

Procesos Estocásticos

Juan Pechiar, Instituto de Ingeniería Eléctrica *

Versión 0.9.2, 2010W35

Estos apuntes son únicamente material de apoyo al curso de Muestreo y Procesamiento Digital. No son un sustituto de la bibliografía, ni plantean el tema de manera rigurosa.

1. Introducción

La teoría de procesos estocásticos trata sobre el estudio mediante herramientas estadísticas de señales o procesos que de otra manera resultaría muy difícil, sino imposible, de tratar.

En efecto, casi cualquier sistema de utilidad es diseñado para procesar entradas que no se conocen. Por ejemplo, un sistema para mejorar señales de voz, o para comprimir señales de audio o video, o para quitar el ruido y mejorar la detección de una señal de radar.

Pero que las señales a tratar no se conozcan exactamente, no significa que de ellas no se sepa nada. Las señales de voz, por ejemplo, aunque son siempre distintas, tienen todas un oscilograma reconocible, un ancho de banda que se sabe de antemano, y una distribución de la potencia en las distintas frecuencias conocida.

El estudio de procesos estocásticos formaliza este conocimiento sobre las señales a partir del estudio estadístico de las mismas. De esta manera, veremos que con este conocimiento estadístico alcanza para diseñar y estudiar sistemas que serán alimentados con estas entradas en principio desconocidas.

En la sección 10, se definen los procesos a los que se hace referencia en el resto del texto. Por ejemplo, si en el texto se menciona la señal $x_1[n]$, se trata de la señal definida en el ejemplo 1, página 18.

*Uso interno de Facultad de Ingeniería (UDELAR). Estos apuntes están basados directamente en la publicación “Procesos Estocásticos” por Fernando Paganini, IIE, UDELAR, y han sido adaptados al curso Muestreo y Procesamiento Digital.

2. Definición

Consideraremos señales unidimensionales. Estas definiciones se pueden extender a casos más generales, como imágenes (2 dimensiones: x, y), secuencias de video (3 dimensiones: x, y y t), etc.

Un proceso estocástico es una función de dos variables, $x(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$ (espacio muestral), $t \in T$ (índice temporal). Fijado $t = t_0$, $X_\omega = x(t_0, \omega)$ es una variable aleatoria.

Se puede ver un proceso como una generalización de las variables aleatorias. Para cada experimento (elección de ω), en vez de tener un número, se obtiene una función de t .

La probabilidad con que ocurre un cierto experimento está dada por una función de probabilidad habitual: a cada elemento del sigma álgebra (es decir, a cada conjunto de elementos ω) le corresponde una probabilidad de ocurrencia (recordar $P : \sigma_\Omega \rightarrow [0, 1]$).

El índice temporal t puede ser discreto ($T = N$ o $T = Z$), o continuo ($T = R$).

Notación: rara vez se hace referencia explícita a ω . Además, aún cuando se trata de una variable aleatoria, el nombre de una señal aleatoria generalmente se escribe en minúsculas para no ser confundido con una transformada. Por lo tanto, la notación usual será igual que para señales: $x[n]$ o $x(t)$.

Ejemplo 1 *La señal $x_1[n]$ es un proceso en tiempo discreto. El acrónimo IID significa “independiente, idénticamente distribuido”, y quiere decir que $x_1[n]$ y $x_1[m]$ son independientes para n y m distintos.*

Fijando ω , se obtiene una secuencia (fija) con valores 1 y -1. Al ser elegidos todos en forma independiente, y por la ley débil de los grandes números, $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[k] = 1 \cdot 1/2 + (-1) \cdot 1/2 = 0$. Esto ocurre más allá de que la cantidad de 1s y -1s en un tramo de señal sea generalmente distinta.

Fijando n , se obtiene una variable aleatoria discreta (sólo toma valores 1 y -1), como si se tirase una moneda.

2.1. Procesos Estacionarios en sentido estricto

Intuitivamente, un proceso estacionario es aquel que, a lo largo del tiempo, mantiene sus características estadísticas. Por ejemplo, si se sintoniza un receptor de FM en un canal libre, se oye un ruido de fondo. Ese ruido de fondo *suenan siempre igual*. No cambia de volumen ni de sonido con el tiempo, ni a lo largo del día.

Un ejemplo de proceso no estacionario sería la temperatura ambiente en Uruguay. Sabemos bien que la temperatura promedio en verano es distinta

a la temperatura promedio en invierno. Esta correlación entre la fecha y, en este caso, el promedio de temperatura, sugiere la no estacionariedad del proceso.

La señal $x_5[n]$ es claramente no estacionaria, ya que para $n < 0$, tiene propiedades muy distintas que para $n \geq 0$. Lo mismo ocurre con la señal $x_7(t)$, que siempre vale 1 en $t = 0$ (para $t = 0$ toma un valor determinístico, no así para $t \neq 0$).

Las secuencias IID son estacionarias. No existe, por construcción, relación alguna entre el valor particular de n , y la forma en que se elige $x[n]$.

$x_6(t)$ es otro caso de señal estacionaria, donde no existe dependencia con el tiempo.

Formalmente, dado un grupo de instantes t_1, \dots, t_N , obtenemos N variables aleatorias $X_{t_i} = x(t_i, \omega)$. Estas variables aleatorias tienen una distribución conjunta F_{t_1, \dots, t_N} (familia de distribuciones finitodimensionales del proceso):

$$F_{t_1, \dots, t_N}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq \alpha_1, \dots, X_{t_N} \leq \alpha_N) \quad (1)$$

F es una función de N variables, con N parámetros (t_i), y se define para todo natural N . Conociendo la familia entera F , podríamos calcular muchos parámetros estadísticos del proceso (en el caso discreto, F determina la probabilidad de cualquier conjunto de interés).

Si trasladamos el grupo de instantes un tiempo τ , tendremos una nueva distribución conjunta $F_{t_1+\tau, \dots, t_N+\tau}$. Si para toda elección de τ , obtenemos la misma distribución conjunta, el proceso se dice *estrictamente estacionario*:

$$x \text{ estrictamente estacionario} \iff F_{t_1, \dots, t_N} = F_{t_1+\tau, \dots, t_N+\tau} \quad \forall \tau \in T, N, t_i$$

Es decir, nuestra estadística dependerá únicamente de la separación entre los distintos instantes considerados, pero será invariante frente a una traslación de todos ellos.

Un proceso estacionario tiene valor esperado constante: $F_{t_1}(\alpha)$ es independiente de t_1 , y alcanza para calcular la esperanza, por lo cual $\mathbb{E}(x(t)) = m$ constante.

Ejemplo 2 Consideremos la señal $x_1[n]$, que es una secuencia IID con valores ± 1 equiprobables.

Para cada valor de n , por definición $x_1[n]$ toma un valor que es independiente de los demás valores de la secuencia. Además, la elección de $x_1[n]$ no tiene ninguna dependencia con n . Por lo tanto, se trata de un proceso estacionario. Calculemos ahora $\mathbb{E}(x_1[n])$ y $\mathbb{E}(x_1[n]^2)$:

$$\mathbb{E}(x_1[n]) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbb{E}(x_1[n]^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Efectivamente, la esperanza y la potencia de nuestro proceso, que son dos parámetros que se deducen de (1) (con $N = 1$ y $t_1 = n$), dan iguales para cualquier elección de n .

El valor $P_x = \mathbb{E}(x[n]^2)$ se llama *potencia*, y se relaciona con la varianza de la siguiente forma:

$$\sigma_x^2[n] = P_x - \mathbb{E}(x[n])^2$$

Los procesos estacionarios al tener potencia constante tienen energía infinita (con probabilidad 1). Esto significa que cualquier proceso de energía finita no puede ser estacionario.

Por ejemplo, la forma de onda generada por cualquier sistema pasivo luego de su excitación. El sonido de un golpe.

Ejemplo 3 *Veamos qué pasa ahora con un proceso no estacionario. Si alimentamos, para tiempos positivos, un acumulador con la señal x_1 , obtenemos la señal x_{11} . Calculemos esperanza y potencia:*

$$\mathbb{E}(x_{11}[n]) = \mathbb{E}(x_{11}[n-1]) + \mathbb{E}(x_1[n]) = \mathbb{E}(x_{11}[n-1]) + 0$$

como $\mathbb{E}(x_{11}[0]) = 0$ por definición, entonces $\mathbb{E}(x_{11}[n]) = 0$.

$$\mathbb{E}(x_{11}[n]^2) = \mathbb{E}(x_{11}[n-1]^2) + 2\mathbb{E}(x_{11}[n-1]x_1[n]) + \mathbb{E}(x_1[n]^2) =$$

$$\mathbb{E}(x_{11}[n-1]^2) + 2\mathbb{E}(x_{11}[n-1])\mathbb{E}(x_1[n]) + 1 = \mathbb{E}(x_{11}[n-1]^2) + 1$$

Al ser, por definición, $\mathbb{E}(x_1[0]^2) = 0$, entonces $\mathbb{E}(x_1[n]^2) = n$. Vemos que ahora la potencia depende del tiempo, por lo cual x_{11} debe ser no estacionario.

Se verá luego que un proceso estacionario a través de un filtro estable da otro proceso estacionario. Con los filtros inestables, como se pudo ver en el último ejemplo, se puede obtener un proceso no estacionario. Este efecto es de esperarse, ya que la salida de filtros inestables tiende a diverger.

3. Autocorrelación

Fijando t , obtenemos una variable aleatoria que indica cómo se comporta instantáneamente el proceso.

Para estudiar cómo evoluciona el proceso de un instante a otro, se define la autocorrelación.

Dado un proceso $x(t)$ con momento de segundo orden finito ($\mathbb{E}(x(t)^2) < \infty$), la *autocorrelación* del proceso se define como¹

$$r_x(t, s) = \mathbb{E}(x(t)x(s)) \quad (2)$$

Si el proceso es *estrictamente estacionario*, además de la esperanza ser una constante m , se puede restar s a los dos instantes considerados y se obtiene:

$$r_x(t, s) = r_x(t - s, 0) = \mathbb{E}(x(t - s)x(0)) = R_x(t - s) \quad (3)$$

Es decir, la autocorrelación sólo depende de $t - s$, la distancia entre los dos instantes.

Salvo en casos triviales, es difícil determinar si un proceso es estrictamente estacionario. Sin embargo, muchas herramientas para el estudio de procesos sólo requieren que se cumplan las condiciones de estacionariedad en los momentos de primer y segundo orden, es decir, que la esperanza sea constante, y la autocorrelación dependa de la distancia entre instantes.

3.1. Estacionariedad en sentido amplio

Un proceso que cumpla estas dos condiciones se llamará *estacionario en sentido amplio*.

Entonces, un proceso estacionario en sentido estricto lo será en sentido amplio. El recíproco *no es cierto*, salvo en el caso de un proceso gaussiano, donde los momentos de primer y segundo orden caracterizan completamente al proceso.

3.2. Relación con la covarianza

Recordando la definición de covarianza $\text{Cov}(A, B) = \mathbb{E}(AB) - \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B)$, un proceso estacionario tiene autocovarianza:

$$\text{Cov}_x(\tau) = \text{Cov}(x(t + \tau), x(t)) = R_x(\tau) - m^2 \quad (4)$$

¹para procesos complejos, se define $r_x(t, s) = \mathbb{E}(x(t)x^*(s))$

Es decir, la autocorrelación y la covarianza difieren en una constante. Esto significa que a menos de m^2 , la autocorrelación da una indicación de la dependencia de la señal entre dos instantes de tiempo.

3.3. Propiedades de la autocorrelación

Veremos ahora de manera más ilustrativa las propiedades de la autocorrelación y la autocovarianza en lo que refiere a la dependencia temporal del proceso. Alcanza con que el proceso sea estacionario en sentido amplio.

- $R_x(0) = \mathbb{E}(x(t)^2) = P_x$ es la potencia del proceso.
De manera similar, $\text{Cov}_x(0) = \text{Var}(x(t)) = \sigma_x^2$ es la varianza del proceso.
- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$. En el caso complejo, $R_x(\tau) = R_x(-\tau)^*$.
Es decir, la función de autocorrelación siempre es par. Esto se demuestra trivialmente sustituyendo t por $t - \tau$ en (3). Vale lo mismo para la autocovarianza.
- Si $x(t)$ y $x(t+\tau)$ son independientes, entonces $\text{Cov}_x(\tau) = 0$. El recíproco sólo vale si x gaussiano. De todos modos, una autocovarianza decreciente indica generalmente una creciente independencia.
- $|\text{Cov}_x(\tau)| \leq \sigma_x^2$, y cuando se cumple la igualdad vale lo siguiente:

$$\text{Cov}_x(\tau) = \sigma_x^2 \Rightarrow x(t) \stackrel{P=1}{=} x(t + \tau)$$

$$\text{Cov}_x(\tau) = -\sigma_x^2 \Rightarrow x(t) \stackrel{P=1}{=} -x(t + \tau)$$

Esta propiedad es fundamental para interpretar el grado de dependencia. Sabemos ahora que la autocovarianza nunca puede superar en módulo a la varianza ($\text{Cov}_x(0)$). Además, si vale igual a la varianza, entonces sabemos (con probabilidad 1) que el valor de la señal en 2 instantes cualesquiera separados τ , será igual.

Esta propiedad se puede demostrar fácilmente, aunque la demostración no tiene mayores aportes conceptuales.

Ejemplo 4 Consideremos la señal IID $x_3[n]$, que tiene distribución uniforme y valor medio $m = \mathbb{E}(x_3[n]) = 0$. Calculemos ahora la autocorrelación (que en este caso es igual a la autocovarianza):

$$R_x[n] = \mathbb{E}(x[m] \cdot x[m+n])$$

Si $n = 0$, tenemos $R_x[0] = \sigma_x^2 = \frac{A^2}{12}$. Si $n \neq 0$, $x[m]$ y $x[m+n]$ son independientes por construcción, por lo cual $R_x[n] = \mathbb{E}(x[m])^2 = 0$. Entonces,

$$R_x[n] = \sigma_x^2 \delta[n]$$

Efectivamente, la independencia se refleja en el valor 0 de la autocovarianza para $n \neq 0$. Esto vale siempre para señales IID.

Ejemplo 5 Veamos qué pasa cuando la señal no tiene media nula. La señal $x_2[n]$ tiene media $m = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = 2p - 1$.

La autocorrelación vale 1 para $n = 0$, y m^2 para $n \neq 0$.

Consideremos ahora el proceso $x'[n] = x_3[n] - m$, que tiene media nula. Ahora, la autocorrelación coincide con la covarianza:

$$R_{x'}[n] = (1 - (2p - 1)^2) \delta[n]$$

En telecomunicaciones es importante minimizar la potencia de la señal, y por otra parte transmitir la mayor cantidad de información posible. Cuanto más lentamente decaigan los valores de la autocorrelación, significa mayor grado de dependencia de la señal a lo largo del tiempo, y por lo tanto mayor redundancia. El nivel de continua es efectivamente potencia que no transmite ninguna información. En este ejemplo vemos que cuando $p = 1/2$, no sólo se obtiene media nula, sino que la autocovarianza es máxima (=1).

Ejemplo 6 La señal $x_8(t)$ ilustra qué ocurre cuando la autocorrelación alcanza el valor de la potencia.

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \mathbb{E}(x(t)x(t+\tau)) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) A \cos(2\pi f_0(t+\tau) + \varphi) d\varphi \\ &= \frac{A^2}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0(2t + \tau) + 2\varphi)) d\varphi \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

Este proceso tiene media nula (constante), y la autocorrelación depende únicamente de τ , por lo tanto es estacionario en sentido amplio. La estacionariedad viene dada por la distribución uniforme de la fase. Cualquier otra distribución hubiese dado un proceso no estacionario.

El significado intuitivo de la fase con distribución uniforme es el siguiente: “estoy observando una sinusoidal a partir de una fase cualquiera, no tengo idea de cuándo la comenzaron a generar y por lo tanto cada observación caerá en una fase cualquiera”. En la señal x_7 , por ejemplo, el observador está sincronizado con el generador, y por lo tanto no verá un proceso estacionario por más que la frecuencia sea desconocida en cada experimento.

$R_x(\tau)$ toma valor σ^2 para τ múltiplo de $1/f_0$. Según las propiedades vistas, esto significaría que la señal adquiere, con probabilidad 1, el mismo valor para dos instantes cualesquiera separados $1/f_0$. Evidentemente esto es así ya que la señal es periódica con ese período.

Una observación similar vale para $\tau = (2k + 1)/2f_0$, donde con probabilidad 1 el valor es el opuesto.

Ejemplo 7 *La señal $x_{10}[n]$ es la suma $x_4[n] + x_4[n - 1]$. x_4 tiene autocorrelación $\sigma^2 \delta[n]$. Llamemos $y[n] = x_{10}[n]$ y $x[n] = x_4[n]$ y calculemos la autocorrelación:*

$$R_y[n] = \mathbb{E}((x[m] + x[m - 1])(x[m + n] + x[m + n - 1])) = \dots =$$

$$R_x[n] + R_x[n - 1] + R_x[n + 1] + R_x[n] = \sigma^2(\delta[n + 1] + 2\delta[n] + \delta[n - 1])$$

Vemos que al pasar una secuencia IID por un filtro, se están mezclando varios componentes de la entrada, lo que resulta en una salida que ya no es IID, sino que tiene una cierta dependencia temporal (hasta $n = 1$ en este caso). En general, la dependencia será tan larga como la respuesta al impulso del filtro. En un filtro IIR, los bucles recursivos siempre tendrán vestigios de todas las entradas anteriores, y es de esperarse una autocorrelación a la salida que si bien es decreciente, no se hace 0 nunca.

Ejemplo 8 *La señal x_9 se llama onda binaria aleatoria, y es de suma utilidad para modelar señales en telecomunicaciones y electrónica.*

Para calcular la autocorrelación de esta señal, $R_x(\tau) = \mathbb{E}\{x(t)x(t + \tau)\}$, estudiamos qué pasa para distintos valores de τ :

- $\tau \geq T$

Aquí sabemos que t y $t + \tau$ están separados al menos por un tiempo de bit, y por lo tanto siempre existirá un instante de transición entre estos dos tiempos, y los valores de x_9 corresponderán a valores distintos de n para $x_1[n]$. Como x_1 es una secuencia IID, entonces la esperanza será sobre el producto de valores independientes. Por lo tanto, $R_x(\tau) = \mathbb{E}\{x(t)\}\mathbb{E}\{x(t + \tau)\} = \mathbb{E}\{x_1\}^2 = 0$.

- $0 \leq \tau < T$

En este caso, puede o no haber ocurrido una transición entre t y $t + \tau$. El planteo general es el siguiente:

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}\{x(t)x(t + \tau)\} = \sum_{i \in \{-1,1\}} \sum_{j \in \{-1,1\}} ij \mathbb{P}\{x(t) = j, x(t + \tau) = i\}$$

Llamando $P_\tau(i, j) = \mathbb{P}\{x(t + \tau) = i, x(t) = j\}$ (probabilidad de tener i luego de j),

$$R_x(\tau) = \sum_{i,j \in \{-1,1\}} ij P_\tau(i, j) = P_\tau(1, 1) + P_\tau(-1, -1) - P_\tau(-1, 1) - P_\tau(1, -1)$$

Como el proceso es simétrico (x_9 y $-x_9$ son el mismo proceso al ser los valores de x_1 equiprobables y opuestos), entonces $P_\tau(1, 1) = P_\tau(-1, -1)$ y $P_\tau(-1, 1) = P_\tau(1, -1)$:

$$R_x(\tau) = 2P_\tau(1, 1) - 2P_\tau(-1, 1)$$

Por la definición de probabilidad condicional, $P_\tau(i, j) = P_\tau(i | j) \mathbb{P}\{x(t) = j\}$, donde se define $P_\tau(i | j) = \mathbb{P}\{x(t + \tau) = i | x(t) = j\}$ (probabilidad de i dado que ocurrió j). Además, cualquiera de los 2 valores que puede tomar j tienen igual probabilidad: $\mathbb{P}\{x(t) = j\} = 1/2$. Entonces queda:

$$R_x(\tau) = P_\tau(1 | 1) - P_\tau(-1 | 1) = 1 - 2P_\tau(-1 | 1)$$

Todavía no sabemos si t y $t + \tau$ corresponden a tiempos de bit distintos. Condicionando a la existencia de este instante de transición entre las dos medidas, tendremos:

$$R_x(\tau) = 1 - 2(P_\tau(-1 | 1, \text{no tr}) \mathbb{P}\{\text{no tr}\} + P_\tau(-1 | 1, \text{tr}) \mathbb{P}\{\text{tr}\})$$

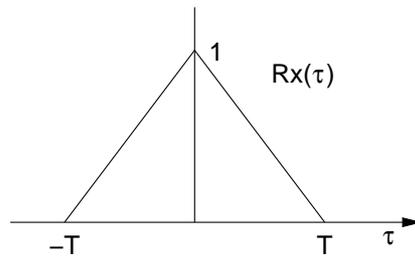
Si no hubo transición, entonces nunca pueden darse medidas 1 y -1, por lo tanto la primer probabilidad vale 0. Si hubo una transición, entonces los valores tomados son independientes. Además el valor en $t + \tau$ es también independiente de si hubo o no transición. Por lo tanto esta probabilidad vale 1/2.

Falta averiguar la probabilidad de una transición en un intervalo de tiempo τ . Por construcción de la señal, dado t cualquiera, el próximo instante de transición estará distribuido uniformemente entre t y $t+T$. Por lo tanto, para $0 \leq \tau \leq T$, la probabilidad de una transición en un intervalo τ es proporcional a este intervalo: $\mathbb{P}\{\text{tr}\} = \tau/T$. Queda entonces:

$$R_x(\tau) = 1 - \tau/T$$

- $\tau < 0$

La autocorrelación es una función par. Vale $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.



Como la autocorrelación depende sólo de τ , y la media es constante (0), entonces el proceso es estacionario en sentido amplio.

4. Análisis espectral

En el ejemplo 6 se observó que una señal periódica resulta en una función de autocorrelación también periódica. En los ejemplos anteriores se vio que una secuencia IID tiene autocorrelación proporcional al $\delta[n]$, la secuencia que tiene igual cantidad de todos los componentes frecuenciales. La secuencia IID justamente no presenta ningún indicio de periodicidad o componente frecuencial preferido.

Aparentemente la autocorrelación lleva alguna información sobre cómo se distribuye en frecuencia el proceso. En realidad, tiene mucha información, como veremos a continuación.

Se llama *densidad espectral de potencia* a la transformada de Fourier de la autocorrelación:

- En tiempo continuo, $R_x(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(f)$
- En tiempo discreto, $R_x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G_x(e^{j\theta})$

Ejemplo 9 *Calculemos la densidad espectral para algunas de las señales vistas:*

- $G_{x_8}(f) = \frac{A^2}{4}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$
- $G_{x_1}(e^{j\theta}) = 1$
- $G_{x_{10}}(e^{j\theta}) = 2\sigma^2(1 + \cos(\theta))$
- $G_{x_9}(f) = T \text{sinc}^2(fT)$

4.1. Filtrado de un proceso

Un resultado fundamental consiste en estudiar cómo se transforma la densidad espectral al pasar un proceso por un filtro.

Sea el proceso x con autocorrelación R_x y densidad espectral G_x . Esta señal ingresa a un filtro (estable) de respuesta impulsiva h y respuesta frecuencial H , y a la salida se obtiene otro proceso y , con autocorrelación R_y y densidad espectral G_y .

Sabiendo que $y = h * x$, calculamos la autocorrelación a la salida (las cuentas en tiempo discreto son idénticas):

$$R_y(\tau) = \mathbb{E}(y(t)y(t + \tau)) = \mathbb{E}\left(\int x(t - u)h(u)du \int x(t + \tau - v)h(v)dv\right)$$

Como el filtro es estable, las integrales convergen, por lo que se puede cambiar el orden de la esperanza con las integrales:

$$= \int \int \mathbb{E}(x(t - u)x(t + \tau - v))h(u)h(v)du dv = \int h(u) \int R_x(\tau + u - v)h(v)dv du$$

Definiendo $z = h * R_x$ y $q(s) = h(-s)$,

$$R_y(\tau) = \int h(u)z(\tau + u) du = \int q(\alpha)z(\tau - \alpha) d\alpha = z * q$$

Observando que $q \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{H(f)}$, y que $z \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f)G_x(f)$,

$$G_y(f) = (H(f)G_x(f))\overline{H(f)} = |H(f)|^2G_x(f)$$

Es decir, la densidad de potencia se ve multiplicada por el módulo al cuadrado de la respuesta frecuencial.

El resultado para tiempo discreto sería: $G_y(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2G_x(e^{j\theta})$.

Ejemplo 10 Apliquemos este resultado para calcular nuevamente la densidad espectral de x_{10} .

$G_{x_4}(e^{j\theta}) = \sigma^2$, y la respuesta en frecuencia del filtro es $H(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta} = e^{-j\theta/2} 2 \cos(\theta/2)$.

$$|H(e^{j\theta})|^2 = 4 \cos^2(\theta/2) = 2(1 + \cos(\theta))$$

Por lo tanto, $G_{x_{10}}(e^{j\theta}) = \sigma^2 2(1 + \cos(\theta))$. Esta nueva forma de hallar el espectro de la salida del filtro es mucho más directa, y no depende de la complejidad del filtro. El cálculo original planteando la autocorrelación a la salida (ejemplo 7) se vuelve muy complejo al crecer la cantidad de términos de $h[n]$, y no es fácilmente aplicable a filtros IIR.

La densidad espectral de potencia indica cómo se distribuye la potencia de la señal en las diferentes frecuencias. Para ver exactamente el sentido físico, y el porqué del nombre *densidad espectral de potencia*, observemos los siguientes dos resultados:

1. La integral de la densidad espectral es la potencia del proceso:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} G_x(e^{j\theta}) d\theta = R_x[0]$$

$$\int_{\mathcal{R}} G_x(f) df = R_x(0)$$

Estos resultados salen directamente de la definición de transformada de Fourier.

Como la integral de G_x es la potencia, entonces es un candidato para densidad de potencia. Falta ver si la distribución de la potencia en el espectro efectivamente se corresponde con los valores de G_x :

2. Un experimento para averiguar cómo se distribuye la potencia de una señal x en las distintas frecuencias sería el siguiente:



La señal x se hace pasar por un pasabandas ideal con frecuencias de corte f_0 y $f_0 + \Delta f$. A la salida del pasabajos, hay un medidor de

potencia. Por lo tanto, si Δf es suficientemente pequeño, tendremos la medida aproximada de la densidad de la potencia de x en torno a la frecuencia f_0 :

$$\frac{\Delta P(f_0)}{\Delta f} \approx \frac{dP(f_0)}{df_0}$$

Aplicando el resultado (4.1), sabemos que $\Delta P(f_0)$ es la integral del módulo cuadrado del filtro por G_x :

$$\Delta P(f_0) = \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} G_x(f) df \approx G_x(f) \Delta f$$

Por lo tanto, para $\Delta f \rightarrow 0$, tendremos que G_x es efectivamente la densidad con que se distribuye la potencia de x en el espectro: $G_x(f_0) = \frac{dP(f_0)}{df_0}$.

Notas: Se consideró un filtro complejo ($|H(f)|^2$ no es simétrico). Se pueden hacer las cuentas con un filtro real, y considerando frecuencias positivas y negativas simultáneamente, se llega al mismo resultado.

Ejemplo 11 *Muchas veces, sólo se precisa conocer la potencia del proceso a la salida de un filtro. No interesa la forma explícita del espectro.*

Entonces, interesa calcular $\sigma_y^2 = \int G_y = \int |H|^2 G_x$. Si el proceso de entrada tiene densidad espectral constante como ocurre comúnmente en la práctica, resulta $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \int |H|^2$.

Si esta integral resulta difícil de tratar analíticamente, se puede aplicar la propiedad de Parseval e integrar (sumar) $|h|^2$.

4.2. Propiedades de la densidad espectral

Las siguientes propiedades no se demuestran, ya que es necesario introducir el concepto de periodogramas, que convergen a la densidad espectral.

1. Simetría:

G_x es una función par y real.

2. G_x es no negativa:

De la justificación de que G_x es una densidad de potencia, se ve que no importa cuánto valgan f_0 y Δf , la potencia a la salida nunca puede ser negativa. Por lo tanto, G_x es no negativa.

5. Muestreo de procesos

Sea $x(t)$ un proceso estacionario, y $y[n]$ muestras de $x(t)$ tomadas a frecuencia $f_s = 1/T_s$. Será entonces:

$$\begin{aligned} R_y[m] &= \mathbb{E}\{y[n]y[n+m]\} = \\ &= \mathbb{E}\{x(nT_s)x((n+m)T_s)\} = R_x(mT_s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la autocorrelación de $y[n]$ son muestras de la autocorrelación de $x(t)$.

Recordando el teorema del muestreo, y considerando como señales a las autocorrelaciones, tendremos que si $x(t)$ es de *espectro acotado* $f_s/2$, entonces $R_x(\tau)$ está determinado exactamente a partir de sus muestras $R_y[n]$ (vale la fórmula de reconstrucción ideal). Y el espectro de y será, en todo caso, la periodización del espectro de $x(t)$:

$$G_y(e^{j\theta}) = \frac{1}{T_s} \sum_k G_x\left(\frac{f_s}{2\pi}(\theta + 2k\pi)\right)$$

6. Ruido blanco

Los componentes electrónicos (resistencias, semiconductores) generan lo que se llama *ruido térmico*. Este ruido es una señal que aparece superpuesta al voltaje entre los terminales del componente, y que tiene densidad espectral constante para una amplia gama de frecuencias (del orden de 10^{12} Hz).

En efecto, modelos teóricos de mecánica cuántica sugieren el siguiente modelo para el ruido térmico en una resistencia:

$$G(f) = \frac{2R\hbar|f|}{e^{\frac{\hbar|f|}{kT}} - 1}$$

donde R es la resistencia, \hbar es la constante de Planck, k la constante de Boltzman, y T la temperatura absoluta. Para frecuencias mucho menores que kT/\hbar , la densidad espectral es constante $G(f) = 2RkT$ [V²/Hz], y habitualmente a este valor se lo denomina $\eta/2$ (para compensar el factor 2 que aparece al integrar para frecuencias positivas y negativas).

Como en general las señales y circuitos trabajan a frecuencias mucho menores que kT/\hbar , es habitual considerar el ruido térmico como de densidad constante.

A un proceso con densidad espectral constante se lo llama *ruido blanco*, por analogía con la luz blanca, que tiene un espectro lumínico uniforme.

Lo interesante del ruido blanco es que sirve para modelar muchas señales que se dan en la práctica: ruido térmico, la distorsión introducida por los DAC, la distorsión producida en los filtros digitales al realizar operaciones con precisión limitada, el ruido de fondo recibido por una antena, el ruido generado en transistores de alta ganancia, etc.

Además se trata de un proceso muy fácil de trabajar a nivel de cálculo al ser $G(f)$ constante.

Consideremos $G(f) = \eta/2$. La autocorrelación de este proceso es $R_x(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$. Este proceso tiene potencia infinita, lo cual escapa a las hipótesis de proceso estacionario (potencia finita, y R_x una función). Por lo tanto, el ruido blanco requiere a nivel teórico consideraciones especiales².

En la práctica, al plantear un diseño lo primero que se hace con el ruido blanco es filtrarlo, para representar los filtros y anchos de banda propios de los circuitos. Por lo tanto, siempre se termina trabajando con *ruido blanco limitado en banda* al considerarse ruido blanco a través de un pasabajos o pasabanda ideal, o en el caso más general tendremos *ruido coloreado* (por ejemplo, el ruido de detección en un receptor FM tiene $G(f) \propto f^2$ en la banda de audio).

En tiempo discreto, una sucesión IID con media nula es ruido blanco. Aquí no hay ningún problema teórico como ocurre en el caso continuo.

7. Ergodicidad

El cálculo de los distintos momentos estadísticos (esperanza y autocorrelación) supone la integración sobre todo el espacio de medida. Esto significa conocer un modelo para el proceso, o tener registrados todos los experimentos posibles.

En la práctica, interesa poder estimar esperanza y autocorrelación a partir de algunas trazas del proceso, y muy comúnmente, sólo se dispone de una única traza. Por ejemplo, si se quiere estudiar la temperatura media anual del Río de la Plata, o el ruido ambiente en el centro de la ciudad, o el ruido de fondo recibido por una antena, se dispone de un único registro, y no tiene sentido *comenzar el experimento varias veces*.

Entonces interesa saber si las medias temporales para un único experimento tienen alguna relación con las medias estadísticas sobre todos los experimentos posibles.

²El ruido blanco surge a nivel teórico como la derivada del proceso de Wiener: media nula, gaussiano, a incrementos independientes y estacionarios, que se trata con herramientas de cálculo estocástico.

La media y autocorrelación temporales se definen como:

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \quad (5)$$

$$\langle x[n], x[n+m] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n+m] \quad (6)$$

donde $x[n]$ corresponde a un único experimento.

Existe un conjunto de procesos llamados *ergódicos* para los cuales las medias estadísticas coinciden con las medias temporales.

Evidentemente, un proceso ergódico debe ser estacionario ya que las medias temporales justamente integran a lo largo del tiempo para obtener resultados constantes. Un proceso no estacionario tiene medias estadísticas no constantes.

Ejemplo 12 *La señal x_6 es estacionaria ya que por definición no tiene ninguna dependencia con el tiempo.*

Si elegimos un experimento ω_0 cualquiera fijo, entonces la traza del proceso será una constante $\alpha(\omega_0) = \alpha_0$. La media temporal será entonces α_0 , y la varianza temporal será 0, ya que se trata de una constante.

Sin embargo, las medias estadísticas darán que la esperanza es 0 y la varianza 1.

Se trata, evidentemente, de un proceso estacionario pero no ergódico.

La no ergodicidad viene dada por la fuerte dependencia a largo plazo de este proceso. El valor en un instante de tiempo determina el valor para tiempos muy lejanos, y por lo tanto las medias temporales van a estar fuertemente sesgadas por este valor.

En general, un proceso ergódico no va a mostrar dependencias tan fuertes, y al recorrerse una única traza, se tendrán representaciones de todos los experimentos posibles.

La ergodicidad en sentido estricto, si bien es fácil de definir formalmente³, no es fácilmente verificable dado el modelo del proceso.

Condiciones más débiles son la *ergodicidad en media* y la *ergodicidad en autocorrelación*, que valen cuando la media y autocorrelación temporales coinciden con las estadísticas.

Existen condiciones suficientes de ergodicidad en media y en autocorrelación. Por ejemplo, si $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)} \sum_{k=0}^N \text{Cov}_x[k] = 0$, el proceso es ergódico

³Un proceso estacionario es ergódico si todo conjunto invariante ante traslaciones tiene medida de probabilidad 0 o 1

en media ($\text{Cov}_x[k] = R_x[k] - m_x^2$ es la autocovarianza). En particular, esto vale si $\text{Cov}_x \rightarrow 0$. Esta condición asegura la ergodicidad en sentido cuadrático medio (no casi seguramente):

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \xrightarrow{mc} m_x$$

Hay condiciones suficientes para ergodicidad en autocorrelación, pero involucran momentos de cuarto orden.

Además, existe la dificultad clásica en estadística: para saber si el proceso es ergódico en media, se necesita la autocovarianza. Ésta sólo se puede calcular a partir de la traza si se sabe que el proceso es ergódico en autocorrelación. Por lo tanto hay que usar estas herramientas con cuidado.

En la práctica, generalmente se asume que un proceso es ergódico en base a elementos intuitivos. Entendiendo los orígenes físicos de un proceso, se puede discriminar si en él hay correlaciones a largo plazo, o si por el contrario es la superposición de fenómenos de corto plazo independientes.

8. Señales determinísticas

Los promedios temporales para obtener la autocorrelación a partir de una traza inspiran su uso para señales determinísticas siempre que el límite exista:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t)dt$$

De igual manera, se define la densidad espectral para una señal determinística como la transformada de Fourier de la autocorrelación: $G_x(f) = \mathcal{F}(R_x(\tau))$. Sigue valiendo el resultado $G_y = |H|^2 G_x$.

9. Relación señal a ruido

Generalmente, en los problemas de tratamiento de señales, la señal a estudiar está superpuesta a una señal no deseada. Esta señal, comunmente llamada *ruido*, se puede deber a ruido térmico en los circuitos, superposición de interferencias causadas por otras fuentes, etc.

Este ruido muchas veces se puede modelar como independiente de la señal y superpuesto a ésta de forma aditiva.

En este caso, tendremos que la señal global es $y(t) = x(t) + n(t)$, con x y n independientes.

Entonces, la potencia tendrá separadamente los componentes de señal y de ruido:

$$P_y = P_x + P_n$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$$

Incluso si la señal y es tratada por operaciones lineales (por ejemplo, un filtro), a la salida se obtendrán nuevamente componentes superpuestas de señal filtrada y ruido filtrado (principio de superposición), y se podrá expresar la potencia de manera similar.

Lo que se quiere normalmente es que el sistema que procesa la señal aumente la relación entre potencia de señal y potencia de ruido. Esta relación es un parámetro muy usado en ingeniería, y se llama *relación señal a ruido*, o por sus siglas en inglés *SNR*.

$$SNR = \frac{S}{N} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}$$

Normalmente la SNR se mide en decibeles: $SNR = 10 \log S/N$. Por ejemplo, para audio de alta fidelidad, se requiere una SNR mayor a 95dB. Para recibir una señal digital con baja probabilidad de error, la SNR en la señal de la antena debe ser del orden de 50dB.

Los procesos de filtrado lineal generalmente intentan mejorar la SNR atenuando las frecuencias donde hay mayor potencia de ruido, y amplificando donde hay mayor potencia de señal.

10. Señales de referencia

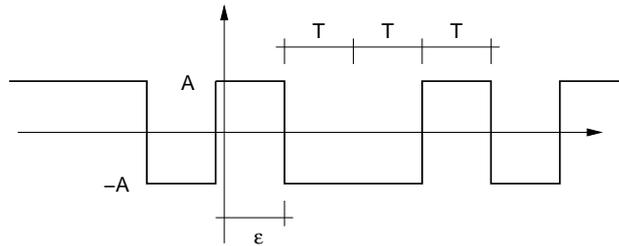
Señales a las que se hace referencia en el texto. La variable ω hace referencia a un elemento del espacio muestral, y no a una frecuencia. Si bien ω aparece en algunos de los ejemplos, ω está implícito en todas las señales, ya que el valor de x depende del tiempo (t o n) y del experimento (ω).

1. $x_1[n]$ secuencia IID que toma los valores 1 y -1 con probabilidad 1/2.
2. $x_2[n]$ secuencia IID que toma valor 1 con probabilidad p y -1 con probabilidad $1 - p$.
3. $x_3[n]$ secuencia IID con distribución uniforme $x_3[n] \sim U[\frac{-\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$.
4. $x_4[n]$ secuencia IID con distribución normal $x_4[n] \sim N(0, \sigma)$.

5. $x_5[n] = x_1[n] u[n]$.
6. $x_6(t)_\omega = \alpha(\omega)$, es decir, una constante que depende del experimento. $\alpha \sim N(0, 1)$.

Un ejemplo clásico para este tipo de señal es el de una fábrica de balanzas. Por limitaciones de calibración en la fabricación, cada balanza sale de la fábrica con un corrimiento en la medida $x_6(t)$ (lo que marca la balanza con el plato vacío). Este corrimiento será constante a lo largo de la vida de la balanza, pero será distinto para cada balanza que se fabrique.

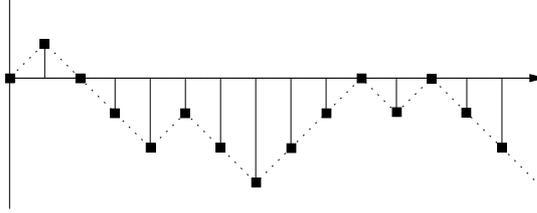
7. $x_7(t)_\omega = A \cos(2\pi f_\omega t)$, con $f_\omega \sim N(1\text{kHz}, 20\text{Hz})$.
8. $x_8(t)_\omega = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_\omega)$, con $\varphi \sim U[-\pi, \pi]$.
9. Onda Binaria Aleatoria:
 $x_9(t) = Ax_1[n]$ en el intervalo de tiempos $t \in [nT + \epsilon_\omega, (n+1)T + \epsilon_\omega]$.
 El retardo $\epsilon_\omega \sim U[0, T]$.



En el dibujo, x_1 vale 1 para $n = -4, -3, -1, 2, 4$, y vale -1 para $n = -2, 0, 1, 3$.

La onda binaria aleatoria es un buen modelo para muchas señales que aparecen en los sistemas de comunicación digitales, y para muchas señales eléctricas. T se conoce como *tiempo de bit*, y es el tiempo entre (posibles) transiciones. El retardo ϵ es necesario para que el proceso sea estacionario, y refleja la independencia entre el observador y el reloj a partir del cual se genera la señal.

10. x_{10} es la salida del filtro $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$, con entrada $x_4[n]$.
11. *Paseo al azar*: x_{11} es la salida del acumulador, con entrada $x_1[n] u[n-1]$, y condiciones iniciales nulas. Es decir, $x_{11}[0] = 0$ y $x_{11}[n] = x_{11}[n-1] + x_1[n]$ para tiempos positivos.



En el ejemplo, $x_1[n]$ vale 1, -1, -1, -1, 1, -1, etc.

x_{11} , si bien tiene media nula para todo n , tiene una varianza que crece con el tiempo. Esto se debe a que el acumulador es un filtro inestable. Esto hace que aún teniendo una entrada estacionaria y acotada, la salida sea no estacionaria, y no acotada con probabilidad 1.

12. *Proceso MA (Moving Average)*: es una secuencia IID luego de un filtro no recursivo (FIR). Los filtros FIR son una generalización de una media móvil, de ahí el nombre. La salida en régimen es estacionaria. Por ejemplo, x_{10} .
13. *Proceso AR (Autoregresivo)*: es una secuencia IID luego de un filtro puramente recursivo ($H(z)$ no tiene numerador). Este filtro debe ser estable para que exista régimen estacionario. Por ejemplo, en x_{11} el filtro no es estable.
14. *Proceso ARMA (Autoregressive Moving Average)*: es una secuencia IID luego de un filtro recursivo genérico.

Los procesos MA, AR y ARMA se usan como modelos para muchos procesos naturales, ya que son fáciles de estudiar analíticamente. Lo que no es tan evidente es elegir los coeficientes de los filtros. Para ello existen muchos trabajos sobre estimación de los coeficientes a partir de trazas del proceso.