica



¿Si se agrega $x_1 + 2x_2 \geq 3$ a la formulación P, se establece el $\mathrm{conv}(X)$?

Inecuaciones válidas: ejemplos 7/8

6. *Inecuaciones de redondeo a entero mixtas*
   Sea $X = P \cap (\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R})$ donde
   $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : 9x_1 + 15x_2 + y \geq 23, x, y \geq 0\}$.

   Dividiendo entre 9 y agrupando se tiene la inecuación válida para P
   $$x_1 + \frac{5}{3}x_2 \geq \frac{23-y}{9}.$$

   Dado que $x \geq 0$ se sustituyen sus coeficientes por los enteros superiores (función techo) la valoración de la expresión es entera; por lo que se puede redondear $\frac{23}{9}$ a su entero superior, obteniéndose la inecuación válida para X
   $$x_1 + 2x_2 + ay \geq 3 \text{ (para algún } a\text{)}.$$
   Dado que $\lceil \frac{23-y}{9} \rceil$ decrece de 3 a 2, cuando $y = 5$; por lo que la inecuación es válida para $a \geq \frac{1}{5}$.

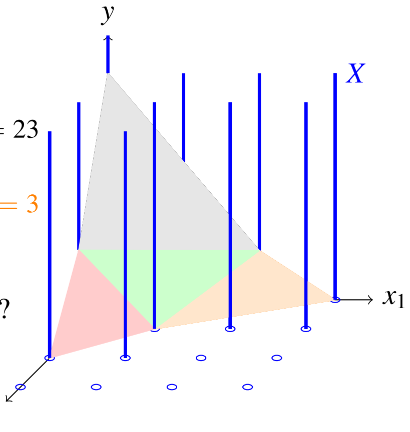
Inecuaciones válidas: ejemplos 8/8

Representación gráfica

$9x_1 + 15x_2 + y = 23$

$x_1 + 2x_2 + \frac{y}{5} = 3$

¿Cásco convexo?



Inecuaciones válidas para programación lineal

Proposición (1)

La inecuación $\pi^\tau x \leq \pi_0$ *es válida para* $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ *si y solo si existe* $u \geq 0$ *tal que* $u^\tau A \geq \pi^\tau$ *y* $u^\tau b \leq \pi_0$*.*

Prueba.

Se tiene por dualidad que $\max\{\pi^\tau x : x \in P\} \leq \pi_0$ si y solo si $\min\{u^\tau b : u^\tau A \geq \pi^\tau, u \geq 0\} \leq \pi_0$. □

Inecuación válida elemental

Inecuaciones válidas para la región factible entera $\{x : Ax \leq b, x \geq 0, entero\}$

Proposición (2)

Dado $X = \{y \in \mathbb{Z} : y \leq b\}$, entonces la inecuación $y \leq \lfloor b \rfloor$ es válida para X.

Inecuaciones válidas enteras mixtas simples (1/2)

Dado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : x + y \geq b, x \geq 0\}$.

Proposición (3)

Sea $f = b - \lfloor b \rfloor$ *(parte fraccionaria).*
i) La inecuación $x \geq f \cdot (\lceil b \rceil - y)$ *es válida para X.*
ii) La formulación

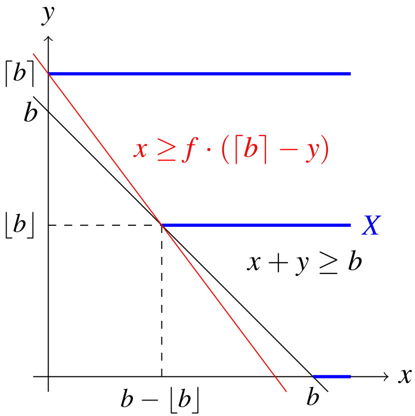
$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y \geq b,\ x + fy \geq f \lceil b \rceil,\ x \geq 0\}$$

describe $\mathrm{conv}(X)$.

Demo. (Gráfica)

Inecuaciones válidas enteras mixtas simples 2/2

Dado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} : x + y \geq b, x \geq 0\}$.



Determinar la recta por los puntos $(0, \lceil b \rceil)$ y $(b - \lfloor b \rfloor, \lfloor b \rfloor)$.

Inecuaciones de redondeo entero mixtas

Dado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^n : \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \leq b + x, x \geq 0\}$.

Proposición (4)

Sean $f_j = a_j - \lfloor a_j \rfloor$ y $f_b = b - \lfloor b \rfloor$.
La inecuación de redondeo entero mixta (MIR),

$$\sum_{j=1}^{n} (\lfloor a_j \rfloor + \frac{(f_j - f_b)^+}{1 - f_b}) y_j \leq \lfloor b \rfloor + \frac{x}{1 - f_b},$$

es válida para X.

Inecuaciones de Gomory de redondeo entero mixtas

Dado
$X = \{(y_0, y, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{|N_1|} \times \mathbb{R}^{|N_2|} : y_0 + \sum_{j \in N_1} a_j y_j + \sum_{j \in N_2} a_j x_j = b, x \geq 0\}$
donde $b \notin \mathbb{Z}$.

Proposición (5)

Sean $f_j = a_j - \lfloor a_j \rfloor$ con $j \in N := N_1 \cup N_2$.
La inecuación de Gomory entero mixta,

$$\sum_{j \in N : f_j \leq f_b} f_j y_j + \sum_{j \in N : f_j > f_b} \frac{f_b(1 - f_j)}{1 - f_b} y_j + \sum_{j \in N : a_j > 0} a_j x_j - \sum_{j \in N : a_j < 0} \frac{f_b a_j}{1 - f_b} x_j \geq f_b$$

es válida para X.

Inecuaciones válidas para IP: ejemplo

Sea $X = P \cap \mathbb{Z}^2$ con $P = \{x : 3x_1 + x_2 \leq 6, x_1 + 2x_2 \leq 6, x \geq 0\}$

1. Se establece la combinación lineal de las restricciones con coeficientes no negativos $u = (\frac{1}{18}, \frac{1}{2})$. Obteniéndose $\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{18} \leq \frac{1}{3}$ y $\frac{x_1}{2} + x_2 \leq 3$, con resultado $\frac{2}{3}x_1 + \frac{19}{18}x_2 \leq \frac{10}{3}$.
2. Se reducen los coeficientes del lado izquierdo al entero próximo, $\lfloor\frac{2}{3}\rfloor x_1 + \lfloor\frac{19}{18}\rfloor x_2 \leq \frac{10}{3}$, obteniendo la inecuación válida para P: $0x_1 + x_2 \leq \frac{10}{3}$.
3. Dado que el lado izquierdo es entero, se puede reducir el lado derecho al entero próximo, obteniéndose la inecuación válida $x_2 \leq \lfloor\frac{10}{3}\rfloor = 3$.

Generación de inecuaciones válidas: procedimiento de Chvátal-Gomory

Sea $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ con $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz con columnas $\{a_1, ..., a_n\}$ y $u \in \mathbb{R}^m$, $u \geq 0$:

1. La inecuación $\sum_{j=1}^n u^\tau a_j x_j \leq u^\tau b$ es válida para P, dado que $u \geq 0$ y $\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$
2. La inecuación $\sum_{j=1}^n \lfloor u^\tau a_j \rfloor x_j \leq u^\tau b$ es válida para P, dado que $x \geq 0$.
3. La inecuación $\sum_{j=1}^n \lfloor u^\tau a_j \rfloor x_j \leq \lfloor u^\tau b \rfloor$ es válida para X, dados que x y $\sum_{j=1}^n \lfloor u^\tau a_j \rfloor$ son enteros.

Proposición (6)

Toda inecuación válida para X puede obtenerse aplicando una cantidad finita de veces el procedimiento de Chvátal-Gomory.

Resolución mediante agregado de inecuaciones válidas

El objetivo es que a partir de la formulación inicial $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ con $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ se generen un conjunto de inecuaciones válidas $Dx \leq d$ para X.

La formulación inicial se puede ajustar mediante el agregado de las inecuaciones, $Q = \{x : Ax \leq b, Dx \leq d, x \geq 0\}$, lo que permite aproximarse al $\text{conv}(X)$.

Esto permite tener una formulación ajustada que potencialmente genere cotas más ajustadas en el caso de utilizar ramificado y acotamiento.

La desventaja puede ser que la cantidad de inecuaciones a agregar sea enorme, dificultando la resolución del problema.

¿Cómo elegir entre las inecuaciones a agregar?

Resolución mediante agregado de inecuaciones válidas relevantes

A veces la región factible entera de una formulación P puede describirse como la intersección de conjuntos, $X = X^1 \cap X^2$, por lo que se puede poner énfasis en alguno que sea fácil de resolver.

Supongamos que la resolución en $X^2 = P^2 \cap \mathbb{Z}^n$ es fácil, entonces se tendrá una descripción explícita de $Q^2 = \text{conv}(P^2 \cap \mathbb{Z}^n)$. Lo que permite reemplazar la formulación original $P^1 \cap P^2$ por la formulación ajustada $P^1 \cap Q^2$ para X.

Agregado de inecuaciones válidas: ejemplo 1/2

Dada la formulación P de la región factible X del problema UFL

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, \quad j = 1, ..., n, \\ x_{ij} \geq 0, 0 \leq y_j \leq 1, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n. \end{array}$$

Sea X^j, con y_j entero, el conjunto factible de la formulación P^j dada por

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq m y_j, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, ..., m, \quad 0 \leq y_j \leq 1. \end{array}$$

El casco convexo, Q^j, del conjunto X^j esta dado por

$$\begin{array}{l} x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, ..., m, \\ 0 \leq y_j \leq 1. \end{array}$$

Agregado de inecuaciones válidas: ejemplo 2/2

Entonces se obtiene la reformulación Q, reemplazando cada P^j por Q^j para $j = 1, ..., n$

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m, \\
&x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, \\
&x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, \\
&0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 1, ..., n.
\end{aligned}
$$

La cual está más próxima al casco convexo de X que P.

Algoritmo de planos de corte

Dado el problema IP $\max\{c^\tau x : x \in X\}$, con $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ y el conjunto de inecuaciones válidas $\mathcal{C}$, $\pi^\tau x \leq \pi_0$, para X, lo que se busca es una aproximación del casco convexo en la vecindad de la solución óptima.

Algoritmo planos de corte

Inicialización. Sean $t := 0$ y $P^0 := P$.
Iteración. Resolver $\max\{c^\tau x : x \in P^t\}$.
Sea x^{t*} una solución óptima. Si x^{t*} es entero *Parar* : x^{t*} es una solución óptima para IP.
Si x^{t*} no es entero, resolver el problema de separación para x^{t*} y el conjunto $\mathcal{C}$.
Si la inecuación $(\pi^t, \pi_0^t) \in \mathcal{C}$ cumple $\pi^t x^{t*} > \pi_0^t$, entonces corta a x^{t*}, establecer el corte generando nueva formulación $P^{t+1} = P^t \cap \{x : \pi^t x \leq \pi_0^t\}$; incrementar t e iterar. En otro caso *Parar*.

Algoritmo de planos de corte fraccionarios de Gomory 1/2

Dado el problema IP $\max\{c^\tau x : Ax = b, x \geq 0 \text{ entero}\}$.
Se resuelve la relajación a programación lineal, a partir de la base óptima, se elige una variable básica fraccionaria y se genera una inecuación Chvátal-Gomory en la restricción asociada de forma de cortar y separar la solución fraccionaria.
Entonces el problema se puede reformular

$$\begin{array}{ll} \max & \widehat{c}_B + \sum_{j\in N} \widehat{c}_j x_j \\ \text{s.a} & x_{B_u} + \sum_{j\in N} \widehat{a}_{uj} x_j = \widehat{b}_u, \quad u = 1, ..., m, \\ & x \geq 0, entero. \end{array}$$

Donde B y N son los conjuntos de variables básicas y no-básicas.
La solución óptima es $x^* = \widehat{b}_u$, si $\widehat{c}_j \leq 0$ para $j \in N$ y $\widehat{b}_u \geq 0$ para $u = 1, ..., m$.

Algoritmo de planos de corte fraccionarios de Gomory 2/2

Si la solución óptima, x^*, no es entera, entonces existe una fila u con $\widehat{b}_u$ fraccionario. Dada la fila u la inecuación de corte Chvátal-Gomory es

$$x_{B_u} + \sum_{j \in N} \lfloor \widehat{a}_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \widehat{b}_u \rfloor.$$

Reformulando la inecuación mediante la sustitución de x_{B_u} original, se obtiene

$$\sum_{j \in N} (\widehat{a}_{uj} - \lfloor \widehat{a}_{uj} \rfloor) x_j \geq \widehat{b}_u - \lfloor \widehat{b}_u \rfloor;$$

esta inecuación permite separar x^* con $\widehat{b}_u$ fraccionario de la formulación de partida.

Debido a la definición y la elección de la fila u se tiene que

$$0 \leq (\widehat{a}_{uj} - \lfloor \widehat{a}_{uj} \rfloor) < 1 \text{ y } 0 < (\widehat{b}_u - \lfloor \widehat{b}_u \rfloor) < 1.$$