

ANALISIS de la INFLUENCIA del CIRCUITO
MAGNETICO en los CIRCUITOS
EQUIVALENTES de TRANSFORMADORES
TRIFASICOS de DOS y TRES ARROLLAMIENTOS
PARA REGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL
DESEQUILIBRADO

Ing. Jorge Luis Alonso Alonso
Ing. Alvaro Portillo Laurino

1985

I N D I C E

1. CIRCUITOS MAGNETICOS

1.1 INTRODUCCION

1.2 CLASIFICACION de los SISTEMAS MAGNETICOS de los TRANSFORMADORES TRIFASICOS

1.2.1 Sistemas Magnéticos Independientes

1.2.2 Sistemas Magnéticos Acoplados

1.2.3 Sistemas Magnéticos Casi Independientes

1.3 ANALISIS de los SISTEMAS MAGNETICOS de los TRANSFORMADORES TRIFASICOS

1.3.1 Banco de Transformadores y Configuración Triple Núcleo

1.3.2 Núcleo Plano de Tres Columnas

1.3.3 Núcleo Plano de Cuatro Columnas

1.3.4 Núcleo Plano de Cinco Columnas

1.3.5 Núcleo Acorazado

2. ECUACIONES GENERALES del TRANSFORMADOR TRIFASICO de DOS ARROLLAMIENTOS

2.1 ECUACIONES GENERALES

2.2 CASO PARTICULAR: Sistema Magnético Independiente despreciando la corriente magnetizante

2.3 REGIMEN SINUSOIDAL

3. CIRCUITOS EQUIVALENTES en COMPONENTES SIMETRICAS

3.1 CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA

3.1.1 Ecuaciones en Componentes de Fase

3.1.2 Ecuaciones en Componentes Simétricas

3.1.3 Circuitos Equivalentes para las distintas secuencias

3.1.3.1 Sistemas Magnéticos Independientes y Casi Independiente.

3.1.3.2 Núcleo Plano de Tres Columnas

3.1.3.3 Núcleo Plano de Cuatro y Cinco Columnas

3.1.4 Conclusiones

3.2 CONEXION TRIANGULO-ESTRELLA

3.2.1 Ecuaciones en Componentes de Fase

3.2.2 Ecuaciones en Componentes Simétricas

- 3.2.3 Circuitos Equivalentes para las distintas secuencias
 - 3.2.3.1 Sistemas Magnéticos Independientes y Casi Independientes
 - 3.2.3.2 Núcleo Plano de Tres Columnas
 - 3.2.3.3 Núcleo Plano de Cuatro y Cinco Columnas
 - 3.2.4 Conclusiones
 - 3.3 CONEXION ZIG-ZAG
 - 3.3.1 Ecuaciones en Componentes de Fase
 - 3.3.2 Ecuaciones en Componentes Simétricas
 - 3.3.3 Circuitos Equivalentes para las distintas secuencias
 - 4. TRANSFORMADORES TRIFASICOS de TRES ARROLLAMIENTOS
 - 4.1 ECUACIONES GENERALES del TRANSFORMADOR TRIFASICO de TRES ARROLLAMIENTOS
 - 4.2 ECUACIONES GENERALES PARA REGIMEN SINUSOIDAL
 - 4.3 ECUACIONES GENERALES en COMPONENTES SIMETRICAS
 - 4.4 ECUACIONES de CONEXIONADO
 - 4.4.1 Conexión en Estrella
 - 4.4.2 Conexión en Triángulo
 - 4.5 CIRCUITOS EQUIVALENTES en COMPONENTES SIMETRICAS
 - 4.5.1 Conexión Estrella-Estrella-Estrella
 - 4.5.2 Conexión Estrella-Estrella-Triángulo
 - 4.5.3 Conexión Estrella-Triángulo-Triángulo
 - 5. ALICACION: ANALISIS de la CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA con CARGA MONOFASICA
-

1.- CIRCUITOS MAGNETICOS

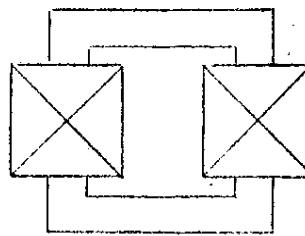
1.1 INTRODUCCION

En la construcción de transformadores, tanto monofásicos como trifásicos, se utilizan dos tipos de disposiciones núcleo-bobinas, según las cuales se pueden clasificar en:

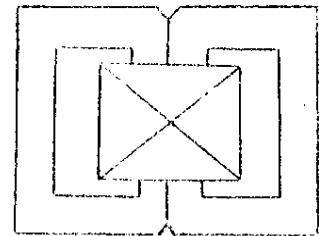
- a) Transformadores de tipo de Núcleo o de Columnas (Core Type)
- b) Transformadores de tipo Acorazado (Shell Type)

La diferencia entre los dos tipos se visualiza fácilmente en los transformadores monofásicos (Fig.1).

En el tipo de Núcleo, las bobinas aparecen rodeando al núcleo, mientras que en el tipo acorazado el núcleo aparece rodeando los bobinados.



Tipo de Núcleo



Tipo Acorazado

Fig.1: Transformadores Monofásicos

En las Fig. 2, 3 y 4 se muestran tres casos de transformadores trifásicos de tipo de núcleo, mientras que en la Fig. 5 se muestra un transformador trifásico de tipo acorazado.

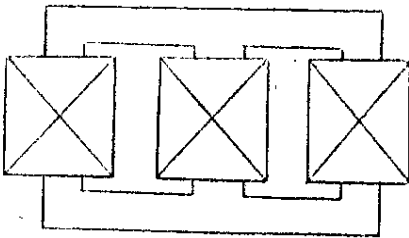


Fig.2: Núcleo de Tres Columnas

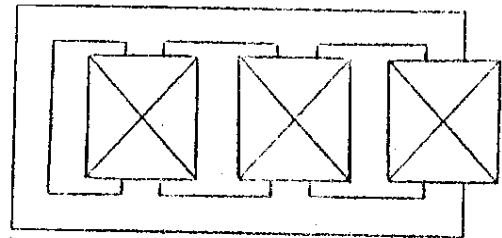


Fig.3: Núcleo de Cuatro Columnas

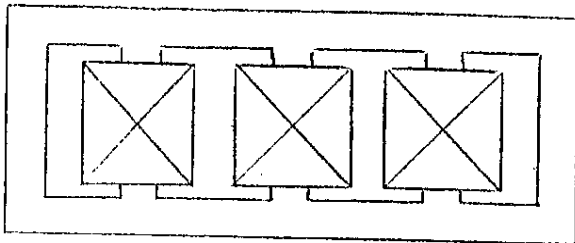


Fig.4: Núcleo de Cinco Columnas

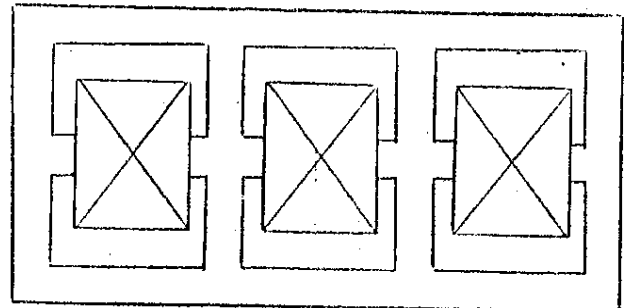


Fig.5: Núcleo Acorazado

La configuración del circuito magnético puede afectar el comportamiento del transformador trifásico en condiciones desequilibradas.

El Núcleo Plano de Tres Columnas (Fig.2), por lejos el más utilizado en transformadores de transmisión, trata de sacar provecho que con voltajes aplicados balanceados, los flujos de cada columna o fase sumados tienen resultante nula, por consiguiente no es necesaria una columna de retorno en condiciones de funcionamiento normal.

El Núcleo Plano de Tres Columnas es muy empleado dado que representa una importante economía de hierro silicio si se lo compara con el Banco de Transformadores y con el Núcleo de Tipo Acorazado.

Un camino de retorno puede ser previsto, por adición de una cuarta columna, o por adición de dos columnas como se muestra en las Fig. 3 y 4.

El Núcleo de Cinco Columnas tiene aplicación en el caso de grandes transformadores, en los cuales es necesario disminuir la altura total de manera de facilitar el transporte, sobre todo en caso de hacerlo por ferrocarril. En efecto, el agregado de las dos columnas de los extremos para el retorno del flujo reducen prácticamente a la mitad la altura de las culatas horizontales a expensas de un pequeño aumento de la longitud del núcleo.

El Núcleo de Tipo Acorazado mostrado en la Fig.5 es raramente utilizado en transformadores de distribución y transmisión trifásicos. Esto se debe a que en general se puede obtener la misma capacidad para resistir tanto las sobretensiones eléctricas como los esfuerzos mecánicos consecuencia de los cortocircuitos con transformadores de columnas con proyectos más sencillos, montaje más fácil y costos menores.

1.2 CLASIFICACION de los SISTEMAS MAGNETICOS de los TRANSFORMADORES TRIFASICOS

Dado un transformador trifásico, aplicando las leyes de los circuitos magnéticos, se puede hallar una matriz de Permeancias P_{abc} de 3x3 que relaciona los flujos de las tres fases con las respectivas fuerzas magnetomotrices.

Si se definen los vectores:

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix}$$

resulta:
$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix}$$

De acuerdo a las relaciones que resultan entre flujos y fuerzas magnetomotrices, las distintas configuraciones de circuitos magnéticos de los transformadores trifásicos se pueden clasificar en:

- a) Sistemas Magnéticos Independientes
- b) Sistemas Magnéticos Acoplados
- c) Sistemas Magnéticos Casi Independientes

1.2.1 Sistemas Magnéticos Independientes

Un sistema magnético trifásico se dice Independiente cuando no existe ningún acoplamiento magnético entre las distintas fases. Como consecuencia la matriz $\begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix}$ que relaciona los flujos con las fuerzas magnetomotrices en componentes de fase es diagonal.

Un ejemplo de este tipo de sistema lo constituye el Banco de Transformadores, el cual consiste en tres unidades monofásicas iguales conectadas de modo de formar un transformador trifásico.

Otro ejemplo de sistema independiente lo constituye la configuración llamada de Triple Núcleo (Triplex Core), que consiste en tres transformadores monofásicos dentro de una misma cuba constituyendo un transformador trifásico. Este tipo de transformador trifásico se utiliza en sistemas de distribución.

1.2.2 Sistemas Magnéticos Acoplados

Un sistema magnético trifásico se dice Acoplado cuando el flujo de cada fase depende en general de las fuerzas magnetomotrices de las tres fases. La matriz $\begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix}$ de un sistema acoplado en componentes de fase no es diagonal, y en general todos sus elementos son distintos de cero.

El caso más notable de sistema magnético acoplado lo constituye el transformador trifásico con núcleo plano de tres columnas.

Sirven también como ejemplo de sistema acoplado los núcleos de cuatro y cinco columnas.

1.2.3 Sistemas Magnéticos Casi Independientes

Formalmente un sistema magnético casi independiente, si nos referimos a la expresión exacta de la matriz $\begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix}$, no difiere de un sistema magnético acoplado. O sea que el flujo de cada fase depende en general de las fuerzas magnetomotrices de las tres fases.

Sin embargo, por medio de aproximaciones realistas, la matriz P_{abc} puede reducirse a la diagonal, despreciando los restantes términos distintos de cero.

1.3 ANALISIS de los SISTEMAS MAGNETICOS de los TRANSFORMADORES TRIFASICOS

1.3.1 Banco de Transformadores y Configuración de Triple Núcleo

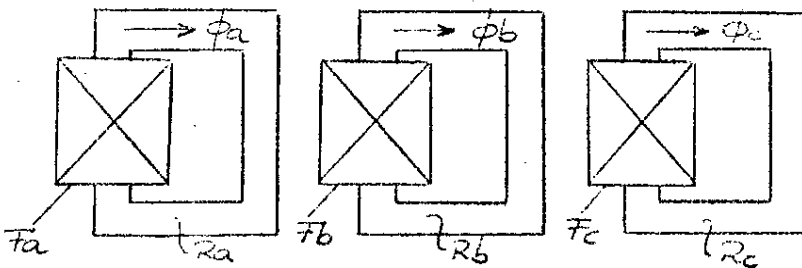


Fig.6: Banco de Transformadores

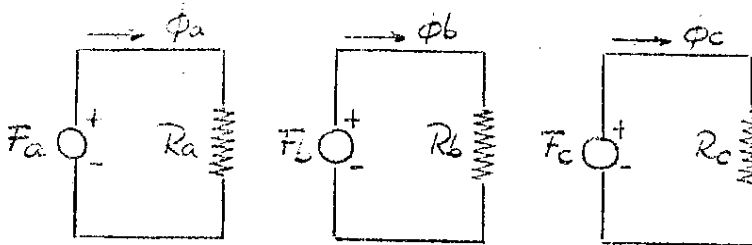


Fig.7: Equivalente Circuital

Dado que los tres transformadores que constituyen el banco son idénticos, se deduce para las reluctancias de las tres fases que:

$$R_a = R_b = R_c = R$$

Las ecuaciones del circuito magnético son:

$$\begin{aligned} F_a &= R \phi_a & \phi_a &= 1/2 F_a \\ F_b &= R \phi_b & \phi_b &= 1/2 F_b \\ F_c &= R \phi_c & \phi_c &= 1/2 F_c \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix}$$

Según las definiciones anteriores será entonces:

$$\boxed{P_{abc}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \boxed{P_{abc}} \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix}$$

Se trata de un Sistema Magnético Independiente, ya que no existe ningún acoplamiento entre las fases y por lo tanto la matriz que relaciona los magnético

flujos con las fuerzas magnetomotrices en componentes de fase es diagonal. A continuación aplicaremos la Transformación de Fortescue para obtener la relación entre flujos y fuerzas magnetomotrices en Componentes Simétricas:

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{012} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi^{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F^{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^0 \\ F^1 \\ F^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{012} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{012} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \phi^{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{012} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{012} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} P_{012} \end{bmatrix}$ es la matriz de Permeancias en Componentes Simétricas.

1.3.2 Núcleo Plano de Tres Columnas

Como ya se ha expresado, el núcleo plano de tres columnas se basa en el hecho que con voltajes aplicados balanceados de secuencia positiva o negativa, los flujos de cada columna tienen resultante cero, por lo cual no es necesaria una columna de retorno.

Para la secuencia cero en cambio, el flujo de una rama no se puede cerrar por las otras dos, ya que en cada una de ellas encuentra un flujo de secuencia cero igual en magnitud pero de signo contrario.

El resultado de esto es que las líneas de flujo de secuencia cero de las tres fases salen del núcleo y se cierran desde una a otra culata a través del aire o del aceite que rodea el núcleo.

Este flujo de secuencia cero tiende naturalmente a seguir el camino de

menor reluctancia utilizando para ello los pernos de fijación, las paredes de la cuba, etc. Esto da lugar a que las partes mencionadas sean recorridas por corrientes parásitas que provocan un calentamiento local, lo cual reduce el rendimiento del transformador.

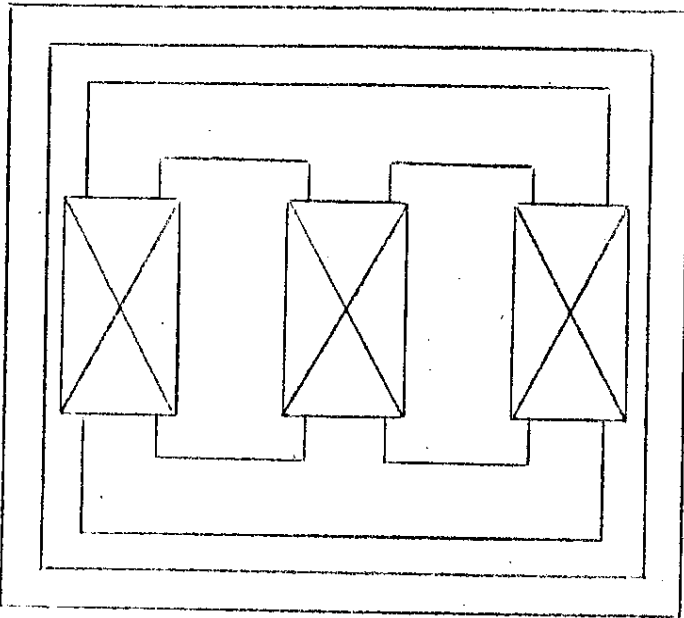
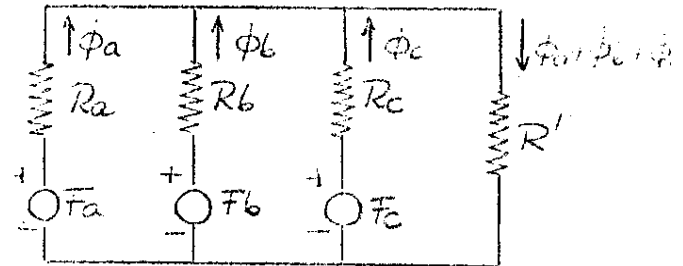


Fig.8: Núcleo de Tres Columnas



$$R_a = R_b = R_c = R$$

Fig.9: Equivalente Circuital

Analizaremos el Sistema Magnético en cuestión por medio del equivalente circuital aproximado que se muestra en la Fig.9, en el cual R representa la reluctancia de las ramas del núcleo y R' la reluctancia del camino del flujo de secuencia cero por el aceite y la cuba, siendo $R' \gg R$.

Se ha supuesto para las ramas del núcleo $R_a = R_b = R_c = R$ lo cual estrictamente no es cierto. Sin embargo es necesario adoptar esta hipótesis simplificada pues de lo contrario la matriz de Permeancias P_{abc} que resulta no es diagonalizable por la transformación de Fortescue, lo cual implicaría el acople entre las distintas redes de secuencia en componentes simétricas. Las ecuaciones del circuito magnético son:

$$F_a = R\phi_a + R'(\phi_a + \phi_b + \phi_c)$$

$$F_b = R\phi_b + R'(\phi_a + \phi_b + \phi_c)$$

$$F_c = R\phi_c + R'(\phi_a + \phi_b + \phi_c)$$

→

$$\begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R+R' & R' & R' \\ R' & R+R' & R' \\ R' & R' & R+R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix}$$

Despejando los flujos en función de las fuerzas magnetomotrices resulta:

$$\begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R+2R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} \\ \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{R+2R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} \\ \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{R+2R'}{R(R+3R')} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ \Phi \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc \\ P_{abc} \\ F \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\begin{bmatrix} P_{abc} \\ P_{abc} \\ P_{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R+2R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} \\ \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{R+2R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} \\ \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{-R'}{R(R+3R')} & \frac{R+2R'}{R(R+3R')} \end{bmatrix}$$

Se trata de un Sistema Magnético Acoplado, ya que el flujo de cada fase depende de las fuerzas magnetomotrices de las tres fases. A continuación aplicaremos la Transformación de Fortescue para obtener la relación entre flujos y fuerzas magnetomotrices en Componentes Simétricas:

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ P_{abc} \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \\ F \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 012 \\ \Phi \\ F \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ P_{abc} \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 012 \\ P_{012} \\ F \end{bmatrix} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 012 \\ \Phi \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ P_{abc} \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \\ F \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{012} \\ P_{012} \\ P_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ P_{abc} \\ F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \\ T_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R+3R'} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 012 \\ \Phi \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{012} \\ P_{012} \\ P_{012} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 012 \\ \Phi \\ F \end{bmatrix}$$

P012 es la matriz de Permeancias en Componentes Simétricas.

1.3.3 Núcleo Plano de Cuatro Columnas

El análisis del núcleo plano de cuatro columnas se realiza por medio del equivalente circuital de la Fig.11, en el cual se definen;

R = Reluctancia de cada rama del núcleo

R' = Reluctancia de la cuarta columna para retorno del flujo de secuencia cero

R'' = Reluctancias de las culatas entre fases

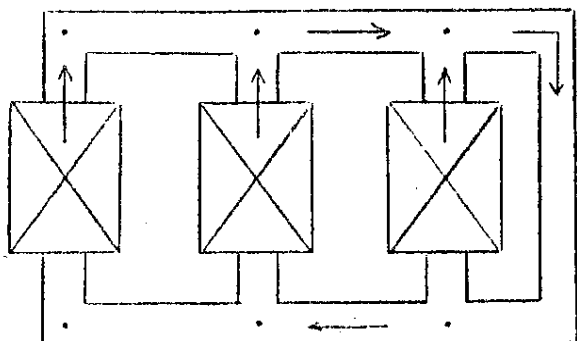


Fig.10: Núcleo de Cuatro Columnas

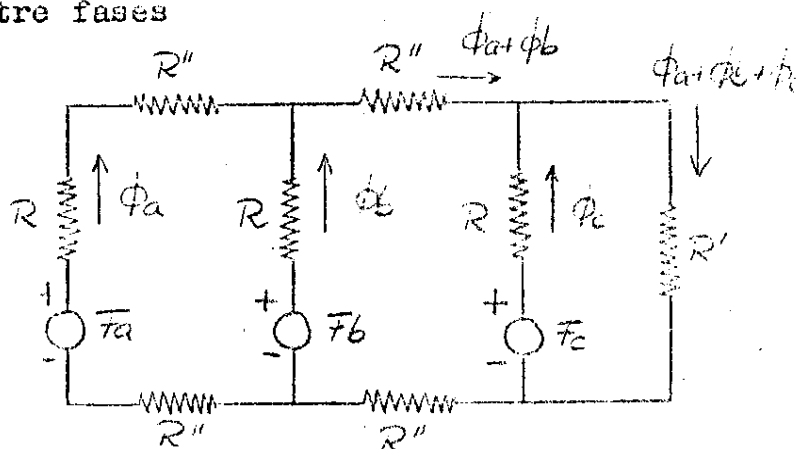


Fig.11: Equivalente Circuital

Si se supone $R''=0$, el circuito de la Fig.11 se reduce al ya analizado en el caso del Núcleo Plano de Tres Columnas (Fig.9), con la diferencia que ahora R' es la reluctancia de una columna del núcleo y su valor numérico es del mismo orden que R .

1.3.4 Núcleo Plano de Cinco Columnas

El equivalente circuital para el análisis del núcleo plano de cinco columnas se muestra en la Fig.13, en el cual se definen:

R = Reluctancia de cada rama del núcleo

$2R'$ = Reluctancia de las columnas de los extremos para el retorno del flujo de secuencia cero

R'' = Reluctancia de las culatas entre fases

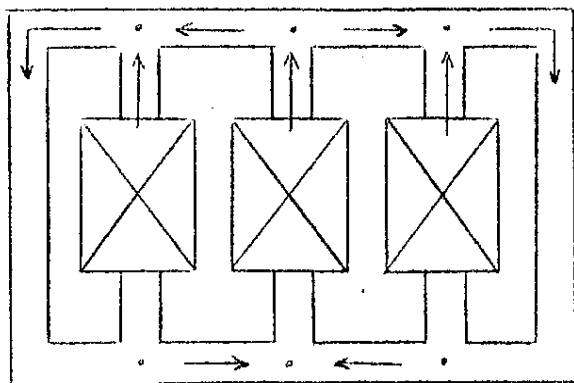


Fig.12: Núcleo de Cinco Columnas

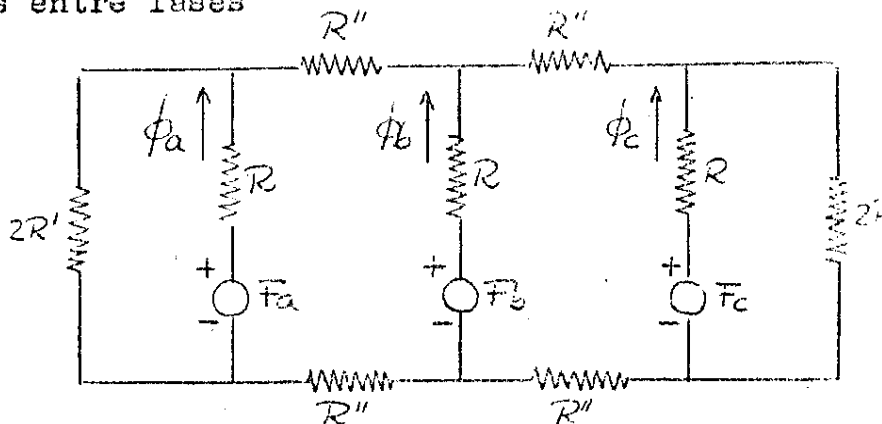


Fig.13: Equivalente Circuital

Si se supone $R''=0$, el circuito de la Fig.13 se reduce al de la Fig.9 y llegamos a la misma conclusión que en el caso anterior, reduciéndose el análisis al núcleo plano de tres columnas, con la salvedad correspondiente respecto al significado de R' en un caso y otro.

1.3.5 Núcleo Acorazado

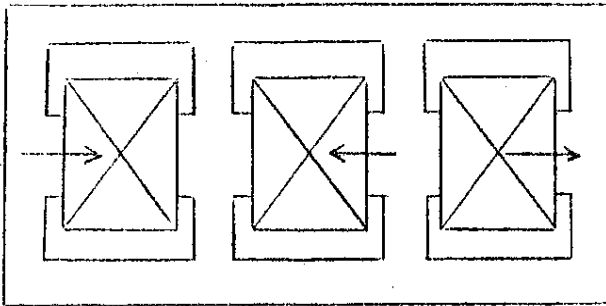


Fig.14: Núcleo Acorazado

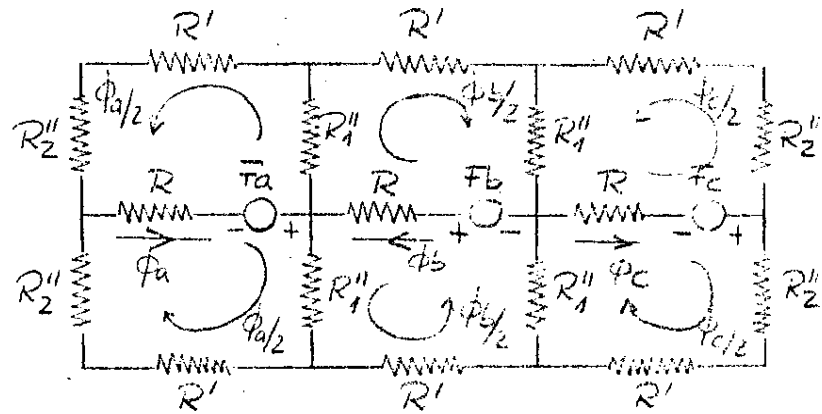


Fig.15: Equivalente Circuital

Las ecuaciones del circuito magnético que surgen del equivalente circuital de la Fig.15 son:

$$\bar{T}_a = 2\phi_a + \frac{1}{2}R_1''(\phi_a + \phi_b) + \frac{1}{2}(R_1 + R_2'')\phi_a$$

$$\bar{T}_b = R\phi_b + \frac{1}{2}R_1''(\phi_a + \phi_b) + \frac{1}{2}R_1\phi_b + \frac{1}{2}R_1''(\phi_b + \phi_c)$$

$$\bar{T}_c = R\phi_c + \frac{1}{2}R_1''(\phi_b + \phi_c) + \frac{1}{2}(R_1 + R_2'')\phi_c$$

\bar{T}_a	$R + \frac{R_1'}{2} + \frac{R_1''}{2} + \frac{R_2''}{2}$	$R_1''/2$	0	ϕ_a
\bar{T}_b	$R_1''/2$	$R + R_1' + \frac{R_1'}{2}$	$R_1''/2$	ϕ_b
\bar{T}_c	0	$R_1''/2$	$R + \frac{R_1'}{2} + \frac{R_1''}{2} + \frac{R_2''}{2}$	ϕ_c

La interacción entre las distintas fases se produce debido a las ramas del núcleo de reluctancia R_1' .

Si se supone $R_1''=0$, lo cual en la práctica es una aproximación razonable pues dichas ramas constituyen un corto tramo del circuito magnético total y en realidad no influyen en forma importante en la resolución de dicho circuito, la matriz de reluctancias queda diagonal, por tanto su inversa, la matriz de Permeancias P_{abc} será diagonal y el sistema magnético se comporta como si fuera independiente. Se trata de un sistema magnético Casi Independiente.

La transformada de Fortescue de la matriz diagonal resultante, no es diagonal, ya que los elementos no nulos de la matriz P_{abc} no son los tres iguales.

Por lo tanto, para evitar el acoplamiento de las redes de secuencia en Componentes Simétricas, la matriz $\boxed{P_{abc}}$ se aproxima por una matriz diagonal con todos sus elementos no nulos iguales, tomando como valor de compromiso una reluctancia promedio, igual a la media aritmética de los elementos de la diagonal de la matriz de reluctancias original.

Será entonces:

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \boxed{P_{abc}} \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix} \quad \text{siendo:} \quad \boxed{P_{abc}} = \begin{bmatrix} 1/2R_T & 0 & 0 \\ 0 & 1/2R_T & 0 \\ 0 & 0 & 1/2R_T \end{bmatrix}$$

$$R_T \approx R + \frac{R'}{2} + \frac{1}{3}(R_2'' + 2R_1'')$$

En componentes simétricas se tiene:

$$\begin{bmatrix} \phi^{0/2} \end{bmatrix} = \boxed{P_{0/2}} \begin{bmatrix} F^{0/2} \end{bmatrix} \quad \text{siendo:} \quad \boxed{P_{0/2}} = \boxed{T_F^{-1}} \boxed{P_{abc}} \boxed{T_F} = \begin{bmatrix} 1/2R_T & 0 & 0 \\ 0 & 1/2R_T & 0 \\ 0 & 0 & 1/2R_T \end{bmatrix}$$

2. ECUACIONES GENERALES del TRANSFORMADOR TRIFASICO de DOS ARROLLAMIENTOS

2.1 ECUACIONES GENERALES

A continuación se deducirán, a partir de las leyes básicas del electromagnetismo, el sistema de ecuaciones que representa el funcionamiento del transformador trifásico de dos arrollamientos, independientemente de la conexión de sus bobinados y del tipo de circuito magnético.

El flujo total que atraviesa cada bobinado se compone de un flujo principal, confinado al hierro del núcleo, común a todas las bobinas de la misma fase y un flujo de dispersión propio de cada bobinado que supondremos enlaza todas las espiras que componen el bobinado.

Se considera además que no existen flujos de dispersión mutuos entre los bobinados de las diferentes fases.

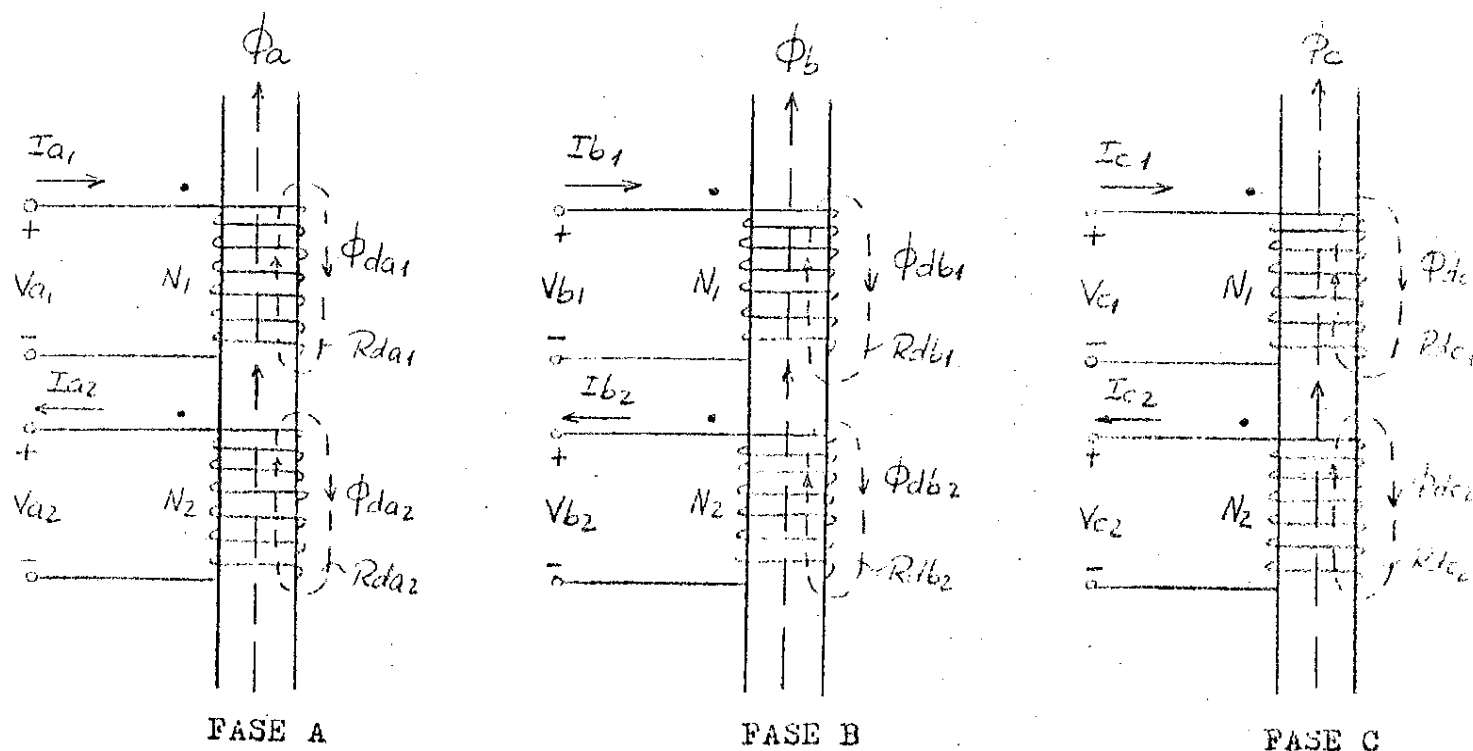


Fig.16: Esquema del transformador trifásico de dos arrollamientos

Suponiendo que las reluctancias de los caminos magnéticos que siguen los flujos de dispersión están en paralelo con las fuerzas magnetomotrices de cada bobinado, se deduce de la Ley de Ampere aplicada a los circuitos

magnéticos que:

$$\begin{aligned} R_{da_1} \phi_{da_1} &= N_1 I_{a_1} & R_{da_2} \phi_{da_2} &= -N_2 I_{a_2} \\ R_{db_1} \phi_{db_1} &= N_1 I_{b_1} & R_{db_2} \phi_{db_2} &= -N_2 I_{b_2} \\ R_{dc_1} \phi_{dc_1} &= N_1 I_{c_1} & R_{dc_2} \phi_{dc_2} &= -N_2 I_{c_2} \end{aligned}$$

Llamaremos R_1 a la resistencia óhmica de cada bobinado que compone el primario del transformador y R_2 a la resistencia de cada bobinado del secundario.

Aplicando entonces a cada bobinado la Ley de Faraday se tiene:

$$\begin{aligned} V_{a_1} &= R_1 I_{a_1} + N_1 \frac{d}{dt} (\phi_a + \phi_{da_1}) = R_1 I_{a_1} + N_1 \frac{d\phi_{db_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_a}{dt} = R_1 I_{a_1} + \frac{N_1^2}{R_{da_1}} \frac{dI_{a_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_a}{dt} \\ V_{b_1} &= R_1 I_{b_1} + N_1 \frac{d}{dt} (\phi_b + \phi_{db_1}) = R_1 I_{b_1} + N_1 \frac{d\phi_{db_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_b}{dt} = R_1 I_{b_1} + \frac{N_1^2}{R_{db_1}} \frac{dI_{b_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_b}{dt} \\ V_{c_1} &= R_1 I_{c_1} + N_1 \frac{d}{dt} (\phi_c + \phi_{dc_1}) = R_1 I_{c_1} + N_1 \frac{d\phi_{dc_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} = R_1 I_{c_1} + \frac{N_1^2}{R_{dc_1}} \frac{dI_{c_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \\ V_{a_2} &= -R_2 I_{a_2} + N_2 \frac{d}{dt} (\phi_a + \phi_{da_2}) = -R_2 I_{a_2} + N_2 \frac{d\phi_{da_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_a}{dt} = -R_2 I_{a_2} - \frac{N_2^2}{R_{da_2}} \frac{dI_{a_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_a}{dt} \\ V_{b_2} &= -R_2 I_{b_2} + N_2 \frac{d}{dt} (\phi_b + \phi_{db_2}) = -R_2 I_{b_2} + N_2 \frac{d\phi_{db_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_b}{dt} = -R_2 I_{b_2} - \frac{N_2^2}{R_{db_2}} \frac{dI_{b_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_b}{dt} \\ V_{c_2} &= -R_2 I_{c_2} + N_2 \frac{d}{dt} (\phi_c + \phi_{dc_2}) = -R_2 I_{c_2} + N_2 \frac{d\phi_{dc_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt} = -R_2 I_{c_2} - \frac{N_2^2}{R_{dc_2}} \frac{dI_{c_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt} \end{aligned}$$

Suponiendo: $R_{da_1} = R_{db_1} = R_{dc_1} = R_{d1}$ y $R_{da_2} = R_{db_2} = R_{dc_2} = R_{d2}$

Se definen: $L_1 = N_1^2 / R_{d1}$ y $L_2 = N_2^2 / R_{d2}$

Siendo L_1 la self de fugas del primario y L_2 la self de fugas del secundario.

De acuerdo a las definiciones de L_1 y L_2 las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$V_{a_1} = R_1 I_{a_1} + L_1 \frac{dI_{a_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_a}{dt} \quad (1) \qquad V_{a_2} = -R_2 I_{a_2} - L_2 \frac{dI_{a_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_a}{dt} \quad (4)$$

$$V_{b_1} = R_1 I_{b_1} + L_1 \frac{dI_{b_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_b}{dt} \quad (2) \qquad V_{b_2} = -R_2 I_{b_2} - L_2 \frac{dI_{b_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_b}{dt} \quad (5)$$

$$V_{c_1} = R_1 I_{c_1} + L_1 \frac{dI_{c_1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \quad (3) \qquad V_{c_2} = -R_2 I_{c_2} - L_2 \frac{dI_{c_2}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt} \quad (6)$$

Como ya se ha analizado, cualquiera sea la configuración del circuito magnético, existirá una matriz de Permeancias $\boxed{P_{abc}}$ de 3×3 que relaciona los

flujos principales con las fuerzas magnetomotrices:

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = \boxed{P_{abc}} \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{F} \end{bmatrix}$$

Para un transformador de dos arrollamientos, de acuerdo al esquema de la Fig.16, será:

$$\begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} - N_2 \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{siendo:} \quad \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{a1} \\ \bar{I}_{b1} \\ \bar{I}_{c1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I}_{a2} \\ \bar{I}_{b2} \\ \bar{I}_{c2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = \boxed{P_{abc}} \left\{ N_1 \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} - N_2 \begin{bmatrix} a^{bc} \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

Las ecuaciones (1) a (6) junto con las tres que se deducen de la ecuación matricial (7) describen completamente el funcionamiento del transformador trifásico de dos arrollamientos siempre que se consideren bajas frecuencias.

Esta última observación no constituye ninguna limitación en el estudio de régimen permanente en sistemas de potencia, pues éstos funcionan a frecuencias de 50 o 60 Hz, sin embargo para analizar transitorios que involucren componentes de alta frecuencia es necesario agregarle al modelo las capacidades entre bobinados así como las capacidades propias de cada bobinado.

2.2 CASO PARTICULAR: Sistema Magnético Independiente despreciando la Corriente Magnetizante

Según vimos, las relaciones entre flujos y fuerzas magnetomotrices para un sistema magnético independiente son:

$$F_a = R\phi_a$$

$$F_b = R\phi_b$$

$$F_c = R\phi_c$$

Despreciar la corriente magnetizante, equivale suponer permeabilidad infinita para el hierro del núcleo, por lo cual será $R=0$ y las relaciones anteriores se transforman en:

$$\begin{aligned} \bar{F}_a = 0 \\ \bar{F}_b = 0 \\ \bar{F}_c = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} abc \\ F \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} abc \\ F \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} - N_2 \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Si: } K = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

En este caso particular la ecuación matricial (8) sustituye a la ecuación matricial (7) desarrollada en el caso general.

Combinando entonces las relaciones entre corrientes primarias y secundarias que surgen de (8) con las ecuaciones (1) a (6) y eliminando los flujos resulta:

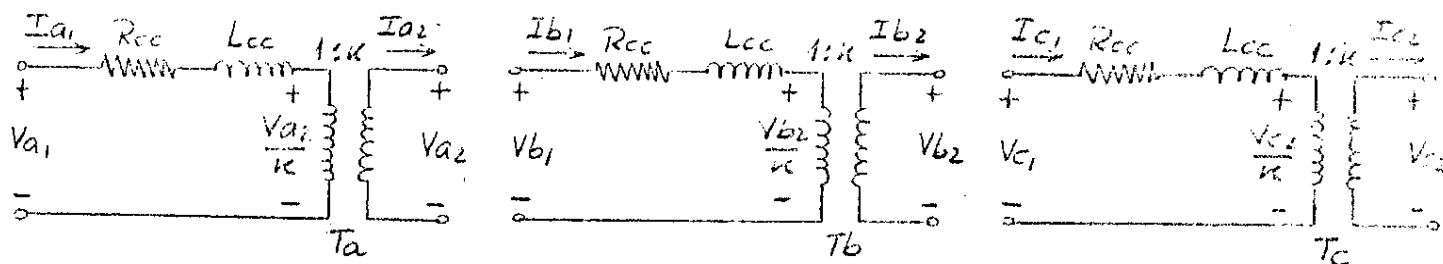
$$V_{a1} = \left(R_1 + \frac{R_2}{k^2} \right) I_{a1} + \left(L_1 + \frac{L_2}{k^2} \right) \frac{dI_{a1}}{dt} + \frac{1}{k} V_{a2} \quad (9)$$

$$V_{b1} = \left(R_1 + \frac{R_2}{k^2} \right) I_{b1} + \left(L_1 + \frac{L_2}{k^2} \right) \frac{dI_{b1}}{dt} + \frac{1}{k} V_{b2} \quad (10)$$

$$K = \frac{N_2}{N_1}$$

$$V_{c1} = \left(R_1 + \frac{R_2}{k^2} \right) I_{c1} + \left(L_1 + \frac{L_2}{k^2} \right) \frac{dI_{c1}}{dt} + \frac{1}{k} V_{c2} \quad (11)$$

El circuito equivalente en componentes de fase será:



Siendo T_a , T_b y T_c transformadores ideales y $R_{cc} = R_1 + \frac{R_2}{k^2}$ $L_{cc} = L_1 + \frac{L_2}{k^2}$

Según sea el conexionado del transformador trifásico se deberán interconectar los circuitos equivalentes de las tres fases.

Si se considera régimen sinusoidal, sustituyendo las variables temporales por fasores y definiendo la impedancia $Z_{cc} = R_{cc} + j\omega L_{cc}$ las ecuaciones serán:

$$V_{a1} = Z_{cc} I_{a1} + \frac{1}{k} V_{a2} \quad I_{a1} = k I_{a2}$$

$$V_{b1} = Z_{cc} I_{b1} + \frac{1}{k} V_{b2} \quad I_{b1} = k I_{b2}$$

$$V_{c1} = Z_{cc} I_{c1} + \frac{1}{k} V_{c2} \quad I_{c1} = k I_{c2}$$

2.3 REGIMEN SINUSOIDAL

Las ecuaciones (1) a (6) y la ecuación matricial (7) podemos escribirlas de la siguiente forma equivalente:

$$V_{a1} = R_1 I_{a1} + L_1 \frac{dI_{a1}}{dt} + \frac{1}{k} \left(V_{a2} + R_2 I_{a2} + L_2 \frac{dI_{a2}}{dt} \right) \quad (12)$$

$$V_{b1} = R_1 I_{b1} + L_1 \frac{dI_{b1}}{dt} + \frac{1}{k} \left(V_{b2} + R_2 I_{b2} + L_2 \frac{dI_{b2}}{dt} \right) \quad (13)$$

$$V_{c1} = R_1 I_{c1} + L_1 \frac{dI_{c1}}{dt} + \frac{1}{k} \left(V_{c2} + R_2 I_{c2} + L_2 \frac{dI_{c2}}{dt} \right) \quad (14)$$

$$V_{a1} = R_1 I_{a1} + L_1 \frac{dI_{a1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_a}{dt} \quad (15)$$

$$V_{b1} = R_1 I_{b1} + L_1 \frac{dI_{b1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_b}{dt} \quad (16)$$

$$V_{c1} = R_1 I_{c1} + L_1 \frac{dI_{c1}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix} \left\{ N_1 \begin{bmatrix} abc \\ -1 \end{bmatrix} - N_2 \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

Si se considera régimen sinusoidal y se definen las impedancias:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 \quad y \quad Z_2 = R_2 + j\omega L_2$$

el conjunto de ecuaciones anteriores pueden escribirse sustituyendo las variables temporales por fasores en los siguientes términos:

$$V_{a1} = Z_1 I_{a1} + \frac{1}{k} Z_2 I_{a2} + \frac{1}{k} V_{a2} \quad (19)$$

$$V_{a1} = Z_1 I_{a1} + j\omega N_1 \phi_a \quad (22)$$

$$V_{b1} = Z_1 I_{b1} + \frac{1}{k} Z_2 I_{b2} + \frac{1}{k} V_{b2} \quad (20)$$

$$V_{b1} = Z_1 I_{b1} + j\omega N_1 \phi_b \quad (23)$$

$$V_{c1} = Z_1 I_{c1} + \frac{1}{k} Z_2 I_{c2} + \frac{1}{k} V_{c2} \quad (21)$$

$$V_{c1} = Z_1 I_{c1} + j\omega N_1 \phi_c \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{abc} \end{bmatrix} \left\{ N_1 \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} - N_2 \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (25)$$

Si definimos:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{b1} \\ V_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a2} \\ V_{b2} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad \boxed{Z_1} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_1 \end{bmatrix} \quad \boxed{Z_{21}} = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones anterior puede resumirse en las tres ecuaciones matriciales siguientes:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = \boxed{Z_1} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} + k \boxed{Z_{21}} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$j\omega N_1 \begin{bmatrix} abc \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} - \boxed{Z_1} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\frac{1}{N_1} \begin{bmatrix} abc \\ \phi \end{bmatrix} = \boxed{P_{abc}} \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (28)$$

Eliminando los flujos entre las ecuaciones (27) y (28) el sistema se reduce a:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = \boxed{Z_1} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} + k \boxed{Z_{21}} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = \boxed{Z_1} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} + j\omega N_1^2 \boxed{P_{abc}} \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\}$$

Estas dos ecuaciones matriciales serán la base para la deducción de los circuitos equivalentes en Componentes Simétricas para las conexiones usuales de transformadores trifásicos de dos arrollamientos.

3. CIRCUITOS EQUIVALENTES en COMPONENTES SIMÉTRICAS

3.1 CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA

3.1.1 Ecuaciones en Componentes de Fase

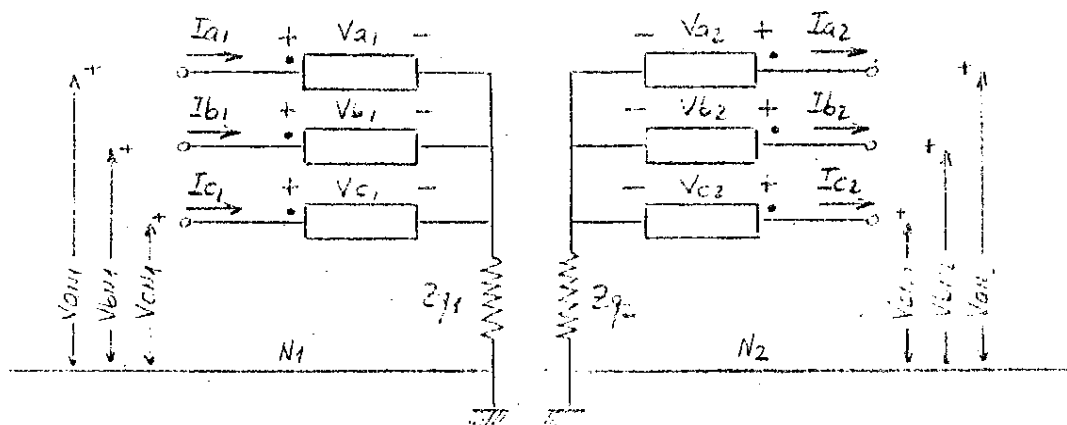


Fig.17: Circuito Equivalente Esquemático para la conexión Estrella-Estrella

Para el análisis que sigue, las variables definidas en la Fig.17 las su-pondremos ordenadas según los vectores que se detallan a continuación:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{b1} \\ V_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_2 = \begin{bmatrix} V_{a2} \\ V_{b2} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_{1N} = \begin{bmatrix} V_{1N1} \\ V_{1N2} \\ V_{1N3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_{2N} = \begin{bmatrix} V_{2N1} \\ V_{2N2} \\ V_{2N3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_1 = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_2 = \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix}$$

Basados en las ecuaciones generales del transformador trifásico de dos arrollamientos y en las conexiones que surgen del conexionado estrella-estrella podemos plantear:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_1 + K \begin{bmatrix} Z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_2 + \frac{1}{K} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_2 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_1 + j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} P_{bc} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_1 - K \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} I_2 \right\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{1N} \end{bmatrix} - z_{q1} \boxed{U_3} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

siendo: $\boxed{U_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{2N} \end{bmatrix} + z_{q2} \boxed{U_3} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1) y (2) resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \left\{ \boxed{z_1} + z_{q1} \boxed{U_3} \right\} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_1 \end{bmatrix} + \left\{ \boxed{z_{21}} + \frac{z_{q2}}{k^2} \boxed{U_3} \right\} k \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{2N} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \left\{ \boxed{z_2} + z_{q2} \boxed{U_3} \right\} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} + j\omega N_1^2 \boxed{P_{abc}} \left\{ \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (6)$$

Si se definen:

$$\boxed{z''_1} = \boxed{z_1} + z_{q1} \boxed{U_3} = \begin{bmatrix} z_1 + z_{q1} & z_{q1} & z_{q1} \\ z_{q1} & z_1 + z_{q1} & z_{q1} \\ z_{q1} & z_{q1} & z_1 + z_{q1} \end{bmatrix} \quad \boxed{z''_{21}} = \boxed{z_{21}} + \frac{z_{q2}}{k^2} \boxed{U_3} = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} z_{21} + z_{q2} & z_{q2} & z_{q2} \\ z_{q2} & z_{21} + z_{q2} & z_{q2} \\ z_{q2} & z_{q2} & z_{21} + z_{q2} \end{bmatrix}$$

podemos escribir las ecuaciones (5) y (6) en forma más compacta:

$$\begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{z''_1} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_1 \end{bmatrix} + \boxed{z''_{21}} k \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{2N} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} a_{lc} \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \boxed{z''_2} \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} + j\omega N_1^2 \boxed{P_{abc}} \left\{ \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} a_{lc} \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

Las seis ecuaciones escalares que surgen de las ecuaciones matriciales (7) y (8), una vez determinada la matriz $\boxed{P_{abc}}$ en función del sistema magnético que se considere, describen el comportamiento del transformador para régimen sinusoidal.

3.1.2 Ecuaciones en Componentes Simétricas

Aplicando la transformación de Fortescue a los vectores definidos en 3.1.1, se realiza el cambio de variables de Componentes de Fase a Componentes Simétricas (Secuencia Cero, Positiva y Negativa).

Los resultados de estas transformaciones se expresan matricialmente como sigue:

$$\boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ V_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 012 \\ V_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{IN}^0 \\ V_{IN}^1 \\ V_{IN}^2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 012 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 012 \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{2N}^0 \\ V_{2N}^1 \\ V_{2N}^2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 012 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos miembros de las ecuaciones (7) y (8) por $\boxed{T_F^{-1}}$ y aplicando las relaciones anteriores se tiene:

$$\begin{bmatrix} 012 \\ V_{IN} \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z_1''} \boxed{T_F} \begin{bmatrix} 012 \\ I_1 \end{bmatrix} + \boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z_{21}''} \boxed{T_F} k \begin{bmatrix} 012 \\ I_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 012 \\ V_{2N} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 012 \\ V_{IN} \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z_1''} \boxed{T_F} \begin{bmatrix} 012 \\ I_1 \end{bmatrix} + j\omega N_1^2 \boxed{T_F^{-1}} \boxed{P_{abc}} \boxed{T_F} \left\{ \begin{bmatrix} 012 \\ I_1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 012 \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (10)$$

Operando resulta que:

$$\boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z_1''} \boxed{T_F} = \begin{bmatrix} z_{1+3z_1} & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z_{21}''} \boxed{T_F} = \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} z_{2+3z_2} & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las ecuaciones (9) y (10) en forma desarrollada serán:

$$\begin{bmatrix} V_{IN}^0 \\ V_{IN}^1 \\ V_{IN}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + 3z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} z_2 + 3z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} V_{2N}^0 \\ V_{2N}^1 \\ V_{2N}^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} V_{IN}^0 \\ V_{IN}^1 \\ V_{IN}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + 3z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} + j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} -1 \\ TF \\ TF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \\ TF \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix} \right\}$$

3.1.3 Circuitos Equivalentes para las distintas secuencias

3.1.3.1 Sistemas Magnéticos Independientes y Casi Independientes

Según fue estudiado (Ver 1.3.1 y 1.3.5), para los sistemas magnéticos independientes y casi independientes la matriz de permeancias P_{abc} es diagonal y por tanto si se define: $Z_0 = j\omega L_0 = j\omega N_1^2 / R$ será:

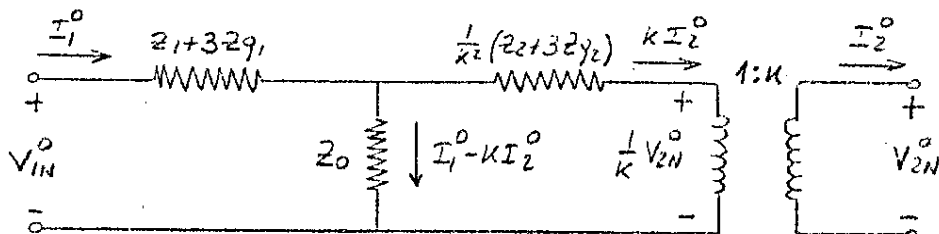
$$j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} -1 \\ TF \\ TF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \\ TF \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} P_{012} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} N^2/R & 0 & 0 \\ 0 & N^2/R & 0 \\ 0 & 0 & N^2/R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo entonces en (11) y (12) resulta:

a) Secuencia Cero:

$$V_{IN}^0 = (z_1 + 3z_1) I_1^0 + \frac{1}{k^2} (z_2 + 3z_2) (k I_2^0) + \frac{1}{k} V_{2N}^0$$

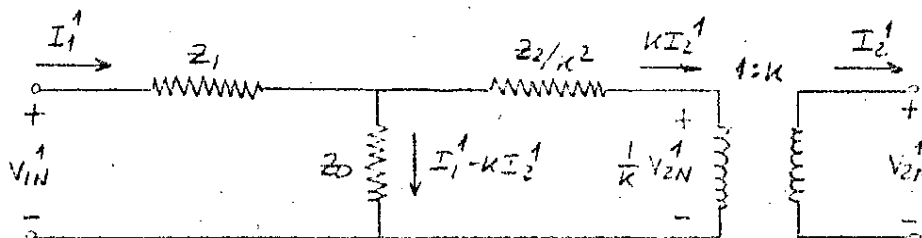
$$V_{IN}^0 = (z_1 + 3z_1) I_1^0 + Z_0 (I_1^0 - k I_2^0)$$



b) Secuencia Positiva:

$$V_{IN}^1 = z_1 I_1^1 + \frac{1}{k^2} z_2 (k I_2^1) + \frac{1}{k} V_{2N}^1$$

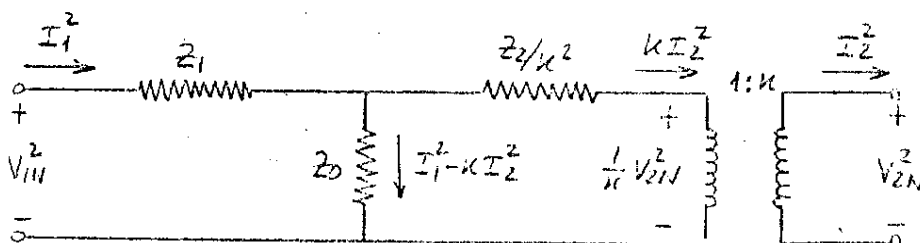
$$V_{IN}^1 = z_1 I_1^1 + z_0 (I_1^1 - k I_2^1)$$



c) Secuencia Negativa:

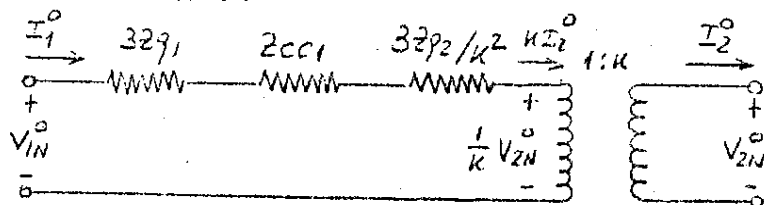
$$V_{IN}^2 = z_1 I_1^2 + \frac{1}{k^2} z_2 (k I_2^2) + \frac{1}{k} V_{2N}^2$$

$$V_{IN}^2 = z_1 I_1^2 + z_0 (I_1^2 - k I_2^2)$$

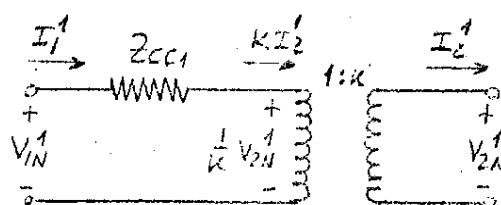


APROXIMACION USUAL: Si se supone permeabilidad infinita para el hierro del núcleo, será $R=0$ pues tanto en el caso de Banco de Transformadores como para el núcleo Acorzado R es la reluctancia de un camino totalmente contenido en el núcleo.

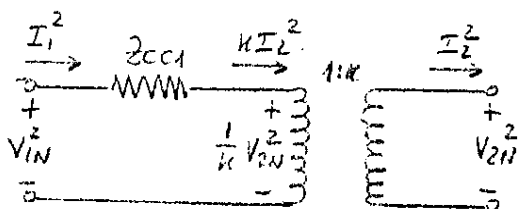
$R=0$ implica que Z_0 es infinita, por lo cual los circuitos equivalentes se reducen a:



Secuencia Cero



Secuencia Positiva



Secuencia Negativa

siendo: $Z_{CC1} = z_1 + \frac{z_2}{k^2}$

Z_{CC1} es la impedancia de cortocircuito referida al primario.

3.1.3.2 Núcleo Plano de Tres Columnas

Si definimos: $Z_0 = j\omega L_0 = j\omega \frac{N_1^2}{R}$ y $Z_{00} = j\omega L_{00} = j\omega \frac{N_1^2}{R+3R'}$ $R' \gg R$
 $\therefore Z_{00} \ll Z_0$

en base a los resultados obtenidos en 1.3.2 será:

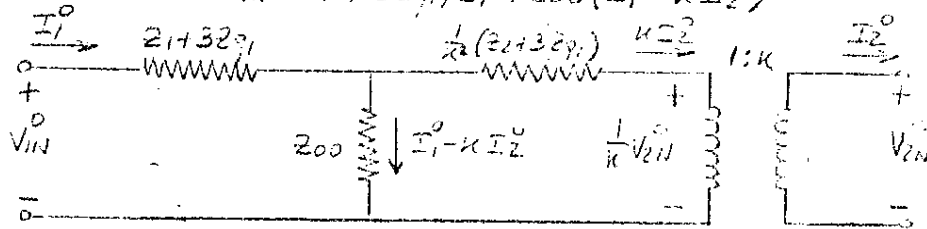
$$j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} T_F^{-1} \\ P_{alc} \\ T_F \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} P_{012} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \frac{N_1^2}{R+3R'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_1^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_1^2}{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{bmatrix}$$

por lo que sustituyendo en (11) y (12) se tiene:

a) Secuencia Cero:

$$V_{IN}^0 = (Z_1 + 3Z_2) I_1^0 + \frac{1}{k^2} (Z_2 + 3Z_1) (k I_2^0) + \frac{1}{k} V_{2N}^0$$

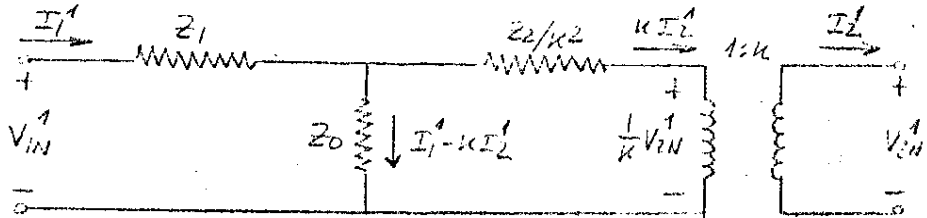
$$V_{IN}^0 = (Z_1 + 3Z_2) I_1^0 + Z_{00} (I_1^0 - k I_2^0)$$



b) Secuencia Positiva:

$$V_{IN}^1 = Z_1 I_1^1 + \frac{1}{k^2} Z_2 k I_2^1 + \frac{1}{k} V_{2N}^1$$

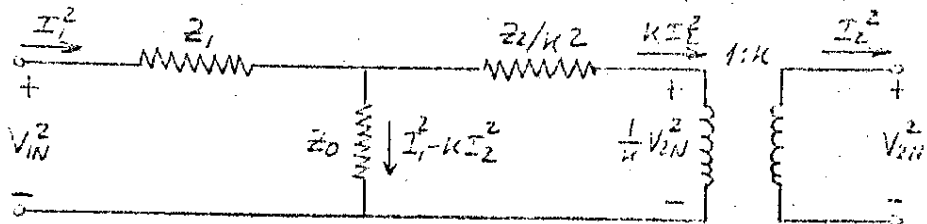
$$V_{IN}^1 = Z_1 I_1^1 + Z_0 (I_1^1 - k I_2^1)$$



c) Secuencia Negativa:

$$V_{IN}^2 = Z_1 I_1^2 + \frac{1}{k^2} Z_2 k I_2^2 + \frac{1}{k} V_{2N}^2$$

$$V_{IN}^2 = Z_1 I_1^2 + Z_0 (I_1^2 - k I_2^2)$$

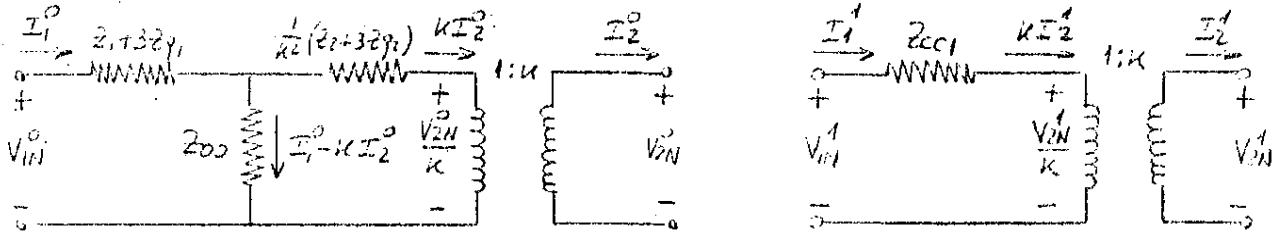


APROXIMACION USUAL: Si se supone permeabilidad infinita para el hierro del núcleo, será $R=0$ pues según se definió en 1.3.2 R es la reluctancia de las ramas del núcleo.

R' sin embargo no se anula, ya que representa la reluctancia del camino del flujo de secuencia cero por el aceite y las paredes de la cuba.

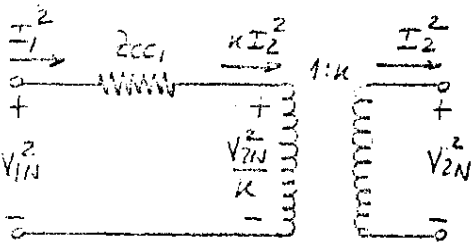
Esta suposición implica: $Z_0 = \infty$ y $Z_{00} = j\omega N_1^2 / 3R'$

por lo cual los circuitos equivalentes se reducen a:



Secuencia Cero

Secuencia Positiva



Secuencia Negativa

siendo: $Z_{cc1} = Z_1 + \frac{Z_2}{K^2}$

Z_{cc1} es la impedancia de cortocircuito referida al primario

EJEMPLO: (Máquinas Eléctricas, Volumen I, Kostenko-Piotrovsky, pág.416)

Transformador Trifásico en aceite - Núcleo Plano de Tres Columnas
 Conexión Estrella-Estrella - 100 KVA - 6300/220 V - $Z_{g1} = Z_{g2} = 0$

Ensayo de vacío para la Secuencia Cero, excitando desde el lado de baja:

a) Transformador desencubado: $R_0=0.022 \Omega$ $X_0=0.199 \Omega$ $Z_0=0.20 \Omega$ (41.3%)

b) Transformador en la cuba: $R_0=0.055 \Omega$ $X_0=0.300 \Omega$ $Z_0=0.31 \Omega$ (64.0%)

Ensayo de Cortocircuito: $R_{ct}=0.0127 \Omega$ $X_{ct}=0.0248 \Omega$ $Z_{ct}=0.028 \Omega$ (5.8%)

Las diferencias obtenidas en los ensayos de vacío a) y b) se debe a que R' en el caso a) es mayor que en el caso b).

3.1.3.3 Núcleo Plano de Cuatro y Cinco Columnas

Formalmente, los resultados son idénticos a los obtenidos en el caso 3.1.3.2, para el núcleo plano de tres columnas, sin embargo la interpretación de los mismos es diferente pues ahora R' representa la reluctancia de un camino por el hierro del núcleo.

Al analizar entonces los circuitos equivalentes aproximados que resul-

tan de suponer permeabilidad infinita para el hierro del núcleo, será $R=R'=0$ y como consecuencia de esto, ambas impedancias de vacío Z_0 y Z_{00} resultan infinitas.

De esta forma los circuitos equivalentes aproximados coinciden con los obtenidos para los sistemas magnéticos independientes y casi independientes analizados en 3.1.3.1 .

3.1.4 Conclusiones

- a) La configuración del circuito magnético no influye en los circuitos equivalentes de secuencia positiva y negativa. La validez de esta conclusión no se reduce a la conexión estrella-estrella sino que es de carácter general.
 - b) En todos los casos analizados no existen diferencias entre los circuitos equivalentes de secuencia positiva y negativa.
 - c) Las impedancias de neutro Z_{g1} y Z_{g2} influyen únicamente en los circuitos equivalentes de secuencia cero.
 - d) Si suponemos $Z_{g1} = Z_{g2} = 0$ podemos afirmar que:
 - Para flujos independientes o casi independientes el circuito equivalente de secuencia cero es idéntico a los circuitos equivalentes que se obtienen para secuencia positiva y negativa.
 - Para el núcleo plano de cuatro o cinco columnas, si bien la impedancia magnetizante de secuencia cero Z_{00} no es igual a la de secuencia positiva y negativa Z_0 , ambas son grandes y pueden despreciarse sin introducir errores de importancia. Por lo tanto bajo esta aproximación las tres redes de secuencia quedan iguales y dependen sólo de la impedancia de cortocircuito Z_{cc1} .
 - De lo anterior se deduce que afectan prácticamente en los Bancos de Transformadores y en los Transformadores Trifásicos de núcleo acorazado y de núcleo plano de cuatro o cinco columnas, la impedancia de cortocircuito de secuencia cero es igual a las impedancias de cortocircuito de secuencia positiva y negativa.
- Para el núcleo plano de tres columnas sin embargo, debido a la influencia del relativamente bajo valor de Z_{00} , la impedancia de cortocircuito de secuencia cero es del orden del 15% menor que la impedancia de cortocircuito de secuencia positiva o negativa.
-

3.2 CONEXION TRIANGULO-ESTRELLA

3.2.1 Ecuaciones en Componentes de Fase

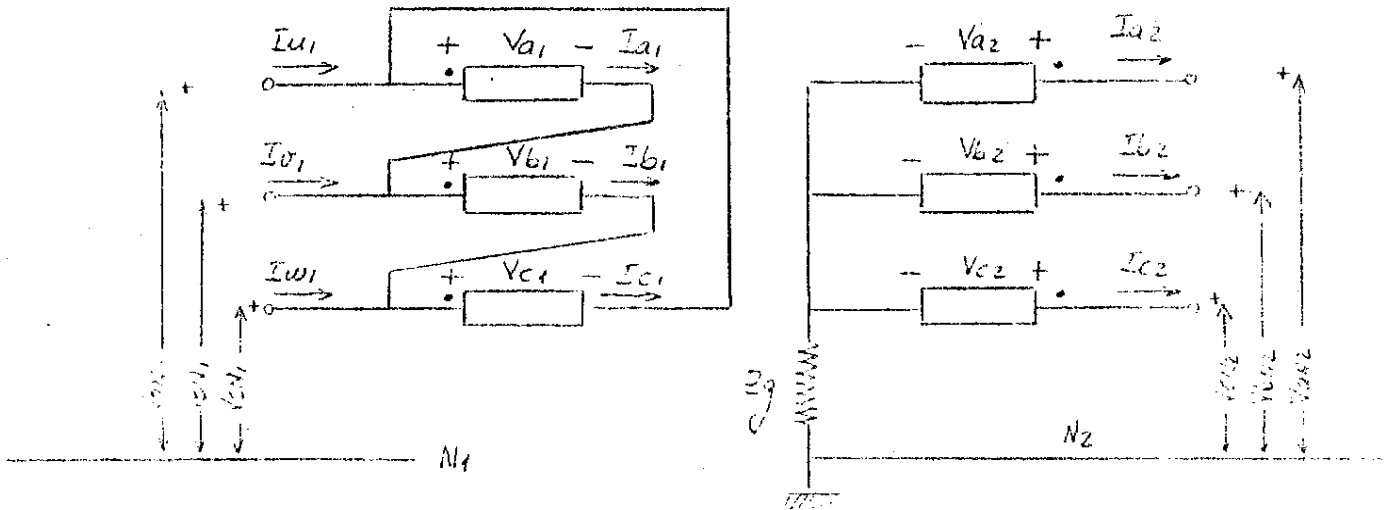


Fig.18: Conexión Triángulo-Estrella

Para el análisis matricial, las variables definidas en la Fig.18 las supondremos ordenadas según los vectores siguientes:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{b1} \\ V_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} V_{a2} \\ V_{b2} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{1N} \\ \vdots \\ V_{NN} \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} V_{aN1} \\ V_{bN1} \\ V_{cN1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{2N} \\ \vdots \\ V_{NN} \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} V_{aN2} \\ V_{bN2} \\ V_{cN2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{1\Delta} \\ \vdots \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{1\lambda} \\ \vdots \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_2 \\ \vdots \\ I_2 \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones generales deducidas en 2.3 para el transformador trifásico de dos arrollamientos, en conjunto con las ecuaciones que surgen del conexionado triángulo-estrella dan origen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1\Delta} \\ \vdots \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix}^{alc} + k \begin{bmatrix} Z_{21} \\ \vdots \\ Z_{N1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ \vdots \\ I_2 \end{bmatrix}^{alc} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}^{alc} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}^{alc} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1\Delta} \\ \vdots \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix}^{alc} + j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} P_{alc} \\ \vdots \\ P_{alc} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I_{1\Delta} \\ \vdots \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix}^{alc} - k \begin{bmatrix} I_2 \\ \vdots \\ I_2 \end{bmatrix}^{alc} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = \boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} uvw \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix} = \boxed{T_\Delta^t} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\boxed{T_\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc \\ V_{2N} \end{bmatrix} + z_9 \boxed{U_3} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sustituyendo (3) y (5) en (1) y (2) resulta:

$$\boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{Z_1} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + k \boxed{Z_{21}} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ V_{2N} \end{bmatrix} + \frac{z_9}{k} \boxed{U_3} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{Z_1} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + j\omega N_1^2 \boxed{Pabc} \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} uvw \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix} = \boxed{T_\Delta^t} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix}$$

Definiendo las matrices $\boxed{Z_2}$ y $\boxed{Z_{12}}$ como sigue:

$$\boxed{Z_2} = k^2 \boxed{Z_{21}} \quad \boxed{Z_{12}} = k^2 \boxed{Z_1}$$

el sistema de ecuaciones con valores referidos al secundario será:

$$k \boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{Z_{12}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + \left\{ \boxed{Z_2} + z_9 \boxed{U_3} \right\} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ V_{2N} \end{bmatrix}$$

$$k \boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{Z_{12}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + j\omega N_2^2 \boxed{Pabc} \left\{ \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} uvw \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix} = k \boxed{T_\Delta^t} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix}$$

Si definimos:

$$\boxed{Z_2''} = \boxed{Z_2} + Z_3 \boxed{U_3} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline z_{12}z_3 & z_3 & z_3 \\ \hline z_3 & z_{12}z_3 & z_3 \\ \hline z_3 & z_3 & z_{12}z_3 \\ \hline \end{array}$$

se tiene finalmente:

$$k \boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{Z_{12}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + \boxed{Z_2''} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ V_{2N} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$k \boxed{T_\Delta} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \boxed{Z_{12}} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + j\omega N_2^2 \boxed{P_{abc}} \left\{ \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} uvw \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix} = k \boxed{T_\Delta^t} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Las nueve ecuaciones escalaras que surgen de las ecuaciones matriciales (6) (7) y (8), una vez determinada la matriz $\boxed{P_{abc}}$ en función del sistema magnético que se considere, describen el comportamiento del transformador para régimen sinusoidal.

3.2.2 Ecuaciones en Componentes Simétricas

Aplicando la transformación de Fortescue a los vectores definidos en 3.2.1, obtenemos los vectores que se dan a continuación y que representan a las variables originales en Componentes Simétricas.

$$\begin{bmatrix} 012 \\ V_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{1N}^1 \\ V_{1N}^2 \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ V_{1N} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 012 \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1\Delta}^0 \\ I_{1\Delta}^1 \\ I_{1\Delta}^2 \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 012 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 012 \\ V_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{2N}^1 \\ V_{2N}^2 \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ V_{2N} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 012 \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1\lambda}^0 \\ I_{1\lambda}^1 \\ I_{1\lambda}^2 \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} uvw \\ I_{1\lambda} \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos miembros de las ecuaciones (6) (7) y (8) por T_F^{-1} y aplicando las relaciones anteriores se tiene:

$$K \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & T_\Delta & \\ & & T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 012 \\ V_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & Z_{12} & \\ & & T_F \end{bmatrix} \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 012 \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & Z_2'' & \\ & & T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 012 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 212 \\ V_{2N} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & T_\Delta & \\ & & T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 012 \\ V_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & Z_{12} & \\ & & T_F \end{bmatrix} \frac{1}{K} \begin{bmatrix} 012 \\ -I_{1\Delta} \end{bmatrix} + j\omega N_2^2 \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & P_{alc} & \\ & & T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/K \begin{bmatrix} 012 \\ -I_{1\Delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 012 \\ -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 012 \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & T_\Delta^t & \\ & & T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 012 \\ I_{1\Delta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Operando resulta que:

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & Z_{12} & \\ & & T_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 z_1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 z_1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 z_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & Z_2'' & \\ & & T_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & T_\Delta & \\ & & T_F \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j30} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j30} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & T_\Delta^t & \\ & & T_F \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j30} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j30} \end{bmatrix}$$

Se define además: $j\omega N_2^2 P_{012} = j\omega N_2^2 \begin{bmatrix} T_F^{-1} & & \\ & P_{alc} & \\ & & T_F \end{bmatrix}$

Por lo tanto las ecuaciones (9) (10) y (11) en forma desarrollada serán:

$$\sqrt{3}k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j3\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j3\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{IN}^0 \\ V_{IN}^1 \\ V_{IN}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 z_1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 z_1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 z_1 \end{bmatrix} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} I_{1\Delta}^0 \\ I_{1\Delta}^1 \\ I_{1\Delta}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 + j3z_p & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{IN}^0 \\ V_{IN}^1 \\ V_{IN}^2 \end{bmatrix}$$

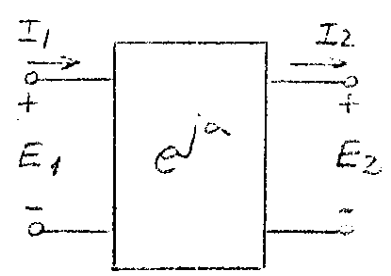
$$\sqrt{3}k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j3\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-j3\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{IN}^0 \\ V_{IN}^1 \\ V_{IN}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 z_1 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 z_1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 z_1 \end{bmatrix} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} I_{1\Delta}^0 \\ I_{1\Delta}^1 \\ I_{1\Delta}^2 \end{bmatrix} + j\omega N_2^2 \boxed{P_{012}} \left\{ \frac{1}{k} \begin{bmatrix} I_{1\Delta}^0 \\ I_{1\Delta}^1 \\ I_{1\Delta}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -I_{1\Delta}^0 \\ -I_{1\Delta}^1 \\ I_{1\Delta}^2 \end{bmatrix} = \sqrt{3}k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j3\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j3\theta} \end{bmatrix} \frac{1}{k} \begin{bmatrix} I_{1\Delta}^0 \\ I_{1\Delta}^1 \\ I_{1\Delta}^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

3.2.3 Circuitos Equivalentes para las distintas secuencias

Para los desarrollos de los circuitos equivalentes que siguen, el símbolo de la figura se empleará para representar un desfaseador de ángulo α que verifica las siguientes ecuaciones:

$$E_2 = E_1 e^{j\alpha} \quad I_2 = I_1 e^{j\alpha}$$



3.2.3.1 Sistemas Magnéticos Independientes y Casi Independientes

De acuerdo a los resultados obtenidos en 1.3.1 y 1.3.5 para los sistemas magnéticos independientes y casi independientes, la transformada de la matriz de permeancias será:

$$j\omega N_2^2 \boxed{TF^{-1}} \boxed{P_{alc}} \boxed{TF} = j\omega N_2^2 \boxed{P_{012}} = j\omega N_2^2 \begin{bmatrix} 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ 0 & z_0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 \end{bmatrix}$$

Donde se ha definido:

$$Z_0 = j\omega L_0 = j\omega \frac{N_2^2}{R}$$

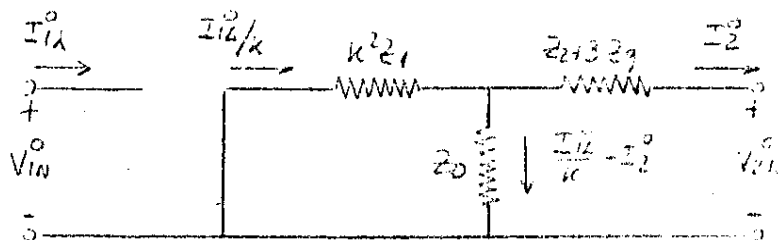
Sustituyendo en (12) (13) y (14) resulta:

a) Secuencia Cero:

$$0 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1\lambda}^0 + (z_2 + z_2') I_2^0 + V_{2N}^0$$

$$0 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1\lambda}^0 + z_0 \left(\frac{1}{k} I_{1\lambda}^0 - I_2^0 \right)$$

$$I_{1\lambda}^0 = 0.$$

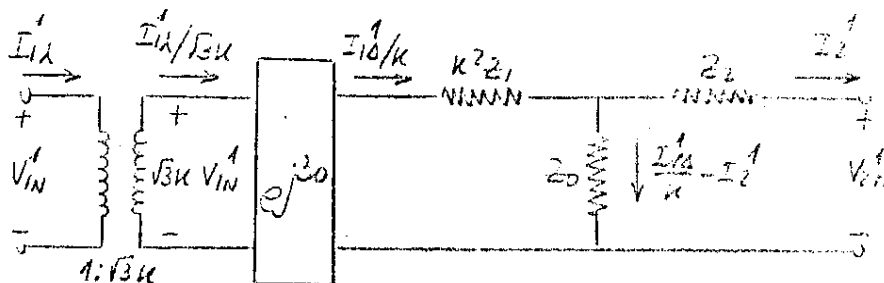


b) Secuencia Positiva

$$\sqrt{3} k e^{j30} V_{1N}^1 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1\lambda}^1 + z_2 I_2^1 + V_{2N}^1$$

$$\sqrt{3} k e^{j30} V_{1N}^1 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1\lambda}^1 + z_0 \left(\frac{1}{k} I_{1\lambda}^1 - I_2^1 \right)$$

$$I_{1\lambda}^1 = \sqrt{3} k e^{j30} \frac{1}{k} I_{1\lambda}^1$$

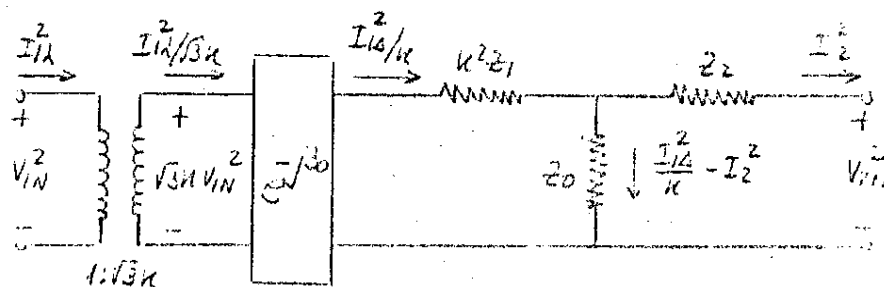


c) Secuencia Negativa

$$\sqrt{3} k e^{-j30} V_{1N}^2 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1\lambda}^2 + z_2 I_2^2 + V_{2N}^2$$

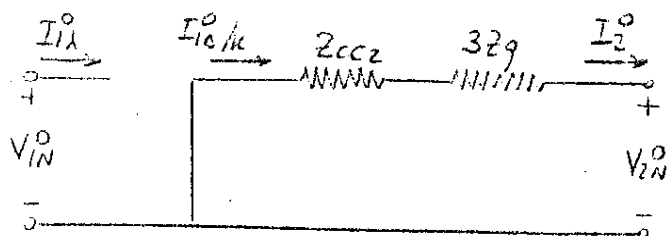
$$\sqrt{3} k e^{-j30} V_{1N}^2 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1\lambda}^2 + z_0 \left(\frac{1}{k} I_{1\lambda}^2 - I_2^2 \right)$$

$$I_{1\lambda}^2 = \sqrt{3} k e^{-j30} \frac{1}{k} I_{1\lambda}^2$$



APROXIMACION USUAL: Si se supone permeabilidad infinita para el hierro del núcleo, será $R=0$ pues para los Sistemas Magnéticos Independientes y Casi Independientes R es la reluctancia de un camino totalmente contenido en el núcleo.

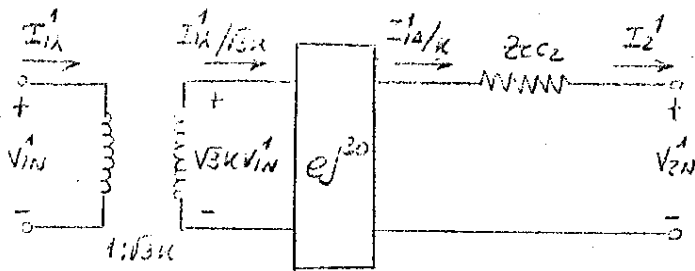
$R=0$ implica Z_0 infinita, por tanto los circuitos anteriores se reducen a;



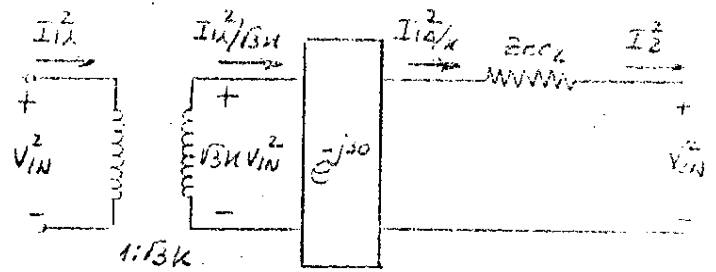
Secuencia Cero

siendo: $z_{cc2} = k^2 z_1 + z_2$

z_{cc2} es la impedancia de cortocircuito referida al secundario.



Secuencia Positiva



Secuencia Negativa

3.2.3.2 Núcleo Plano de Tres Columnas

Si definimos: $Z_0 = j\omega L_0 = j\omega \frac{N_1^2}{R}$ y $Z_{00} = j\omega L_{00} = j\omega \frac{N_1^2}{R+3R'}$ $R' \gg R$ $\therefore Z_{00} \ll Z_0$

en base a los resultados obtenidos en 1.3.2 será:

$$j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} -1 \\ TF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \\ TF \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} P_{012} \\ TF \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{R+3R'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{bmatrix}$$

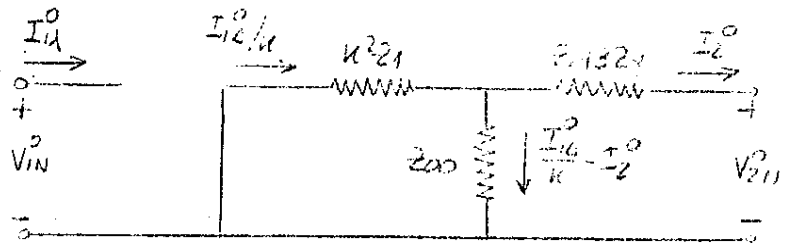
por lo que sustituyendo en (12) (13) y (14) se tiene:

a) Secuencia Cero:

$$0 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1A}^0 + (z_2 + 3z_2') I_2^0 + V_{2N}^0$$

$$0 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1A}^0 + Z_{00} \left(\frac{1}{k} I_{1A}^0 - I_2^0 \right)$$

$$I_{1A}^0 = 0$$

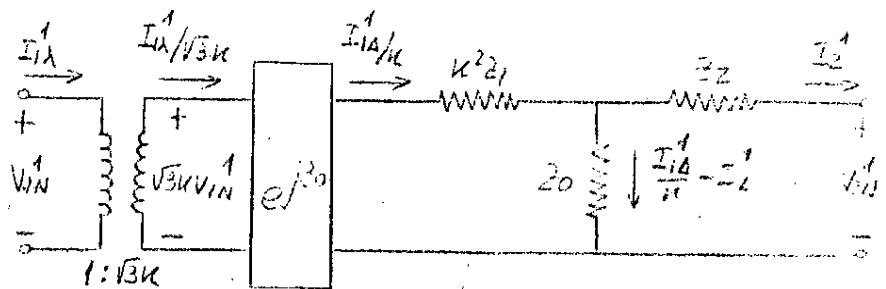


b) Secuencia Positiva:

$$\sqrt{3}k e^{j30} V_{1N}^1 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1A}^1 + z_2 I_2^1 + V_{2N}^1$$

$$\sqrt{3}k e^{j30} V_{1N}^1 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1A}^1 + Z_0 \left(\frac{1}{k} I_{1A}^1 - I_2^1 \right)$$

$$I_{1A}^1 = \sqrt{3}k e^{-j30} \frac{1}{k} I_{1A}^1$$

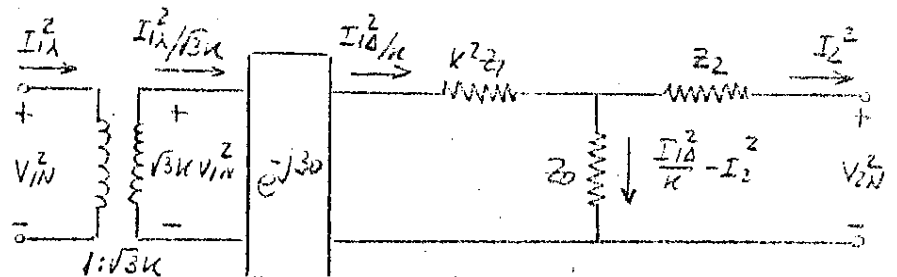


c) Secuencia Negativa:

$$\sqrt{3}k e^{-j30} V_{1N}^2 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1A}^2 + z_2 I_2^2 + V_{2N}^2$$

$$\sqrt{3}k e^{-j30} V_{1N}^2 = (k^2 z_1) \frac{1}{k} I_{1A}^2 + Z_0 \left(\frac{1}{k} I_{1A}^2 - I_2^2 \right)$$

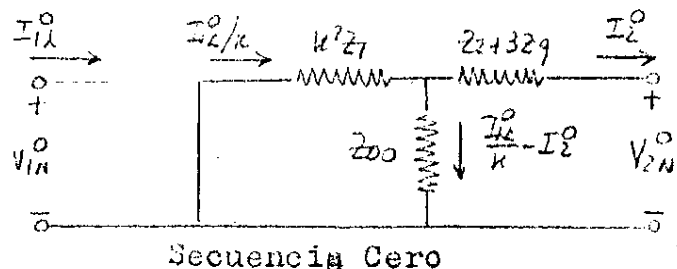
$$I_{1A}^2 = \sqrt{3}k e^{j30} \frac{1}{k} I_{1A}^2$$



APROXIMACION USUAL: Si se supone permeabilidad infinita para el hierro del núcleo, será $R=0$. por lo que Z_0 y Z_{00} pasarán a ser:

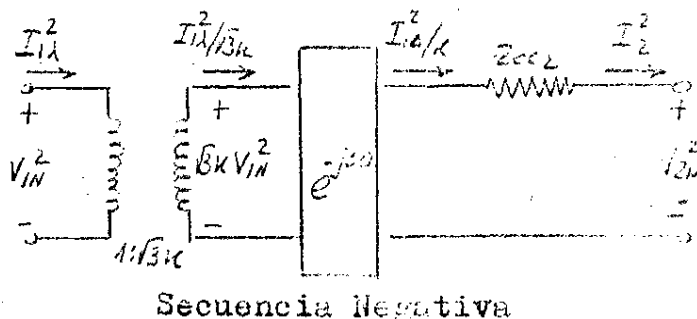
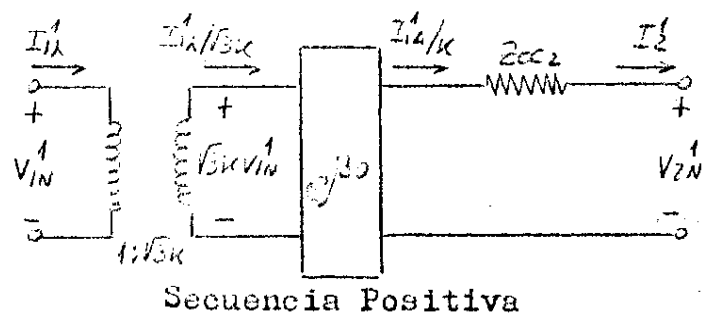
$$Z_0 = \infty \quad \text{y} \quad Z_{00} = j\omega N_0^2 / 3R'$$

por lo cual los circuitos equivalentes se reducen a:



siendo: $Z_{cc2} = k^2 Z_1 + Z_2$

Z_{cc2} es la impedancia de cortocircuito referida al secundario.



EJEMPLO: (Datos obtenidos en Ensayos de Fábrica de un Transformador Strömberg)

Transformador Trifásico - Núcleo Plano de Tres Columnas

Conexión Estrella-Triángulo - 36 MVA - 165/10.5 KV - $Z_g = 0$

Ensayo de Cortocircuito: $R_{ct} = 0.34 \%$ $X_{ct} = 11.82 \%$ $Z_{ct} = 11.83 \%$

Impedancia vista para la secuencia cero desde el lado de Alta Tensión:

$$R_0 = 0.91 \% \quad Z_0 = 9.7 \%$$

Estos resultados muestran claramente la influencia de la Z_{00} dado que:

$$Z_V^0 = Z_2 + (Z_{00} // k^2 Z_1) < Z_{cc} = Z_2 + (Z_0 // k^2 Z_1) \approx Z_2 + k^2 Z_1$$

3.2.3.3 Núcleo Plano de Cuatro y Cinco Columnas

Por las mismas razones expuestas en 3.1.3.3, si bien el circuito equivalente sería formalmente igual al obtenido para el Núcleo Plano de Tres columnas en el caso de la secuencia cero, al suponer permeabilidad infinita para el hierro del núcleo resultan Z_0 y Z_{00} infinitas, por lo cual los circuitos equivalentes aproximados coinciden con los obtenidos en 3.2.3.1 para los Sistemas Magnéticos Independientes y Casi Independientes.

3.2.4 Conclusiones

- a) Los circuitos equivalentes de secuencia positiva y negativa difieren entre sí. Mientras en el circuito de secuencia positiva el desfase que introduce el desfasador es de 30° , en el de secuencia negativa es de -30° .
- b) La impedancia de neutro Z_g influye únicamente en los circuitos equivalentes de secuencia cero.
- c) El circuito equivalente de secuencia cero visto desde el primario (conectado en triángulo) es un circuito abierto. Sin embargo existe una circulación de corriente de secuencia cero por las bobinas que constituyen el arrollamiento primario.
- d) El circuito equivalente de secuencia cero visto desde el secundario no depende de las condiciones del primario (cortocircuito o vacío).
- e) Para los transformadores de flujos independientes o casi independientes y núcleo plano de cuatro y cinco columnas el valor de la impedancia vista desde el secundario, para $Z_g = 0$, en secuencia cero, coincide prácticamente con la impedancia de cortocircuito que se obtiene para la secuencia positiva o negativa.

Sin embargo para el núcleo plano de tres columnas, como se puede ver en el ejemplo de 3.2.3.2, el valor obtenido para la secuencia cero, es menor que el obtenido para la secuencia positiva y negativa en el ensayo de cortocircuito.

3.3 CONEXION ZIG-ZAG

A continuación a modo de ejemplo de conexionado de un transformador trifásico de dos arrollamientos, estudiaremos el transformador Zig-Zag con neutro a tierra a través de una impedancia.

Este tipo de transformador, cuyo esquema de conexiones se muestra en la Fig.19, se utiliza en Sistemas de Potencia cuando se desea conectar una impedancia a tierra en un circuito de neutro inaccesible.

Se analizará únicamente el caso correspondiente a Núcleo Plano de Tres Columnas por tratarse del caso más usual.

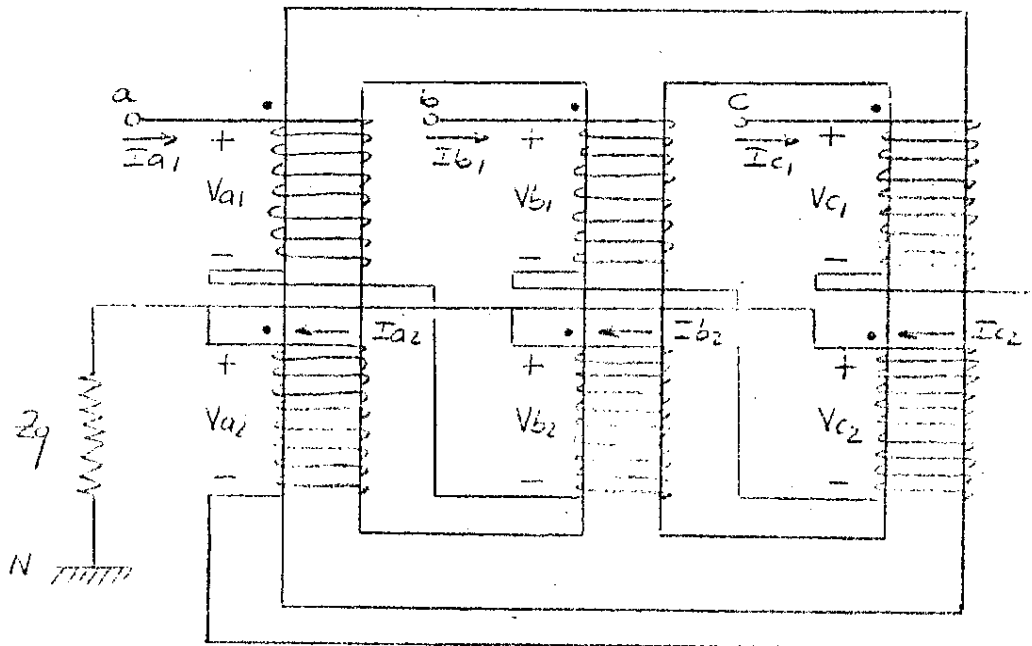


Fig.19: Transformador Zig-Zag

3.3.1 Ecuaciones en Componentes de Fase

Las variables definidas en la Fig.19, las supondremos ordenadas según los vectores que se detallan a continuación:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{b1} \\ V_{c1} \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} a & b & c \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a2} \\ V_{b2} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} a & b & c \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{aN} \\ V_{bN} \\ V_{cN} \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} a & b & c \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} a & b & c \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix}$$

Basados en las ecuaciones generales del transformador trifásico de dos arrollamientos para $N_1 = N_2$, y de las ecuaciones que surgen del conexionado Zig-Zag podemos plantear:

$$\begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} V_W^{abc} \\ V_W^{abc} \\ V_W^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_2 \\ T_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \end{bmatrix} + Z_3 \begin{bmatrix} U_3 \\ U_3 \\ U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Siendo: $\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} P_{abc} \\ P_{abc} \\ P_{abc} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_2 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (4) en (1) (2) y (3) de modo de eliminar $\begin{bmatrix} I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \\ I_2^{abc} \end{bmatrix}$ resulta;

$$\begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{-1} \\ T_2^{-1} \\ T_2^{-1} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{-1} \\ T_2^{-1} \\ T_2^{-1} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} V_W^{abc} \\ V_W^{abc} \\ V_W^{abc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \\ V_1^{abc} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_2 \\ T_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \end{bmatrix} + Z_3 \begin{bmatrix} U_3 \\ U_3 \\ U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{-1} \\ T_2^{-1} \\ T_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sustituyendo (6) en (5) se halla $\begin{bmatrix} V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \\ V_2^{abc} \end{bmatrix}$ como función de $\begin{bmatrix} I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \\ I_1^{abc} \end{bmatrix}$:

$$- \boxed{T_2} \begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix} = \left\{ \boxed{Z_2} + \boxed{T_2} \boxed{Z_0} \boxed{T_2^{-1}} - \boxed{T_2} \boxed{Z_0} \right\} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sustituyendo (6) y (8) en (7) resulta:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_N \end{bmatrix} = \left\{ \boxed{Z_1} + \boxed{Z_2} + \left(\boxed{I} - \boxed{T_2} \right) \boxed{Z_0} \left(\boxed{I} - \boxed{T_2^{-1}} \right) + 2\gamma \boxed{U_3} \boxed{T_2^{-1}} \right\} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

siendo \boxed{I} la matriz identidad.

Operando:

$$\boxed{U_3} \boxed{T_2^{-1}} = \boxed{U_3}$$

$$\boxed{Z'_0} = \left(\boxed{I} - \boxed{T_2} \right) \boxed{Z_0} \left(\boxed{I} - \boxed{T_2^{-1}} \right) = j\omega \frac{3N_1^2}{R}$$

2/3	-1/3	-1/3
-1/3	2/3	-1/3
-1/3	-1/3	2/3

Se define:

$$Z_0 = j\omega \frac{3N_1^2}{R}$$

En base a los resultados anteriores, la ecuación (9) en forma desarrollada será:

V_{aN}	$Z_1 + Z_2 + 2\gamma + \frac{2}{3} Z_0$	$2\gamma - \frac{2\gamma}{3}$	$2\gamma - \frac{2\gamma}{3}$	I_{a1}
V_{bN}	$2\gamma - \frac{2\gamma}{3}$	$Z_1 + Z_2 + 2\gamma + \frac{2}{3} Z_0$	$2\gamma - \frac{2\gamma}{3}$	I_{b1}
V_{cN}	$2\gamma - \frac{2\gamma}{3}$	$2\gamma - \frac{2\gamma}{3}$	$Z_1 + Z_2 + 2\gamma + \frac{2}{3} Z_0$	I_{c1}

(10)

3.3.2 Ecuaciones en Componentes Simétricas

Si escribimos la relación (10) como:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_N \end{bmatrix} = \boxed{Z} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix}$$

al aplicar la transformación de Fortescue resulta;

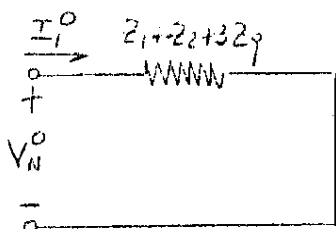
$$\boxed{T_F^{-1}} \begin{bmatrix} abc \\ V_N \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 012 \\ V_N \end{bmatrix} = \boxed{T_F^{-1}} \boxed{Z} \begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Finalmente haciendo las operaciones necesarias para obtener la transformada de Fortescue de la matriz Z^{abc} se tiene:

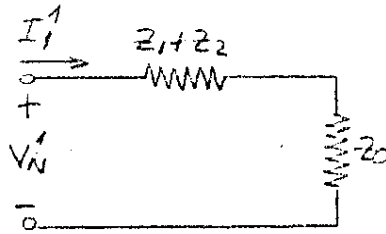
$$\begin{bmatrix} V_N^0 \\ V_N^1 \\ V_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1+z_2+3z_0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1+z_2+z_0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1+z_2+z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Circuitos Equivalentes para las distintas secuencias



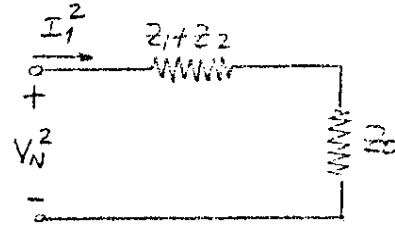
$$V_N^0 = (z_1+z_2+3z_0) I_1^0$$

Secuencia Cero



$$V_N^1 = (z_1+z_2+z_0) I_1^1$$

Secuencia Positiva



$$V_N^2 = (z_1+z_2+z_0) I_1^2$$

Secuencia Negativa

Del análisis de los circuitos equivalentes deducimos que el Transformador Zig-Zag presenta, para la secuencia positiva y negativa, una impedancia vista formada por la serie de la impedancia de cortocircuito referida al primario con la impedancia de vacío. A efectos prácticos estos circuitos se pueden considerar abiertos.

Para la secuencia cero en cambio, la impedancia vista desde el primario está constituida por la serie de la impedancia de cortocircuito referida al primario y la impedancia de aterramiento multiplicada por tres.

4. TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS DE TRES ARROLLAMIENTOS

4.1 ECUACIONES GENERALES DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE TRES ARROLLAMIENTOS

El desarrollo que sigue tiene por finalidad obtener el sistema de ecuaciones que representa el funcionamiento del transformador trifásico de tres arrollamientos, independientemente de la conexión de sus bobinados y del tipo de circuito magnético.

Según se indica en la representación esquemática de la Fig.20, el flujo total que atraviesa cada bobinado se compone de un flujo principal confinado al hierro del núcleo que es común a todas las bobinas de la misma fase y los flujos de dispersión que necesariamente se cierran por caminos exteriores al núcleo (aire, aceite, paredes de la cuba, etc.).

La diferencia con los transformadores de dos arrollamientos radica en que además de los flujos de dispersión propios de cada bobinado se deben tener en cuenta los flujos de dispersión que enlazan los bobinados de cada fase tomados de a dos.

Se considera que no existen flujos de dispersión entre los bobinados de las diferentes fases y que los flujos considerados enlazan todas las espiras que componen los bobinados que atraviesan.

Aplicando a cada bobinado la Ley de Faraday, teniendo en cuenta los signos y sentidos definidos en la Fig.20, resulta:

$$V_{a1} = R_1 I_{a1} + N_1 \frac{d}{dt} (\Phi_a + \Phi_{da1} + \Phi_{da12} + \Phi_{da13})$$

$$V_{b1} = R_1 I_{b1} + N_1 \frac{d}{dt} (\Phi_b + \Phi_{db1} + \Phi_{db12} + \Phi_{db13})$$

$$V_{c1} = R_1 I_{c1} + N_1 \frac{d}{dt} (\Phi_c + \Phi_{dc1} + \Phi_{dc12} + \Phi_{dc13})$$

$$V_{a2} = -R_2 I_{a2} + N_2 \frac{d}{dt} (\Phi_a + \Phi_{da2} + \Phi_{da12} + \Phi_{da23})$$

$$V_{b2} = -R_2 I_{b2} + N_2 \frac{d}{dt} (\Phi_b + \Phi_{db2} + \Phi_{db12} + \Phi_{db23})$$

$$V_{c2} = -R_2 I_{c2} + N_2 \frac{d}{dt} (\Phi_c + \Phi_{dc2} + \Phi_{dc12} + \Phi_{dc23})$$

$$V_{a3} = -R_3 I_{a3} + N_3 \frac{d}{dt} (\Phi_a + \Phi_{da3} + \Phi_{da13} + \Phi_{da23})$$

$$V_{b3} = -R_3 I_{b3} + N_3 \frac{d}{dt} (\Phi_b + \Phi_{db3} + \Phi_{db13} + \Phi_{db23})$$

$$V_{c3} = -R_3 I_{c3} + N_3 \frac{d}{dt} (\Phi_c + \Phi_{dc3} + \Phi_{dc13} + \Phi_{dc23})$$

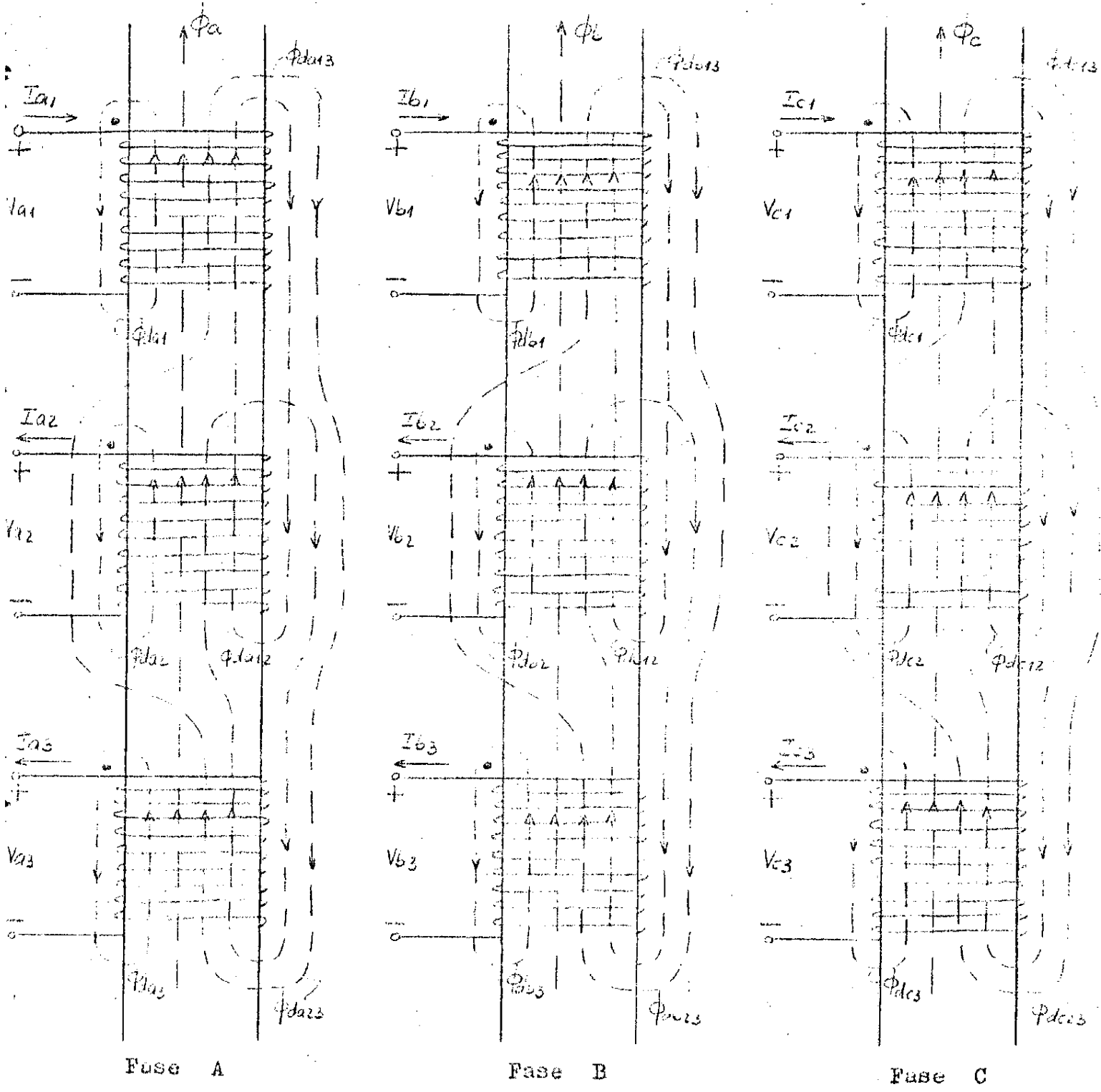


Fig. 20: Representación esquemática de los flujos principales y de dispersión de cada fase

Las variables que intervienen en las ecuaciones anteriores, las supondremos ordenadas según los vectores que se definen a continuación:

$$\begin{bmatrix} abc \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a3} \\ I_{b3} \\ I_{c3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{b1} \\ V_{c1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a2} \\ V_{b2} \\ V_{c2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a3} \\ V_{b3} \\ V_{c3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ \Phi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{d11} \\ \Phi_{d12} \\ \Phi_{d13} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{d21} \\ \Phi_{d22} \\ \Phi_{d23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{d31} \\ \Phi_{d32} \\ \Phi_{d33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{b12} \\ \Phi_{c12} \\ \Phi_{d12} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{a13} \\ \Phi_{b13} \\ \Phi_{c13} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{a23} \\ \Phi_{b23} \\ \Phi_{c23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_a \\ \Phi_b \\ \Phi_c \end{bmatrix}$$

En base a estas definiciones, las nueve ecuaciones escalares que surgen de aplicar la Ley de Faraday a cada bobinado, se reducen a las tres ecuaciones matriciales que siguen:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_1 \end{bmatrix} = R_1 \begin{bmatrix} abc \\ -I_1 \end{bmatrix} + N_1 \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d13} \end{bmatrix} \right\} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_2 \end{bmatrix} = -R_2 \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix} + N_2 \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d23} \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_3 \end{bmatrix} = -R_3 \begin{bmatrix} abc \\ I_3 \end{bmatrix} + N_3 \frac{d}{dt} \left\{ \begin{bmatrix} abc \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d23} \end{bmatrix} \right\} \quad (3)$$

Si se definen las siguientes reluctancias para los caminos que recorren los flujos de dispersión:

$$R_{da1} = R_{db1} = R_{dc1} = R_{d1}$$

$$R_{da12} = R_{db12} = R_{dc12} = R_{d12}$$

$$R_{da2} = R_{db2} = R_{dc2} = R_{d2}$$

$$R_{da13} = R_{db13} = R_{dc13} = R_{d13}$$

$$R_{da3} = R_{db3} = R_{dc3} = R_{d3}$$

$$R_{da23} = R_{db23} = R_{dc23} = R_{d23}$$

de la Ley de Ampere aplicada a los circuitos magnéticos se deduce que:

$$R_{d1} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d1} \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} abc \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

$$R_{d2} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d2} \end{bmatrix} = -N_2 \begin{bmatrix} abc \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$R_{d3} \begin{bmatrix} abc \\ \Phi_{d3} \end{bmatrix} = -N_3 \begin{bmatrix} abc \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$R_{d12} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] = N_1 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - N_2 \left[\frac{d\phi}{dt} \right]$$

$$R_{d13} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] = N_1 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - N_3 \left[\frac{d\phi}{dt} \right]$$

$$R_{d23} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] = -N_2 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - N_3 \left[\frac{d\phi}{dt} \right]$$

Sustituyendo los flujos de dispersión en función de las corrientes en las ecuaciones (1) (2) y (3) resulta:

$$\left[\frac{d\phi}{dt} \right] = R_1 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + \left(\frac{N_1^2}{R_{d11}} + \frac{N_1^2}{R_{d12}} + \frac{N_1^2}{R_{d13}} \right) \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - \frac{N_1 N_2}{R_{d12}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - \frac{N_1 N_3}{R_{d13}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + N_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] \quad (4)$$

$$\left[\frac{d\phi}{dt} \right] = -R_2 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + \frac{N_1 N_2}{R_{d12}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - \left(\frac{N_2^2}{R_{d12}} + \frac{N_2^2}{R_{d22}} + \frac{N_2^2}{R_{d23}} \right) \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - \frac{N_2 N_3}{R_{d23}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + N_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] \quad (5)$$

$$\left[\frac{d\phi}{dt} \right] = -R_3 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + \frac{N_1 N_3}{R_{d13}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - \frac{N_2 N_3}{R_{d23}} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - \left(\frac{N_3^2}{R_{d13}} + \frac{N_3^2}{R_{d23}} + \frac{N_3^2}{R_{d33}} \right) \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + N_3 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] \quad (6)$$

Si definimos:

$$K_2 = \frac{N_2}{N_1} \quad L_{11} = \frac{N_1^2}{R_{d11}} + \frac{N_1^2}{R_{d12}} + \frac{N_1^2}{R_{d13}} \quad L_{12} = \frac{N_1^2}{R_{d12}} \quad R_{11} = R_1$$

$$K_3 = \frac{N_3}{N_1} \quad L_{22} = \frac{N_2^2}{R_{d12}} + \frac{N_2^2}{R_{d22}} + \frac{N_2^2}{R_{d23}} \quad L_{13} = \frac{N_1^2}{R_{d13}} \quad R_{22} = \frac{R_2}{K_2^2}$$

$$L_{33} = \frac{N_3^2}{R_{d13}} + \frac{N_3^2}{R_{d23}} + \frac{N_3^2}{R_{d33}} \quad L_{23} = \frac{N_2^2}{R_{d23}} \quad R_{33} = \frac{R_3}{K_3^2}$$

Las ecuaciones (4) (5) y (6) con magnitudes referidas al primario serán:

$$\left[\frac{d\phi}{dt} \right] = R_{11} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + L_{11} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - L_{12} K_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - L_{13} K_3 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + N_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] \quad (7)$$

$$\frac{1}{K_2} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] = -R_{22} K_2 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + L_{12} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - L_{22} K_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - L_{23} K_3 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + N_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] \quad (8)$$

$$\frac{1}{K_3} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] = -R_{33} K_3 \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + L_{13} \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - L_{23} K_2 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] - L_{33} K_3 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] + N_1 \frac{d}{dt} \left[\frac{d\phi}{dt} \right] \quad (9)$$

Cualquiera sea la configuración del circuito magnético, existirá una matriz de Permeancias $\boxed{\text{Pabc}}$ de 3x3 que relaciona los flujos principales

con las fuerzas magnetomotrices:

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = \boxed{P_{abc}} \begin{bmatrix} F^{abc} \end{bmatrix}$$

Para un transformador trifásico de tres arrollamientos, de acuerdo al esquema de la Fig.20, será:

$$\begin{bmatrix} \frac{abc}{F} \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_1} \end{bmatrix} - N_2 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_2} \end{bmatrix} - N_3 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = N_1 \boxed{P_{abc}} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_1} \end{bmatrix} - k_2 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_2} \end{bmatrix} - k_3 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_3} \end{bmatrix} \right\} \quad (15)$$

Las ecuaciones matriciales (7) (8) (9) y (10) describen completamente el funcionamiento del transformador trifásico de tres arrollamientos en baja frecuencia.

4.2 ECUACIONES GENERALES PARA REGIMEN SINUSOIDAL

Si se considera régimen permanente sinusoidal y se definen las siguientes impedancias:

$$Z_{11} = R_{11} + j\omega L_{11} \quad Z_{12} = j\omega L_{12}$$

$$Z_{22} = R_{22} + j\omega L_{22} \quad Z_{23} = j\omega L_{23}$$

$$Z_{33} = R_{33} + j\omega L_{33} \quad Z_{23} = j\omega L_{23}$$

sustituyendo las variables temporales por fasores, las ecuaciones (7) (8) (9) y (10) se transforman en:

$$\begin{bmatrix} \frac{abc}{V_1} \end{bmatrix} = Z_{11} \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_1} \end{bmatrix} - Z_{12} k_2 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_2} \end{bmatrix} - Z_{13} k_3 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_3} \end{bmatrix} + j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\frac{1}{k_2} \begin{bmatrix} \frac{abc}{V_2} \end{bmatrix} = Z_{12} \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_1} \end{bmatrix} - Z_{22} k_2 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_2} \end{bmatrix} - Z_{23} k_3 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_3} \end{bmatrix} + j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\frac{1}{k_3} \begin{bmatrix} \frac{abc}{V_3} \end{bmatrix} = Z_{13} \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_1} \end{bmatrix} - Z_{23} k_2 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_2} \end{bmatrix} - Z_{33} k_3 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_3} \end{bmatrix} + j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{abc} \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \boxed{P_{abc}} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_1} \end{bmatrix} - k_2 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_2} \end{bmatrix} - k_3 \begin{bmatrix} \frac{abc}{I_3} \end{bmatrix} \right\} \quad (14)$$

4.3 ECUACIONES GENERALES en COMPONENTES SIMÉTRICAS

Para la deducción de los circuitos equivalentes en Componentes Simétricas, de las diferentes conexiones que analizaremos para transformadores trifásicos de tres arrollamientos, emplearemos una metodología diferente a la aplicada en el caso de transformadores trifásicos de dos arrollamientos. Para los transformadores trifásicos de dos arrollamientos se combinaron, en cada caso a estudiar, las ecuaciones generales y las ecuaciones del conexionado correspondientes, para luego aplicar la transformación de Fortes que a las ecuaciones resultantes y obtener de ese modo los circuitos equivalentes en Componentes Simétricas.

Para los transformadores trifásicos de tres arrollamientos en cambio, analizaremos por separado las ecuaciones generales y las ecuaciones del conexionado, se aplicará a cada grupo de ecuaciones la transformación de Fortes para pasarlas a Componentes Simétricas y deducir en forma separada los circuitos equivalentes a las distintas secuencias para el transformador de tres arrollados independientemente del conexionado por un lado y para los diferentes tipos de conexión (básicamente estrella y triángulo) por otro, para luego combinarlos convenientemente y obtener así los circuitos equivalentes de las distintas posibilidades de conexión que se deseen analizar.

Comenzaremos entonces por obtener las ecuaciones generales en Componentes Simétricas.

Para ello, aplicando la transformación de Fortes a los vectores definidos en 4.1, se realiza el cambio de variables de Componentes de Fase a Componentes Simétricas, obteniéndose los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_1 \\ V_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_1^0 \\ V_1^1 \\ V_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ V_1 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_2^0 \\ V_2^1 \\ V_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ V_2 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} 0 \\ V_3 \\ V_3 \\ V_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_3^0 \\ V_3^1 \\ V_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ V_3 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \\ I_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ I_1 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \\ I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^1 \\ I_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ I_2 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \\ I_3 \\ I_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_3^0 \\ I_3^1 \\ I_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ I_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^{012} \\ \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{alc} \\ \phi \end{bmatrix}$$

Pre-multiplicando ambos miembros de las ecuaciones (11) (12) (13) y (14) por $\begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix}$ y aplicando las relaciones anteriores se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} = Z_{11} \begin{bmatrix} I_1 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - Z_{12} K_2 \begin{bmatrix} I_2 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - Z_{13} K_3 \begin{bmatrix} I_3 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} + j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{012} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\frac{1}{K_2} \begin{bmatrix} V_2 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} = Z_{12} \begin{bmatrix} I_1 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - Z_{22} K_2 \begin{bmatrix} I_2 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - Z_{23} K_3 \begin{bmatrix} I_3 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} + j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{012} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\frac{1}{K_3} \begin{bmatrix} V_3 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} = Z_{13} \begin{bmatrix} I_1 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - Z_{23} K_2 \begin{bmatrix} I_2 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - Z_{33} K_3 \begin{bmatrix} I_3 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} + j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{012} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$j\omega N_1 \begin{bmatrix} \phi^{012} \\ \phi \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \\ T_F \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I_1 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - K_2 \begin{bmatrix} I_2 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} - K_3 \begin{bmatrix} I_3 \\ \phi^{012} \end{bmatrix} \right\} \quad (18)$$

En lo que tiene que ver con el Circuito Magnético supondremos que:

$$\begin{bmatrix} Z_{00}^{012} \\ Z_0 \end{bmatrix} = j\omega N_1^2 \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{abc} \\ T_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{bmatrix}$$

y veremos que una matriz $\begin{bmatrix} Z_0^{012} \\ Z_0 \end{bmatrix}$ de esta forma incluye todos los casos de circuitos magnéticos analizados interpretando sus elementos como sigue:

- Banco de Transformadores Y Triple Núcleo: $Z_{00} = Z_0 = j\omega \frac{N_1^2}{R}$
- Núcleo Plano de Tres Columnas: $Z_{00} = j\omega \frac{N_1^2}{R+3R_1}$ $Z_0 = j\omega \frac{N_1^2}{R}$
- Núcleo Plano de Cuatro y Cinco Columnas: $Z_{00} = j\omega \frac{N_1^2}{R+3R_1}$ $Z_0 = j\omega \frac{N_1^2}{R}$
- Núcleo Acorazado: $Z_{00} = Z_0 = j\omega \frac{N_1^2}{R_T}$

Definida Z_0^{012} en base a las consideraciones anteriores, las ecuaciones matriciales (15) (16) (17) y (18) corresponden a doce ecuaciones escalares, de las cuales se deducen tres circuitos equivalentes, uno para cada secuencia, independientes entre sí, los cuales se detallan a continuación:

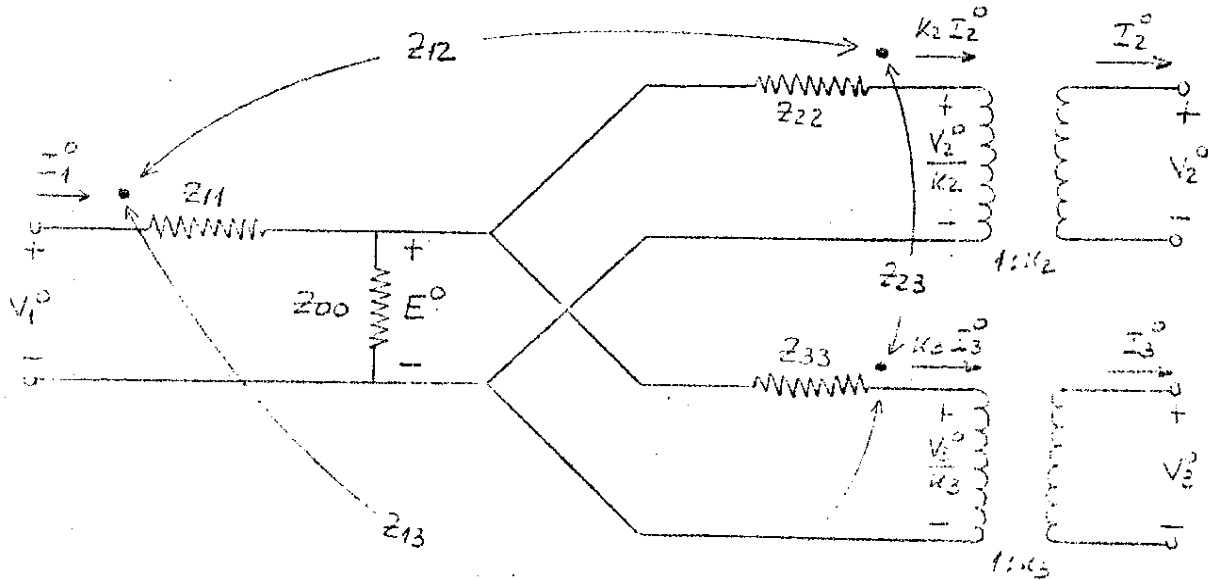


Fig.21: Circuito Equivalente de Secuencia Cero

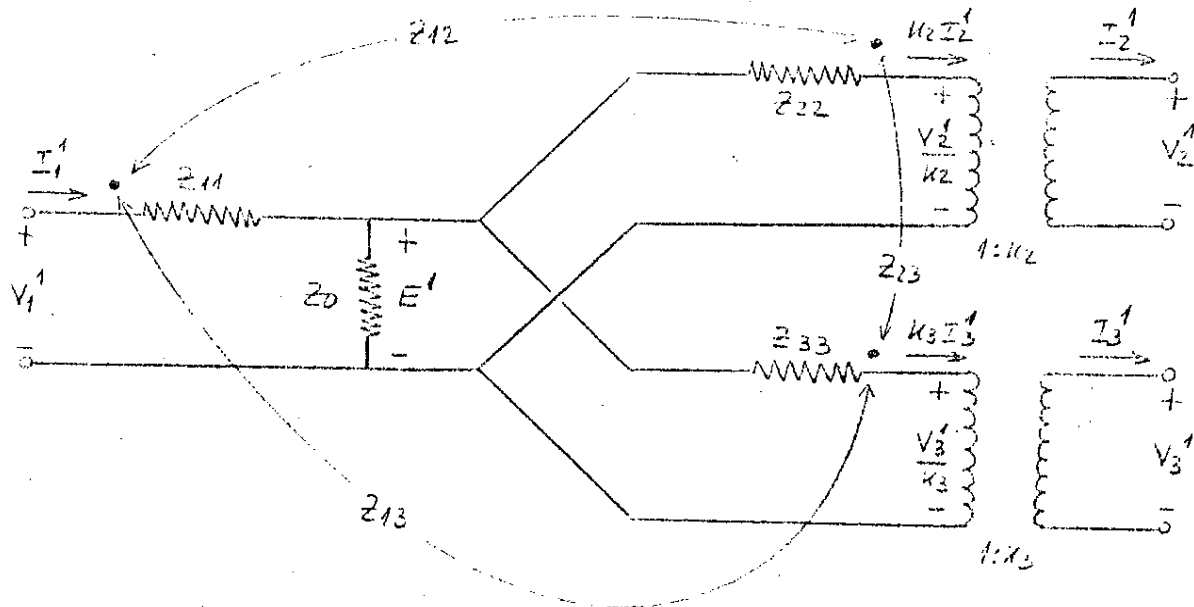


Fig.22: Circuito Equivalente de Secuencia Positiva

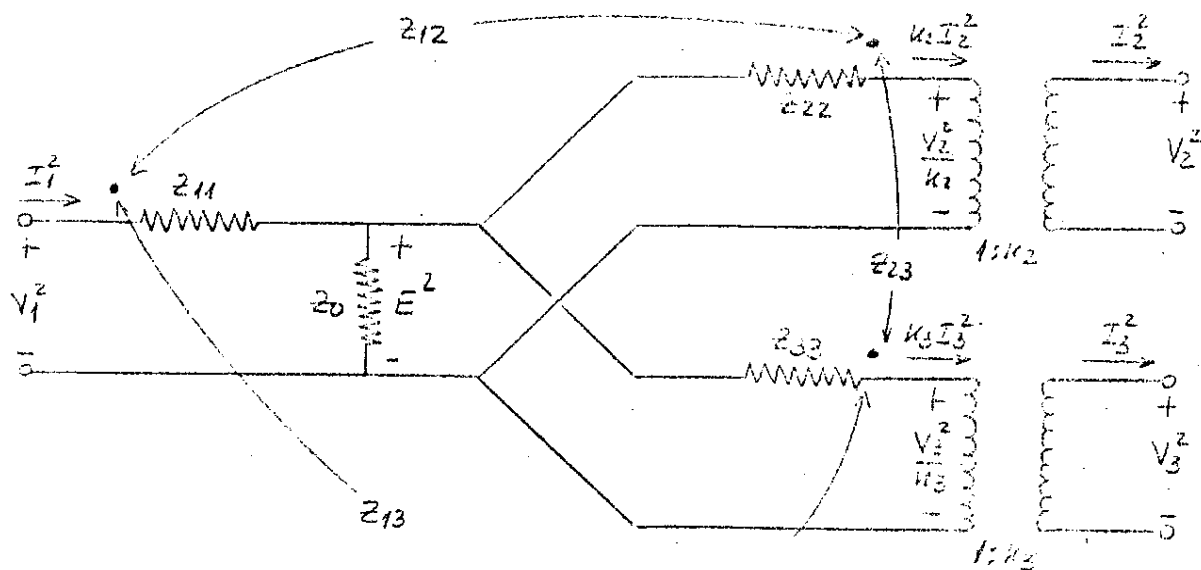
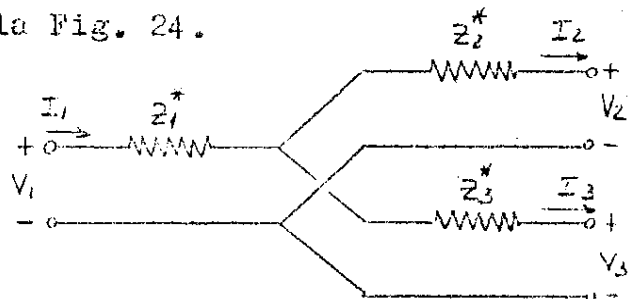


Fig.23: Circuito Equivalente de Secuencia Negativa

CONSIDERACIONES PRACTICAS: Si despreciamos, en los circuitos de las Fig. 21, 22 y 23 las impedancias magnetizantes, se pueden eliminar las mutuas, resultando para los tres casos el circuito equivalente que se muestra en la Fig. 24.



$$Z_1^* = Z_{11} + Z_{23} - Z_{12} - Z_{13}$$

$$Z_2^* = Z_{22} + Z_{13} - Z_{12} - Z_{23}$$

$$Z_3^* = Z_{33} + Z_{12} - Z_{13} - Z_{23}$$

Fig.24

A efectos prácticos, inspirado en lo anterior, en la mayoría de los casos se utiliza como circuito equivalente una estrella formada por tres impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 , según se detalla en la Fig. 25.

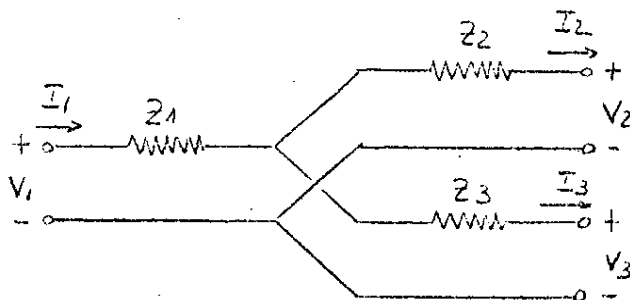


Fig.25

Los valores de dichas impedancias se obtienen a partir de las impedancias vistas en los tres ensayos de secuencia directa que se detallan a continuación:

- 1) Z_{v12} , Impedancia vista desde el Primario con el Secundario en cortocircuito y el Terciario en vacío.
- 2) Z_{v23} , Impedancia vista desde el Secundario con el Terciario en cortocircuito y el Primario en vacío.
- 3) Z_{v31} , Impedancia vista desde el Terciario con el Primario en cortocircuito y el Secundario en vacío.

De acuerdo al esquema de la Fig.25, adoptado para el circuito equivalente será:

$$Z_{v12} = Z_1 + Z_2 \quad Z_{v23} = Z_2 + Z_3 \quad Z_{v31} = Z_3 + Z_1$$

de donde se deducen:

$$Z_1 = \frac{1}{2} (Z_{v12} + Z_{v31} - Z_{v23})$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} (Z_{v12} + Z_{v23} - Z_{v31})$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} (Z_{v23} + Z_{v31} - Z_{v12})$$

Las impedancias Z_{v12} Z_{v23} y Z_{v31} pueden calcularse en el circuito equivalente exacto de la Fig.22, resultando:

$$Z_{v12} = Z_{11} - Z_{12} + \frac{(Z_0 + Z_{12})}{(Z_0 + Z_{22})} (Z_{22} - Z_{12}) \quad Z_{v23} = Z_{22} - Z_{23} + \frac{(Z_0 + Z_{23})}{(Z_0 + Z_{33})} (Z_{33} - Z_{23})$$

$$Z_{v31} = Z_{33} - Z_{13} + \frac{(Z_0 + Z_{13})}{(Z_0 + Z_{11})} (Z_{11} - Z_{13})$$

Estos últimos resultados, en conjunto con las expresiones de Z_1 Z_2 y Z_3 en función de Z_{v12} , Z_{v31} y Z_{v23} , nos muestran que estrictamente los valores de Z_1 Z_2 y Z_3 dependen de todos los parámetros del circuito equivalente exacto, incluyendo la impedancia magnetizante, y como consecuencia de ello no tiene sentido pretender interpretar cada una de estas impedancias como las impedancias de dispersión de cada devanado, e incluso para determinadas disposiciones físicas de los mismos pueden resultar en Z_1 Z_2 y Z_3 resistencias y reactancias negativas.

4.4 ECUACIONES de CONEXIONADO

4.4.1 Conexión en Estrella

En la Fig.26 se muestra la conexión de tres bobinas, una de cada fase, para formar un arrollamiento en estrella.

Las ecuaciones que describen esta conexión pueden expresarse por medio de la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc \\ V_i \end{bmatrix} + z_{\phi} \begin{bmatrix} U_3 \\ I_i \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ai} \\ V_{bi} \\ V_{ci} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ai} \\ V_{bi} \\ V_{ci} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} abc \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ai} \\ I_{bi} \\ I_{ci} \end{bmatrix}$$

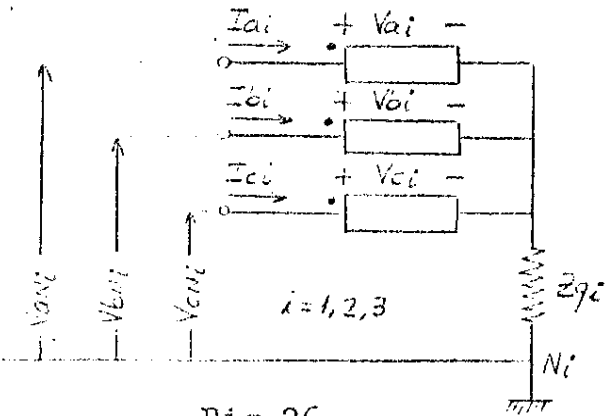


Fig.26

Si a la ecuación anterior le aplicamos la Transformación de Fortescue, premultiplicando ambos miembros por $\begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix}$, resultan las ecuaciones de la conexión en estrella en Componentes Simétricas:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ V_i \end{bmatrix} + z_{\phi} \begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ T_F \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ I_i \end{bmatrix}$$

siendo:

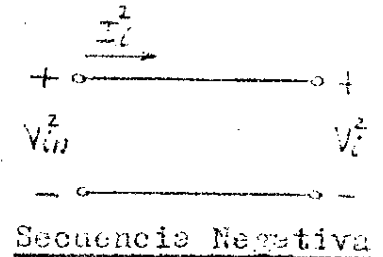
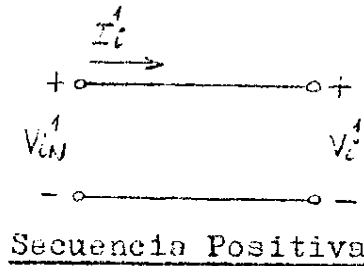
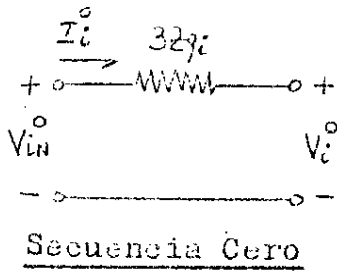
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ V_{iN} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ V_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ I_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ I_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_i \end{bmatrix} + z_{\phi} \begin{bmatrix} -1 \\ T_F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ I_i \end{bmatrix}$$

Operando, la ecuación en forma desarrollada se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ V_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z_{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ I_i \end{bmatrix}$$

De las tres ecuaciones escalares que se deducen de la ecuación matricial anterior, surgen los tres circuitos equivalentes que se dan a continuación:



4.4.2 Conexión en Triángulo

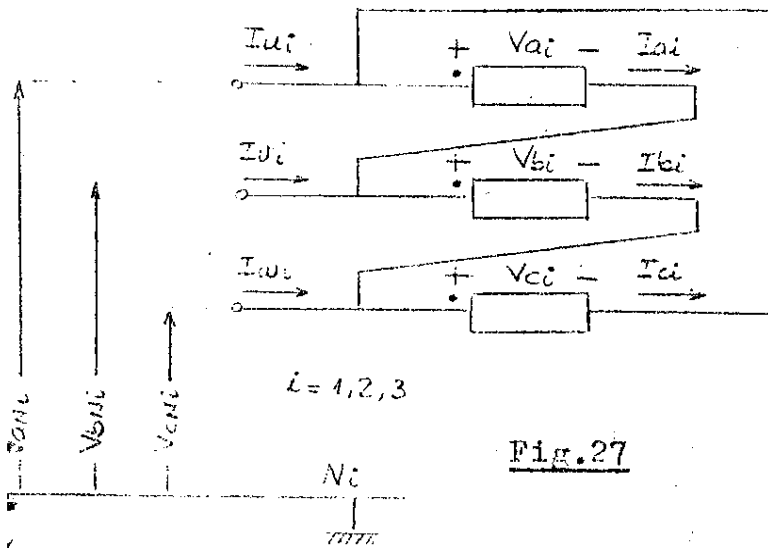


Fig.27

En la Fig.27 se muestra la conexión de tres bobinas, una de cada fase, para formar un arrollamiento en triángulo.

Las ecuaciones que describen esta conexión se pueden expresar en forma compacta por medio de las dos ecuaciones matriciales que se dan a continuación:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ V_{in} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} uvw \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_\Delta^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} abc \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ai} \\ V_{bi} \\ V_{ci} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} abc \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ai} \\ I_{bi} \\ I_{ci} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} uvw \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ai} \\ I_{bi} \\ I_{ci} \end{bmatrix}$$

Si aplicamos a las ecuaciones anteriores la Transformación de Fortescue, premultiplicando ambos miembros de cada ecuación por $\begin{bmatrix} T_F^{-1} \end{bmatrix}$, resultarán las ecuaciones de la conexión en triángulo en Componentes Simétricas:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/c \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} T_\Delta \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/c \\ V_{iN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u/w \\ I_{i\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} T_\Delta^t \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/c \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{iN} \\ V_{iN} \\ V_{iN}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} V_{iN} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/c \\ V_{iN} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ V_i \\ V_i \\ V_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} V_i = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/c \\ V_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{i\lambda} \\ I_{i\lambda} \\ I_{i\lambda}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} I_{i\lambda} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u/w \\ I_{i\lambda} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ I_{i\Delta} \\ I_{i\Delta} \\ I_{i\Delta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} I_{i\Delta} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/c \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix}$$

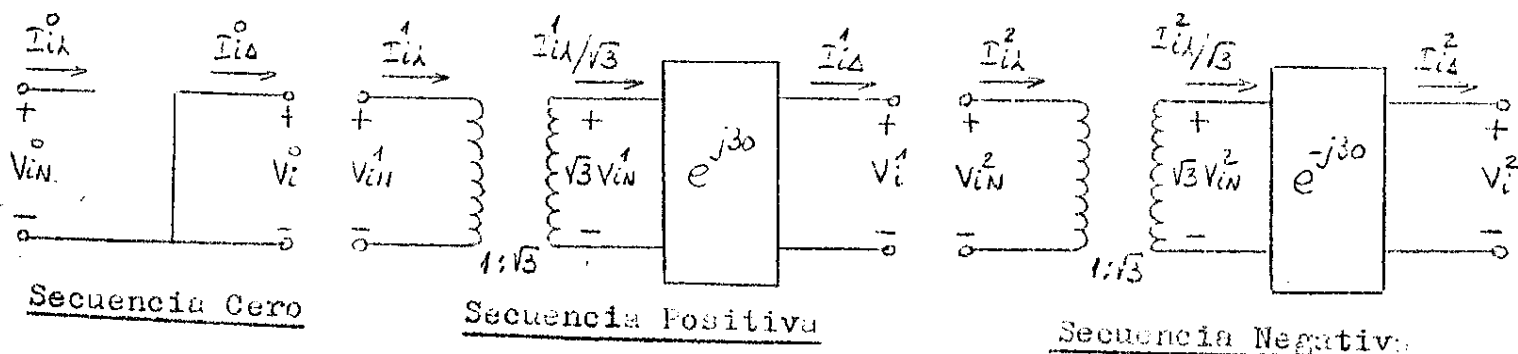
Por lo tanto: $\begin{bmatrix} 0 \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} T_\Delta \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_{iN} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_{i\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ T_F \end{bmatrix} T_\Delta^t \begin{bmatrix} T_F \\ T_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{i\Delta} \end{bmatrix}$$

Operando, las ecuaciones anteriores en forma desarrollada se reducen a:

$$\begin{bmatrix} V_i^0 \\ V_i^1 \\ V_i^2 \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{j3\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j3\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{iN} \\ V_{iN} \\ V_{iN} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ I_{i\lambda}^1 \\ I_{i\lambda}^2 \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j3\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j3\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{i\Delta}^0 \\ I_{i\Delta}^1 \\ I_{i\Delta}^2 \end{bmatrix}$$

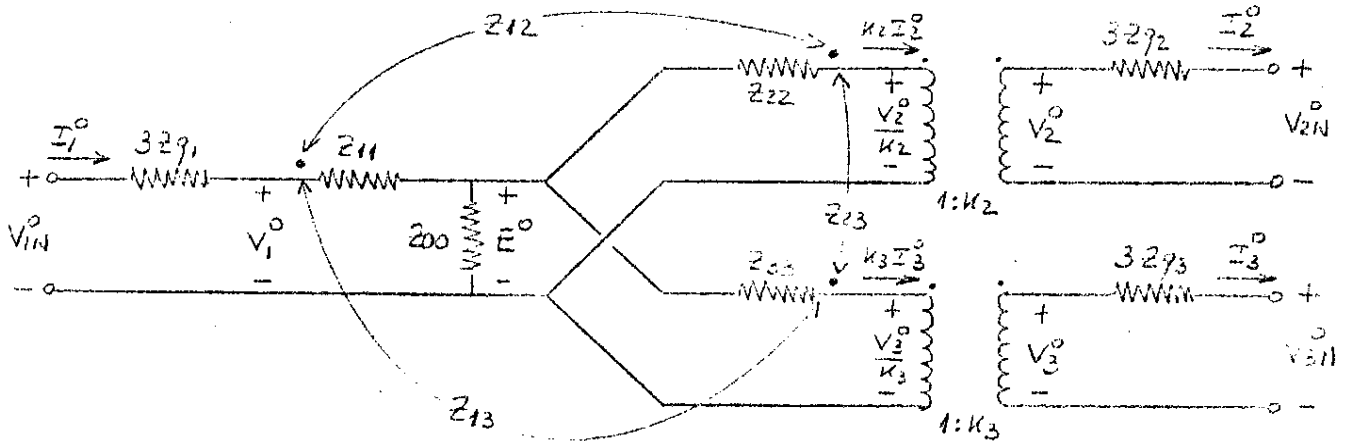
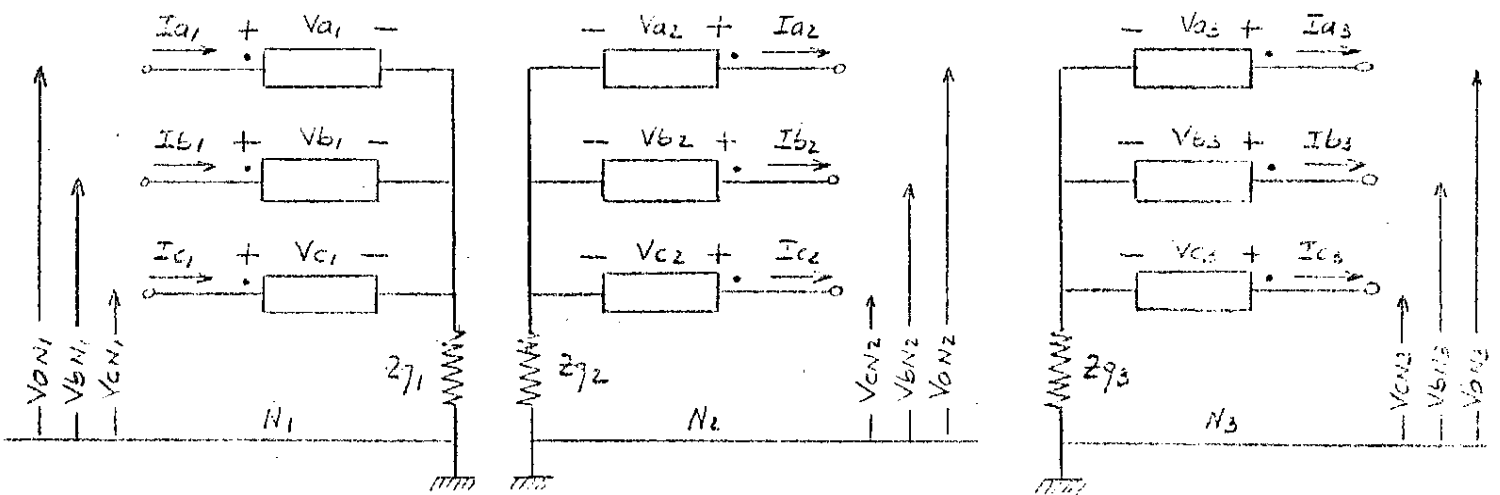
Interpretando las ecuaciones anteriores, se deducen los tres circuitos equivalentes que se dan a continuación:



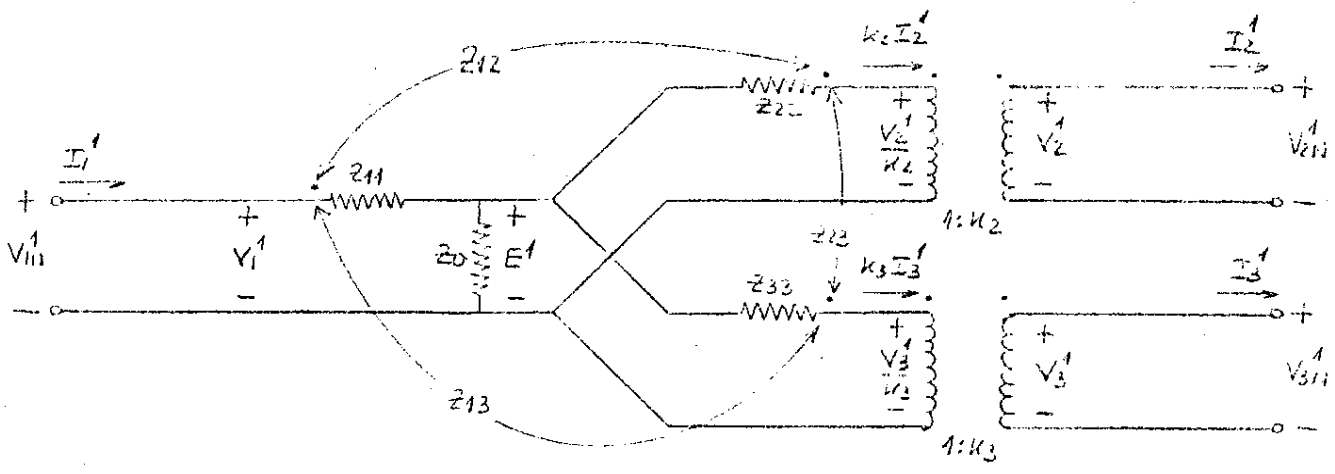
4.5 CIRCUITOS EQUIVALENTES en COMPONENTES SIMÉTRICAS

Combinando los circuitos equivalentes de las Figuras 21, 22 y 23, que representan al transformador trifásico de tres arrollamientos independientemente del tipo de conexión de sus bobinados, con los obtenidos en 4.4.1 para la Conexión en Estrella y en 4.4.2 para la Conexión en Triángulo se obtendrán los circuitos equivalentes en Componentes Simétricas para los siguientes casos: a) Conexión Estrella-Estrella-Estrella
 b) Conexión Estrella-Estrella-Triángulo
 c) Conexión Estrella-Triángulo-Triángulo

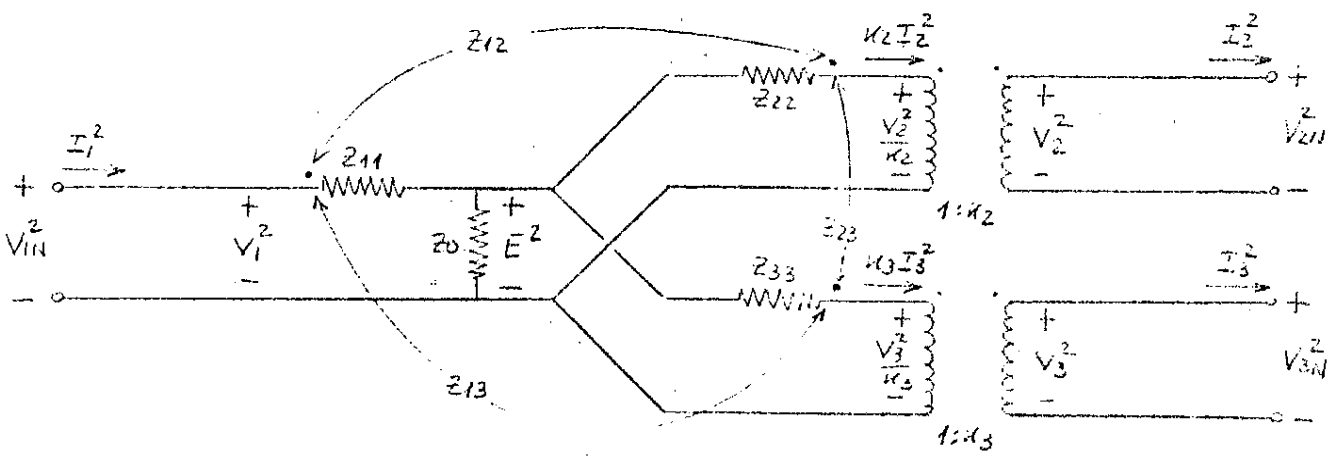
4.5.1 Conexión Estrella-Estrella-Estrella



Secuencia Cero

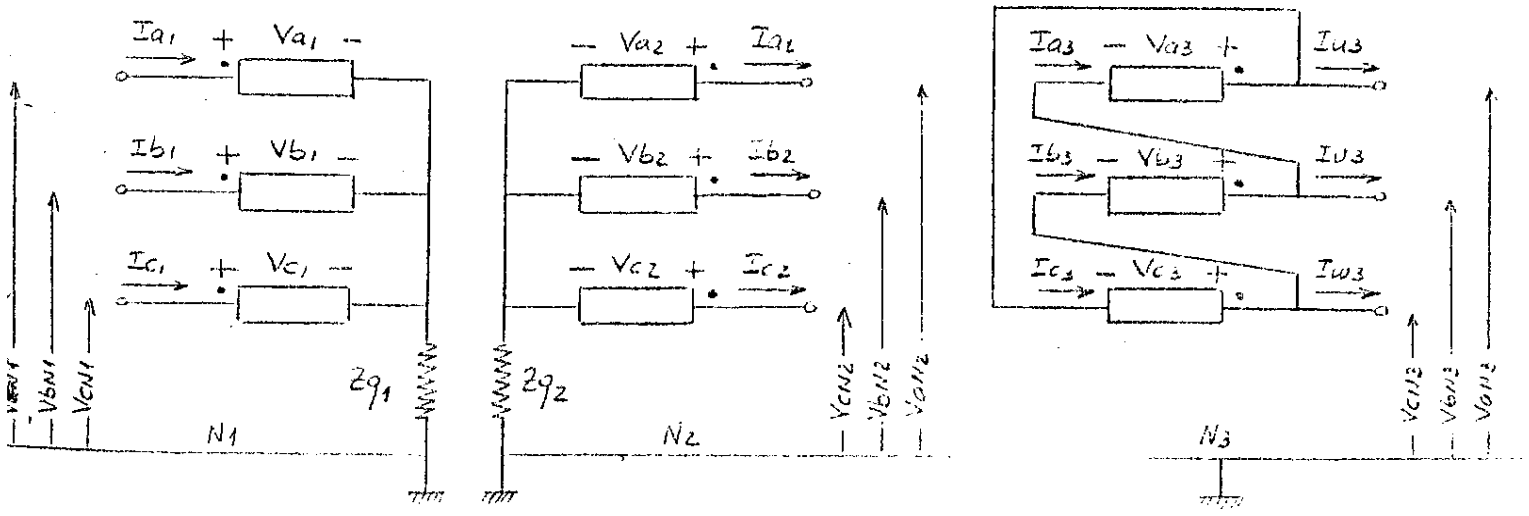


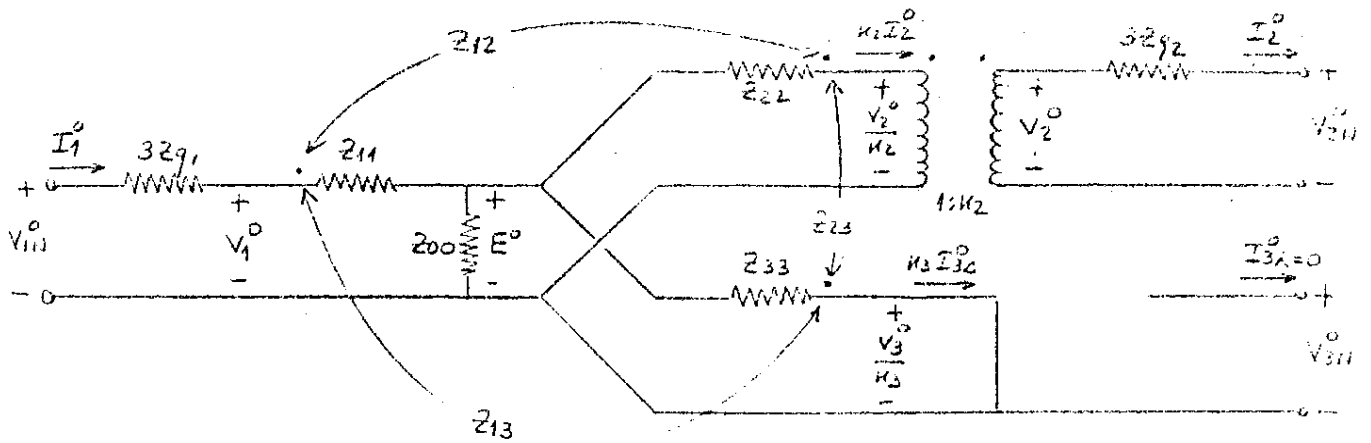
Secuencia Positiva



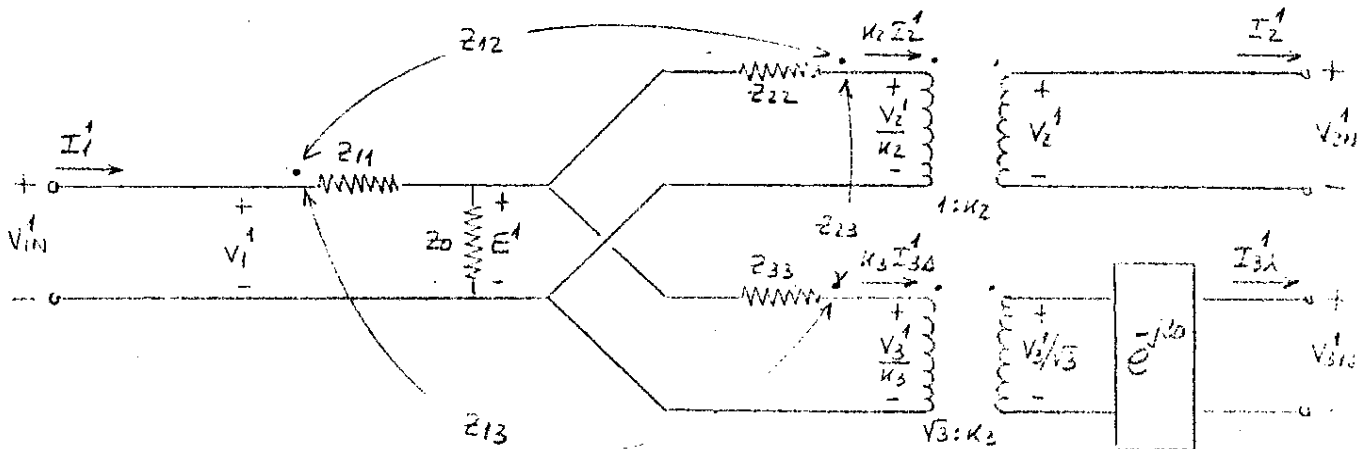
Secuencia Negativa

4.5.2 Conexión Estrella-Estrella-Triángulo

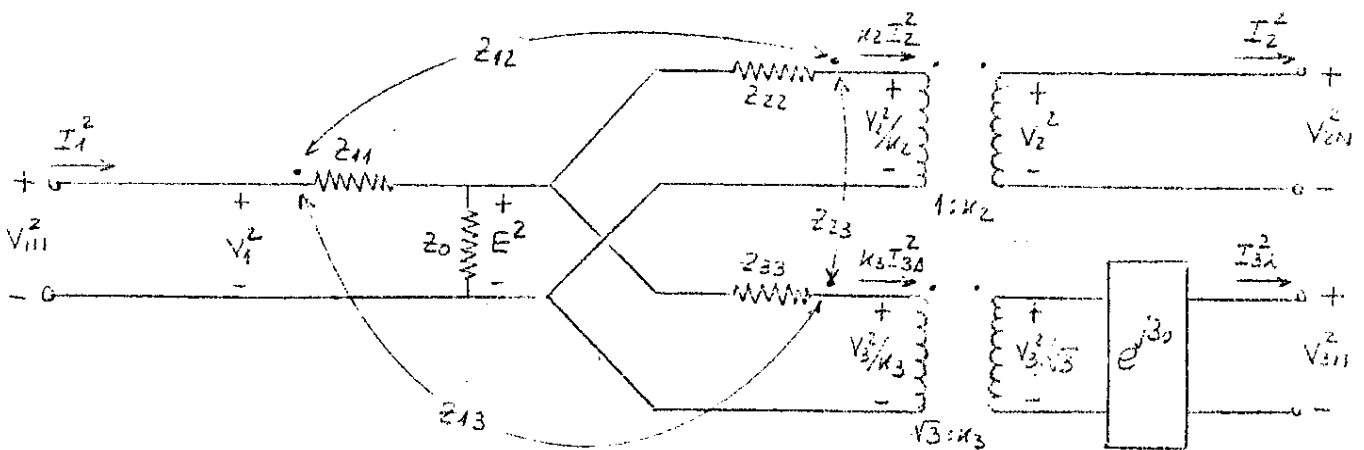




Secuencia Cero



Secuencia Positiva



Secuencia Negativa

EJEMPLO: (Datos obtenidos en Ensayos de Fábrica de un Transformador Strömberg)

Transformador Trifásico de Tres Arrollamientos - Núcleo de Tres Columnas
 Conexión Estrella-Estrella-Triángulo 25/20/10 MVA 150/66/31.5 KV

Impedancias de Neutro: $Z_{g1} = Z_{g2} = 0$

Ensayos de Cortocircuito excitando con Secuencia Positiva:

$Z_{v12} = 2.8 + j84.6 (\Omega)$ $Z_{v13} = 9.0 + j196.9 (\Omega)$ $Z_{v23} = 10.1 + j294.3 (\Omega)$

Impedancias Homopolares:

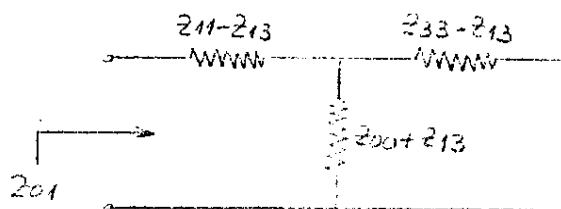
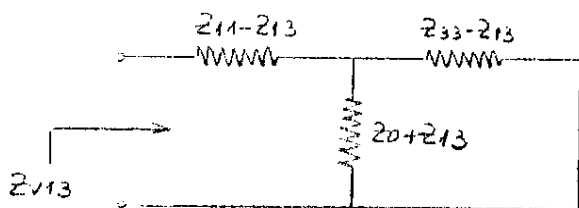
a) Excitando desde el Primario con el Secundario Abierto:

$Z_{01} = 7.9 + j188.1 (\Omega)$

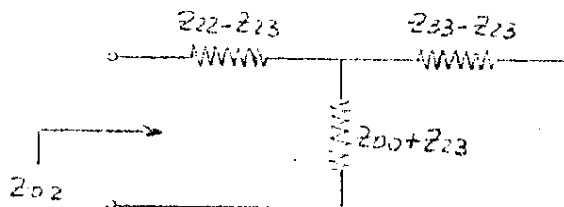
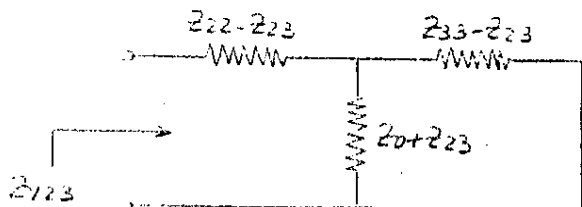
b) Excitando desde el Secundario con el Primario Abierto:

$Z_{02} = 9.3 + j283.5 (\Omega)$

1.- Comparación entre Z_{v13} y Z_{01}



2.- Comparación entre Z_{v23} y Z_{02}

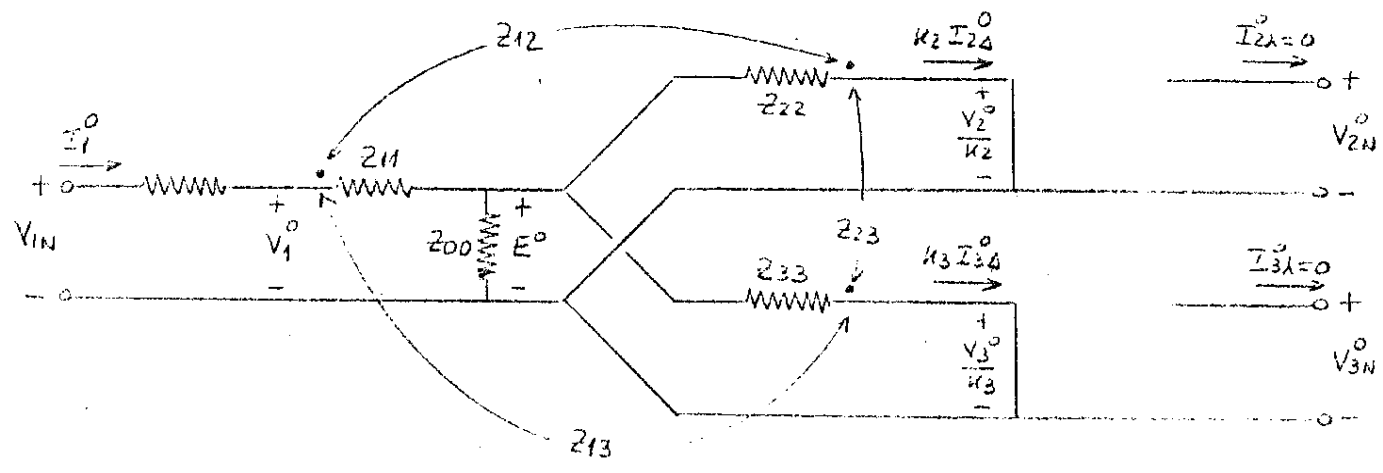
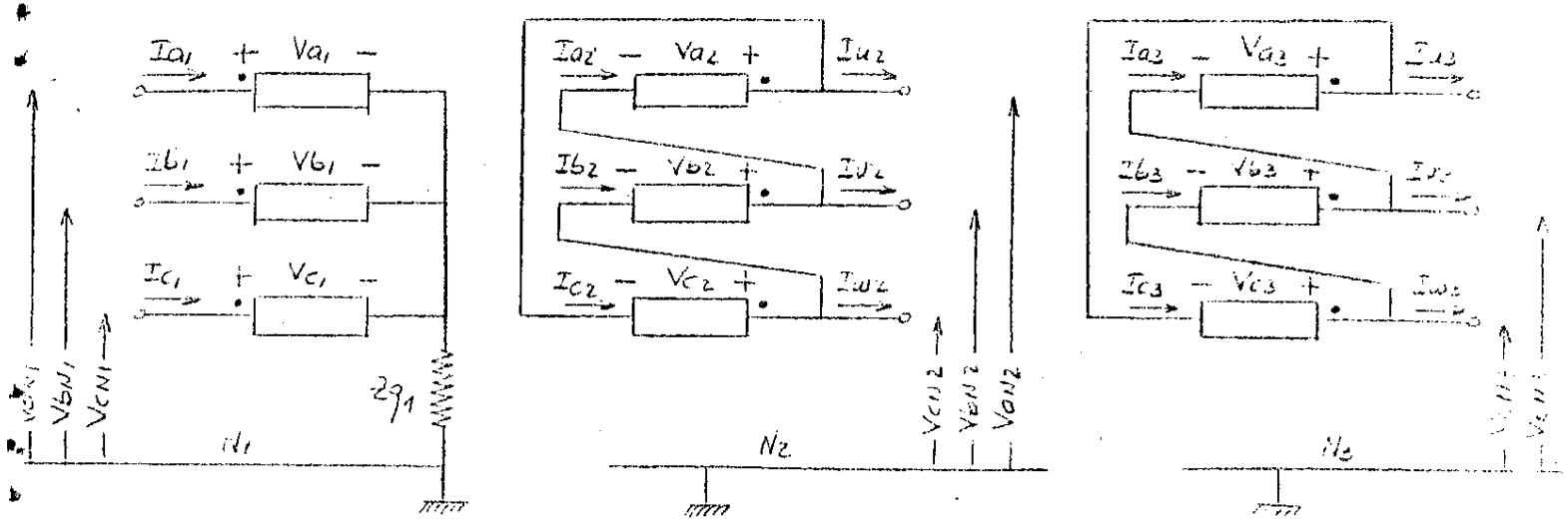


En ambos casos, debido a que para el núcleo plano de tres columnas se verifica que $|Z_{00}| \ll |Z_0|$ resulta:

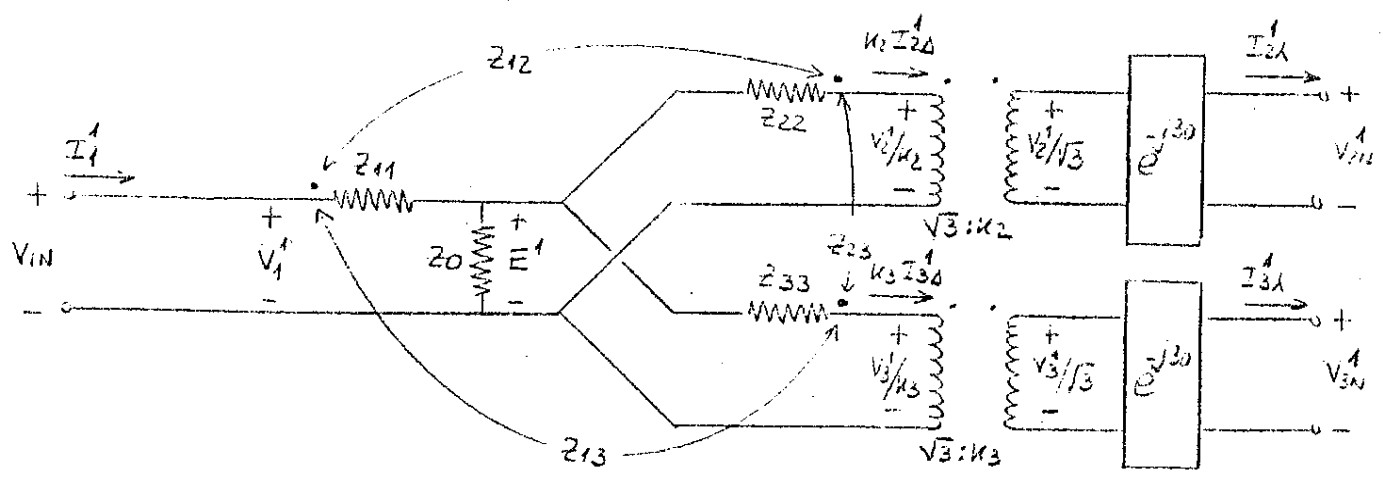
$|Z_{01}| < |Z_{v13}|$

$|Z_{02}| < |Z_{v23}|$

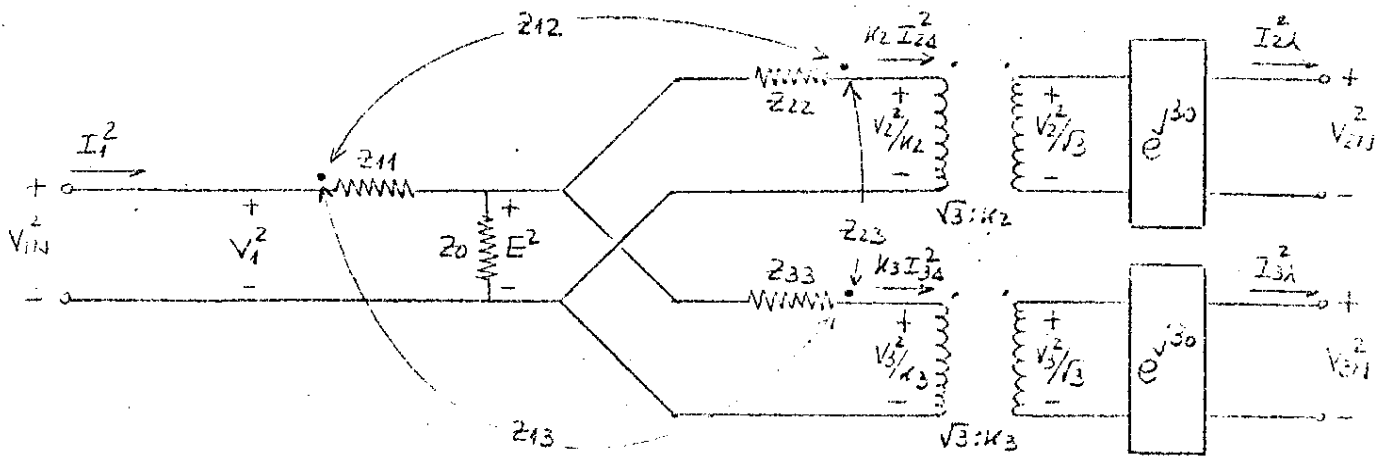
4.5.3 Conexión Estrella-Triángulo-Triángulo



Secuencia Cero



Secuencia Positiva



Secuencia Negativa

5. APLICACION: ANALISIS de la CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA con CARGA MONOFASICA

Se considera el circuito de la Fig.28, constituido por un generador ideal de secuencia positiva, un transformador trifásico de dos arrollamientos estrella-estrella con neutro a tierra en el secundario, y una carga monofásica Z conectada entre una fase del secundario y tierra.

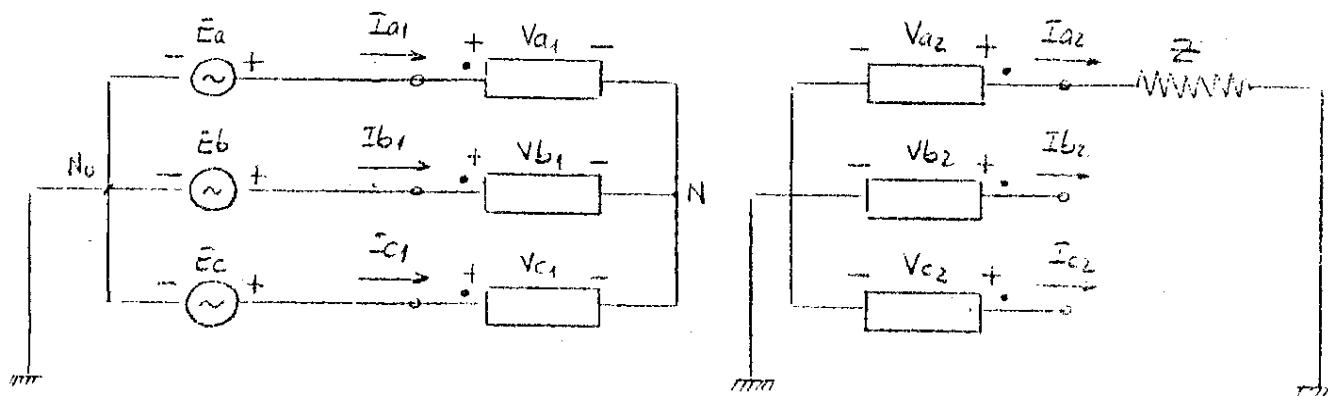


Fig.28

Calcularemos las tensiones y corrientes de fase del transformador en estado de régimen.

Las ecuaciones que resultan de las conexiones en el primario del transformador son:

$$E_a = V_{a1} + V_{NN_0} \quad E_b = V_{b1} + V_{NN_0} \quad E_c = V_{c1} + V_{NN_0} \quad I_a + I_b + I_c = 0$$

y en Componentes Simétricas se tiene:

$$E^1 = V_1^1 \quad 0 = V_1^2 \quad 0 = V_1^0 + V_{NN_0} \quad I_1^0 = 0$$

Las ecuaciones del conexionado del secundario son:

$$V_{a2} = Z I_{a2} \quad I_{b2} = 0 \quad I_{c2} = 0$$

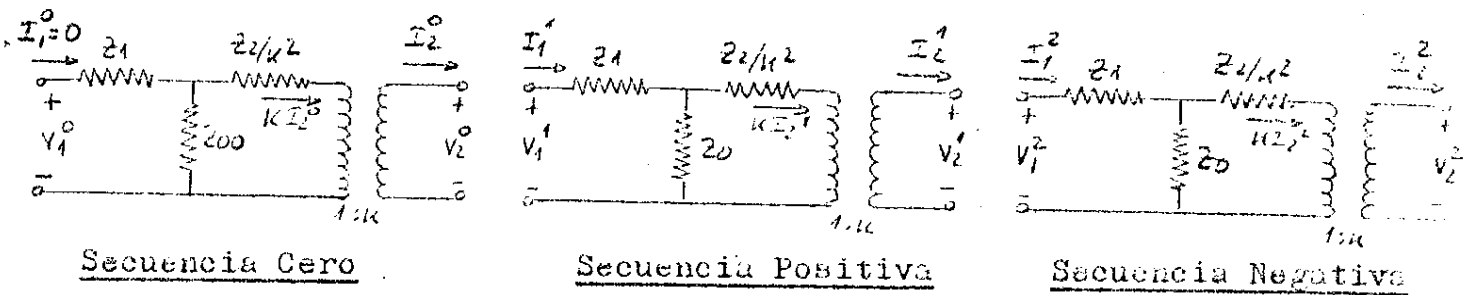
y en Componentes Simétricas se tiene:

$$I_2^0 = I_2^1 = I_2^2 \quad V_2^0 + V_2^1 + V_2^2 = Z (3 I_2^0)$$

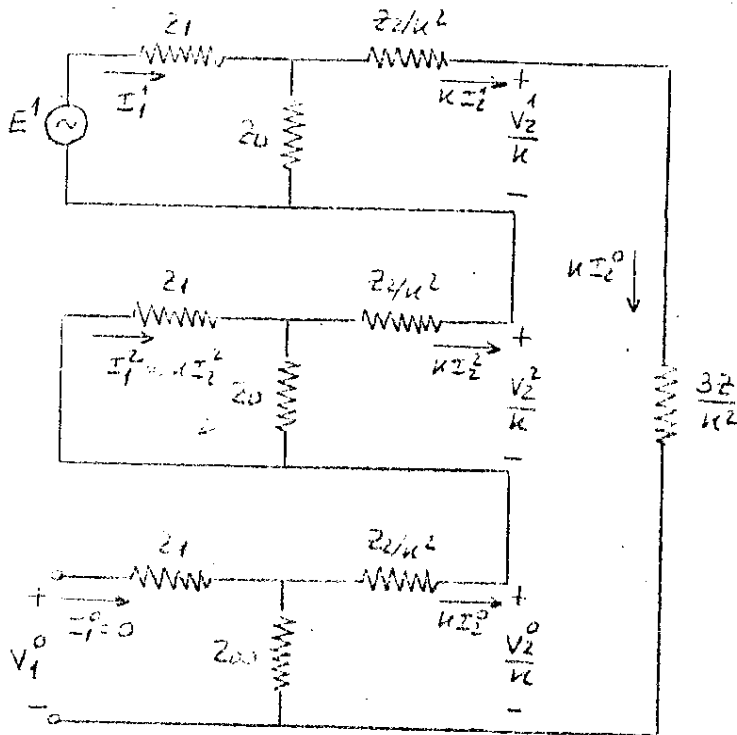
Multiplicando y dividiendo convenientemente por la relación de transformación K, las relaciones anteriores referidas al primario serán:

$$K I_2^0 = K I_2^1 = K I_2^2 \quad \frac{V_2^0}{K} + \frac{V_2^1}{K} + \frac{V_2^2}{K} = 3 \frac{Z}{K^2} (K I_2^0)$$

Según lo analizado en 3.1 para la conexión estrella-estrella los circuitos equivalentes del transformador a las distintas secuencias serán:



De acuerdo a las ecuaciones de conexonado en componentes simétricas el cálculo de las corrientes y tensiones se puede realizar en el circuito referido al primario que se indica a continuación:



$$E^1 = z_1 I_1^1 + z_0 (I_1^1 - k I_2^0)$$

$$E^1 = z_1 I_1^1 + z' (k I_2^0)$$

siendo: $z' = z_1 + z_0 + \frac{z_0}{k^2} (z_1 + z_2)$

Resolviendo el sistema resulta;

$$I_1^1 = \frac{z_0 + z'}{z_1 z' + z_0 z' + z_1 z_0} E^1$$

$$k I_2^0 = \frac{z_0}{z_1 z' + z_0 z' + z_1 z_0} E^1$$

Como además:

$$I_1^0 = 0 \quad I_1^2 = k I_2^0$$

$$k I_2^0 = k I_2^1 = k I_2^2$$

Aplicando la inversa de la Transformación de Fortescue podemos deducir las corrientes del primario y secundario del transformador en Componentes de Fase:

$$I_{a1} = \frac{(z' + z_0) + \frac{z_0^2}{z_1 + z_0}}{z_1 z' + z_0 z' + z_1 z_0} E^1$$

$$I_{b1} = \frac{a^2 (z' + z_0) + a \frac{z_0^2}{z_1 + z_0}}{z_1 z' + z_0 z' + z_1 z_0}$$

$$I_{c1} = \frac{a (z' + z_0) + a^2 \frac{z_0^2}{z_1 + z_0}}{z_1 z' + z_0 z' + z_1 z_0}$$

$$k I_{a2} = \frac{3 z_0}{z_1 z' + z_0 z' + z_1 z_0} E^1$$

$$k I_{b2} = 0 \quad k I_{c2} = 0$$

Las tensiones del primario en Componentes Simétricas son:

$$V_1^1 = E^1 \quad V_1^2 = 0 \quad V_1^0 = -200 \kappa \frac{z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1 = \frac{-200 z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

Como vimos que: $V_{NNO} = -V_1^0$

se deducen en forma inmediata las tensiones del primario en Componentes de Fase:

$$V_{a1} = E_a - V_{NNO} = E^1 + V_1^0 = E^1 - \frac{200 z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

$$V_{b1} = E_b - V_{NNO} = a^2 E^1 + V_1^0 = a^2 E^1 - \frac{200 z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

$$V_{c1} = E_c - V_{NNO} = a E^1 + V_1^0 = a E^1 - \frac{200 z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

Las tensiones del secundario en Componentes de Fase serán:

$$\frac{V_{a2}}{\kappa} = \frac{3z}{\kappa^2} \frac{z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

$$\frac{V_{b2}}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left[(a^2 - 1) z_0 - j \sqrt{3} z_1 + \frac{3a^2}{\kappa^2} (z_1 + z_1') \right] \frac{z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

$$\frac{V_{c2}}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left[(a - 1) z_0 + j \sqrt{3} z_1 + \frac{3a}{\kappa^2} (z_1 + z_1') \right] \frac{z_0}{z_1 z_1' + 20 z_0} E^1$$

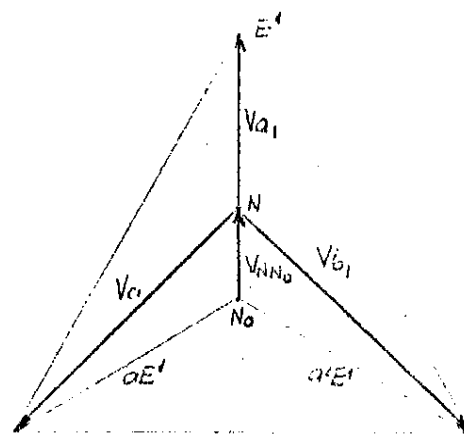
Si consideramos la simplificación de no tener en cuenta la impedancia magnetizante en las redes de secuencia positiva y negativa las corrientes y tensiones en el primario resultan:

$$I_{a1} = \frac{2E^1}{z_1 + z_1'} \quad V_{a1} = \left(1 - \frac{200}{z_1 + z_1'} \right) E^1$$

$$I_{b1} = \frac{-E^1}{z_1 + z_1'} \quad V_{b1} = \left(a^2 - \frac{200}{z_1 + z_1'} \right) E^1$$

$$I_{c1} = \frac{-E^1}{z_1 + z_1'} \quad V_{c1} = \left(a - \frac{200}{z_1 + z_1'} \right) E^1$$

$$V_{NNO} = \frac{200}{z_1 + z_1'} E^1$$



Esquema de tensiones suponiendo todas las impedancias inductivas puras

siendo: $z' = z_1 + \frac{3}{\kappa^2} (z_2 + z) + 200$

Se observa que las tensiones en el primario del transformador presentan un desequilibrio, cuya magnitud veremos que depende del tipo de circuito magnético que se considere.

Si se trata de un Banco de Transformadores o de un Transformador Trifásico Acorazado Z_{00} es igual a Z_0 y se puede suponer que su valor tiende a infinito por lo cual una de las tensiones de fase es prácticamente nula y las otras dos tensiones de fase alcanzan el valor de la tensión compuesta de la fuente independientemente del valor de la impedancia de carga, siendo por tanto completamente inadmisibles el funcionamiento en estas condiciones.

Para el Núcleo Plano de Tres Columnas en cambio, al ser Z_{00} relativamente pequeña, el desequilibrio si bien existe no presenta las características extremas del caso anterior, y es posible conectar entre fase y neutro cargas de hasta 10 a 15% de la nominal sin causar un desplazamiento excesivo del neutro.

Este desequilibrio puede solucionarse si el neutro del primario se conecta al neutro de la fuente con un cuarto conductor o si ambos neutros se conectan a tierra, pues de esta forma las tensiones en el transformador quedan impuestas por la fuente.

Otra forma de disminuir dicho desequilibrio es mediante la inclusión en el transformador de un tercer arrollado de compensación en triángulo según se muestra en la Fig.29.

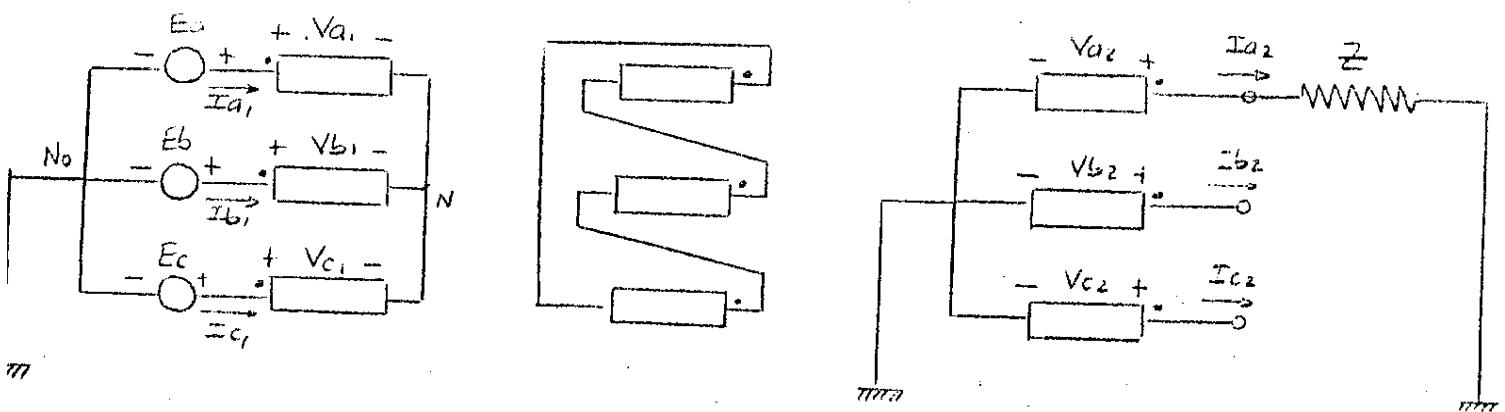
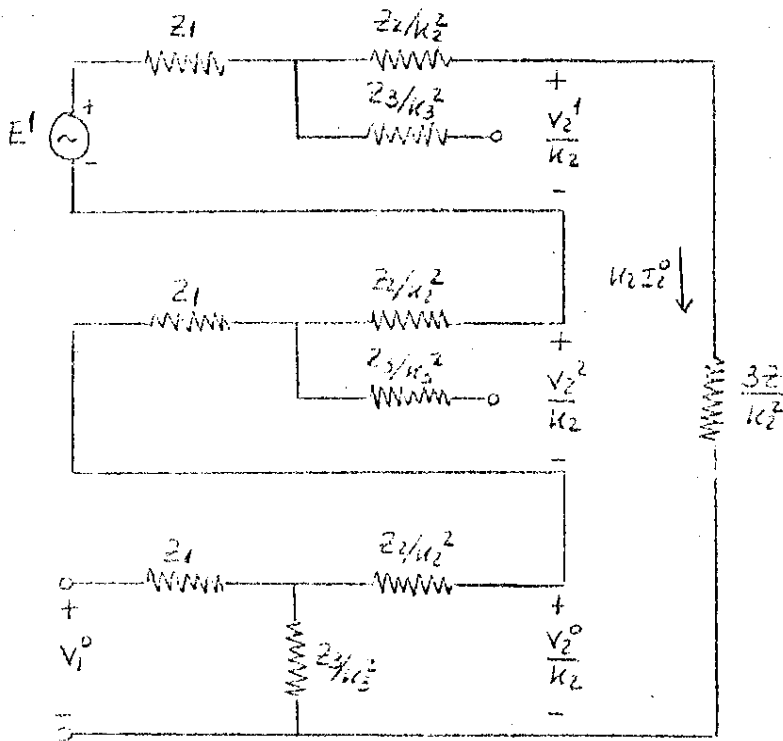


Fig.29

Las ecuaciones que resultan del conexionado en el primario y en el secundario son similares a las planteadas en el caso anterior.

El circuito que permite calcular las corrientes y tensiones de secuencia

se detalla a continuación, en el cual se ha tomado como circuito equivalente del transformador una estrella constituida por tres impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 referidas al primario.



El circuito obtenido es igual al del caso simplificado anterior, salvo que ahora aparece la impedancia Z_3/k_3^2 en lugar de Z_{00} . Se trata de una impedancia de fugas, mucho menor en general que Z_{00} en el caso de núcleo plano de tres columnas, por lo que V_{fuga} es pequeño y como consecuencia el desbalance de tensiones también lo es. Deducimos entonces que la existencia del tercer arrollado en triángulo contribuye a la solución del desequilibrio de las tensiones del transformador.