Capítulo 6: Estabilidad frente a pequeñas perturbaciones

Esquema

6.1. Introducción

Concepto

La estabilidad frente a pequeñas perturbaciones (estabilidad en pequeña señal) es la capacidad del sistema de potencia de mantener el sincronismo cuando está sujeto a pequeñas perturbaciones.

- Significado físico *per se*,
- propiedad del sistema y de su punto de operación,
- análisis lineal.

Frecuentemente se emplea el análisis lineal para

- estudiar la estabilidad transitoria,
- analizar la distribución geográfica del impacto de determinada perturbación,
- analizar y diseñar controladores (AVR,PSS, etc.).

Escenario típico

- Sistema muy cargado,
- contingencia desfavorable,
- presencia de cargas de potencia constante,
- sintonía inadecuada de controladores o su ausencia.

6.2. Ejemplo máquina-bus infinito

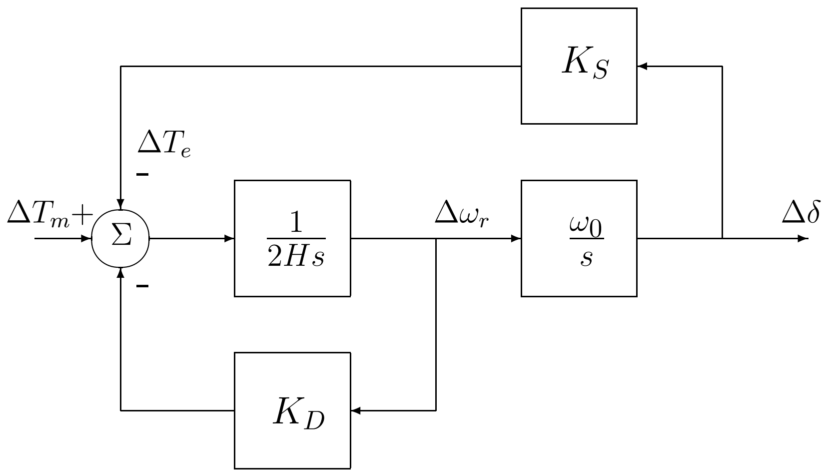
$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta\omega_r}{dt} &= \frac{1}{2H}(T_m - T_e - K_D\Delta\omega_r)\\
\frac{d\delta}{dt} &= \omega_0\Delta\omega_r\\
T_e &= \frac{E'E_b}{X} sen\,\delta
\end{aligned}
$$

donde

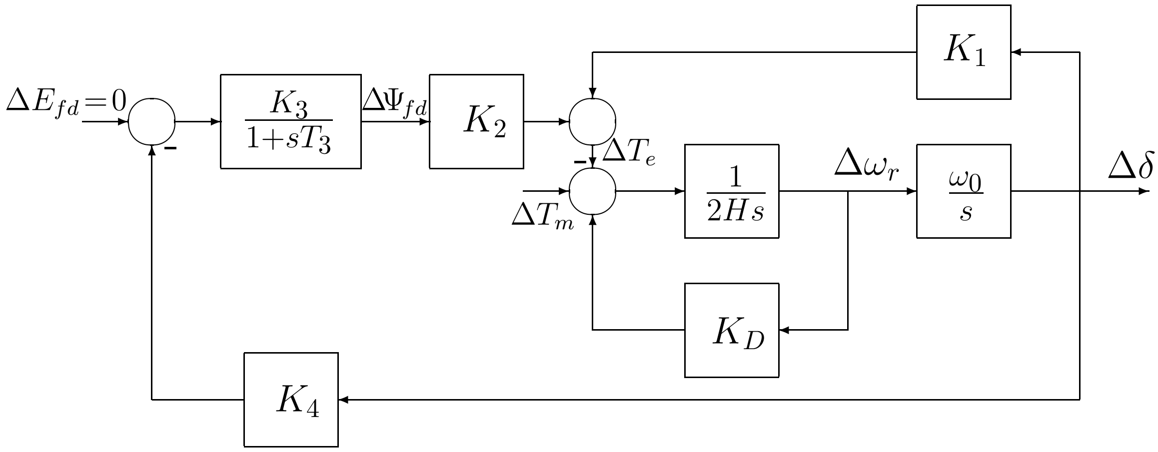
- T_m: par mecánico, pu,
- T_e: par eléctrico, pu,
- H: constante de inercia, MWs/MVA,
- δ: ángulo del rotor, r.e.,
- $\Delta\omega_r := \frac{\omega_r-\omega_0}{\omega_0}$: variación de velocidad angular, pu,
- ω_0: frecuencia nominal, r.e./s,
- K_D: factor de amortiguación, torque pu/ vel. pu,
- K_S: par sincronizante, pu,
- t: tiempo, s.

Linealizando en torno del punto de equilibrio

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Delta\omega_r}{dt} &= \frac{1}{2H}(\Delta T_m - K_S\Delta\delta - K_D\Delta\omega_r)\\
\frac{d\delta}{dt} &= \omega_0\Delta\omega_r
\end{aligned}
$$



Incluyamos ahora el circuito de campo



Cuál es el efecto de la reacción de armadura?

$$\Delta T_e = [K_1 - \frac{K_2K_3K_4}{1+sT_3}]\Delta\delta$$

Hagamos un análisis cualitativo:

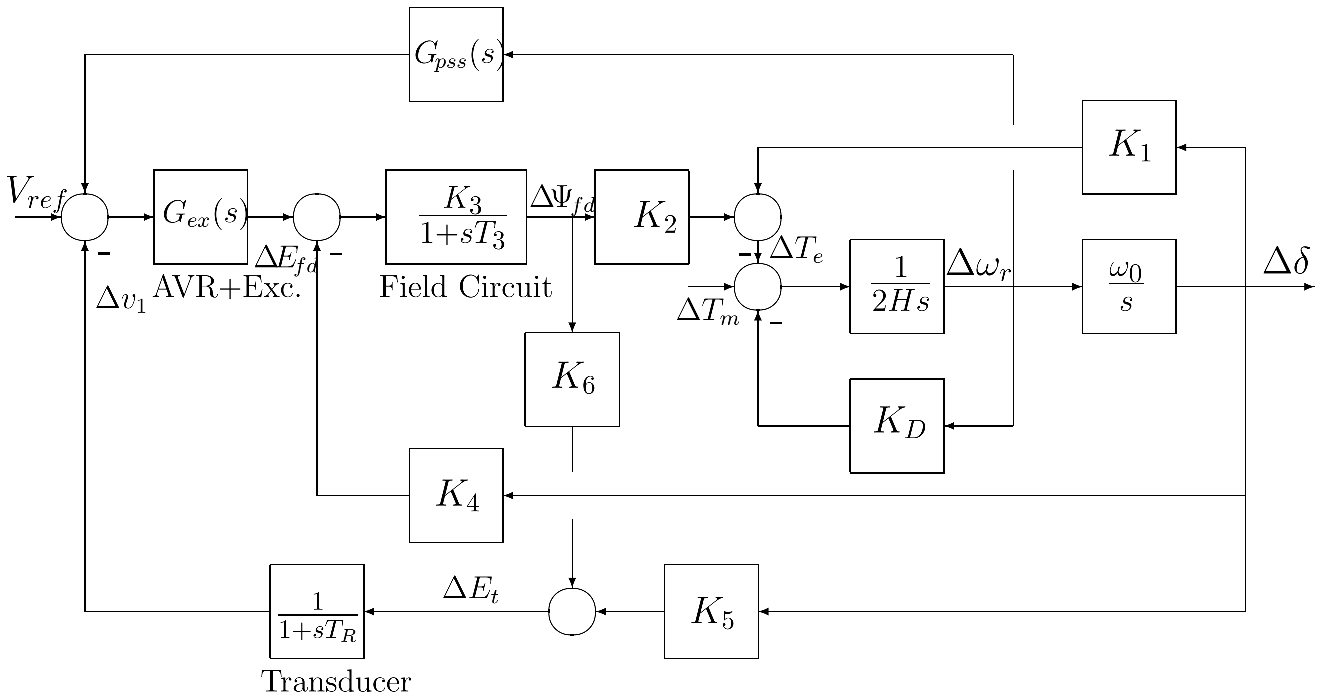
En presencia de una oscilación de frecuencia w_1

$$\Delta T_e = [K_1 - \frac{K_2K_3K_4}{1+jw_1T_3}]\Delta\delta = [K_1 - \frac{K_2K_3K_4(1-jw_1T_3)}{1+w_1^2T_3^2}]\Delta\delta =$$

$$= [K_1 - \frac{K_2K_3K_4}{1+w_1^2T_3^2}]\Delta\delta + \frac{K_2K_3K_4T_3}{1+w_1^2T_3^2}\Delta\omega_r$$

$K_4 > 0$ (lo usual) quita par sincronizante K_S y aporta par de amortiguación K_D.
Es conveniente resaltar que $K_4 < 0$ puede darse ...

Incluyamos ahora el sistema de excitación



Cuáles son los efectos del AVR y el factor K_5?

$$\Delta T_e = K_1 \Delta\delta + K_2 \Delta\Psi_{fd}$$

$$\Delta\Psi_{fd} = -\frac{K_3}{1+sT_3} G_{ex}(s) \frac{1}{1+sT_R} [K_6 \Delta\Psi_{fd} + K_5 \Delta\delta] - \\ -\frac{K_3 K_4}{1+sT_3}\Delta\delta$$

Asumiendo una excitación estática $G_{ex}(s) = K_A$:

$$\Delta T_e = [K_1 - K_2 K_3 \frac{K_A K_5 + K_4(1+sT_R)}{T_3 T_R s^2 + (T_3+T_R)s + 1 + K_3 K_A K_6}]\Delta\delta$$

El análisis cualitativo para $w_1 = 0$ da:

$$"K_S" = K_1 - K_2 K_3 \frac{K_A K_5 + K_4}{1 + K_3 K_A K_6}$$

y una dependencia directa de $"K_D"$ con el factor $K_A K_5$.

Es fácil ver que en el caso $K_5 < 0$ el AVR aumenta el par sincronizante y disminuye el par de amortiguación. Cuando $K_5 > 0$ la situación es la inversa.

6.3. Análisis de autoestructura

Herramienta de análisis que permite comprender y cuantificar fenómenos dinámicos presentes en los grandes sistemas de potencia:

- modos de oscilación,
- geometría de la respuesta natural del sistema,
- participación de cada máquina en cada modo,
- localización geográfica de los modos de oscilación.

Son fenómenos dinámicos globales que abarcan toda la red.

Sea el sistema de potencia

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u, \lambda) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

con $x \in R^n$, $u \in R^m$, $\lambda \in R^p$ las variables de estado, entradas y parámetros respectivamente.
Para $u(t) = U_0$ constante y $\lambda = \lambda_0$, tenemos $x_0 = x_0(U_0, \lambda_0)$ y

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

donde $A \in R^{n\times n}$ está dado por

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \mid_{x_o}$$

Sabemos que la solución es de la forma

$$x(t) = e^{At}x_0;\; e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!}$$

y que los autovalores $\lambda_i \in C$, autovectores derechos $v_i \in C^n$, e izquierdos $u_i \in C^n$ de A satisfacen:

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A)v_i &= 0 \\ u_i(\lambda_i I - A) &= 0 \\ |v_i| &\neq 0 \\ |u_i| &\neq 0 \\ i &= 1..n \end{aligned}$$

y que si $\lambda_i \neq \lambda_j \;\forall\, i \neq j$ entonces los v_i son linealmente independientes. Supondremos eso en adelante.

Elijamos una matriz de cambio de base en C^n invertible

$$T := [\; v_1 \;\; v_2 \;\; .. \;\; v_n \;]$$

Se cumple

$$\lambda_i v_i = Av_i, \quad \forall i = 1..n$$

$$[\; \lambda_1 v_1 \;\; \lambda_2 v_2 \;\; .. \;\; \lambda_n v_n \;] = [\; Av_1 \;\; Av_2 \;\; .. \;\; Av_n \;]$$

$$[\; v_1 \;\; v_2 \;\; .. \;\; v_n \;] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = A[\; v_1 \;\; v_2 \;\; .. \;\; v_n \;]$$

$$T\Lambda = AT \Longrightarrow \Lambda = T^{-1}AT$$

Es fácil ver

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

La respuesta natural del sistema lineal es, entonces:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 = Te^{\Lambda t}T^{-1}\vec{x}_0 = Te^{\Lambda t}\vec{z}_0$$

donde usamos las flechas para enfatizar las magnitudes vectoriales. Definimos $\vec{z}_0$:

$$\vec{x}_0 = T\vec{z}_0 = \sum_{i=1}^{n} z_{0i}\vec{v}_i$$

Entonces

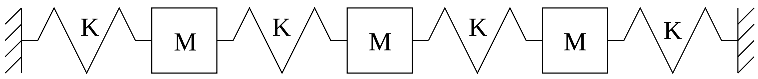
$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} z_{0i}\vec{v}_i$$

- z_{0i} es la componente de $\vec{x}_0$ en la dirección $\vec{v}_i$,
- $e^{\lambda_i t}z_{0i}$ es la componente de $\vec{x}(t)$ en la dirección $\vec{v}_i$

Es la superposición de n **modos de movimiento**:

- que pueden ser excitados independientemente,
- están dados por el par $(\lambda_i, \vec{v}_i)$,
- donde λ_i da la cadencia de la oscilación,
- y $\vec{v}_i$ la dirección del movimiento.

- Esto no nos puede sorprender, ¿verdad?



- Los modos complejos conjugados no pueden ser excitados independientemente (¿por qué?).

Modos complejos conjugados

$$\begin{array}{rcccl} \lambda_i & = & \bar{\lambda}_j & = & \alpha + j\omega \\ v_i & = & \bar{v}_j & = & \vec{v}_r + j\vec{v}_c \\ z_{0i} & = & \bar{z}_{0j} & = & u + jv \end{array}$$

Los sumandos de i y j resultan en un modo "plano":

$$\vec{x}_{ij} = e^{\lambda_i t} z_{0i}\vec{v}_i + e^{\lambda_j t} z_{0j}\vec{v}_j =$$

$$= 2e^{\alpha t}[u\, cos\omega t - v\, sen\omega t]\vec{v}_r + 2e^{\alpha t}[u\, sen\omega t - v\, cos\omega t]\vec{v}_c$$

que viene dado por la cuaterna $(\alpha, \omega, \vec{v}_r, \vec{v}_c)$. Supondremos que hay c modos planos.

Esto nos permite volver a R^n para decir que la respuesta natural se da según $n - c$ subespacios de R^n cada uno asociado a un modo.

La geometría de estos subespacios es relevante:

- ¿A qué máquinas está asociado el modo i?,
- ¿puedo observarlo en mi máquina?,
- ¿desde mi máquina puedo excitarlo?,
- ¿desde qué máquina puedo amortiguarlo más eficazmente?.

Las variables de estado básicas son los ángulos δ_i y velocidades ω_i de las máquinas, a las que se suman variables de estado asociadas a los restantes circuitos del generador, controladores, etc.

$$x = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \omega_1 \\ \ldots \\ \delta_N \\ \omega_N \\ \ldots \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} z_{0i} \vec{v_i};\ \vec{x}_0 = T\vec{z}_0$$

$$\vec{z}_0 = T^{-1}\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ .. \\ \vec{u}_n \end{bmatrix} \vec{x}_0 \Rightarrow z_{0i} = \vec{u}_i \vec{x}_0$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \vec{v}_i \vec{u}_i \vec{x}_0$$

De qué formas y en qué medida una variable de estado participa en un modo?

Definamos el **factor de participación** de la variable de estado k en el modo i:

$$p_k^i = \vec{v}_i[k]\vec{u}_i[k]$$

Interpretación:

1. Si $\vec{x}_0 = \vec{e}_k$:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}[k](t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}^{\,i}[k](t);\ \vec{x}^{\,i}[k](t) = e^{\lambda_i t} p_k^i.$$

   O sea, en qué medida observo cada modo en la variable k si los excité desde la misma variable.

2. P_k^i es la sensibilidad del autovalor i respecto de variaciones en el elemento k, k de la matriz dinámica A.

$$p_k^i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial A_{kk}}$$

Hasta aquí estudiamos la respuesta natural, excitándola exclusivamente con las condiciones iniciales.

Análisis de la respuesta forzada

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & Ax+Bw\\ y & = & Cx\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\dot{z} & = & \Lambda z+T^{-1}Bw\\ y & = & CTz\end{array}\right.$$

$$H(s)=CT[sI-\Lambda]^{-1}T^{-1}B=CT\left[\begin{array}{ccc}\frac{1}{(s-\lambda_1)} & & \\ & .. & \\ & & \frac{1}{s-\lambda_n}\end{array}\right]T^{-1}B=$$

$$=CT[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-\lambda_i}E_i]T^{-1}B=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-\lambda_i}CTE_iT^{-1}B=\sum_{i=1}^{n}\frac{C\vec{v}_i\vec{u}_iB}{s-\lambda_i}$$

que no es otra cosa que la conocida descomposición en fracciones simples.

$$H(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_i}{s-\lambda_i}$$

Matriz de residuos del modo i: $R_i=C\vec{v}_i\vec{u}_iB$.

Matrices de controlabilidad $\mathcal{B}_i=\vec{u}_iB$ y observabilidad $\mathcal{C}_i=C\vec{v}_i$ del modo i:

$$T^{-1}B=\left[\begin{array}{c}u_1\\ ..\\ u_i\\ ..\\ u_n\end{array}\right]B=\left[\begin{array}{c}\mathcal{B}_1\\ ..\\ \mathcal{B}_i\\ ..\\ \mathcal{B}_n\end{array}\right]$$

$$CT=C\left[\begin{array}{ccccc}v_1 & .. & v_i & .. & v_n\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc}\mathcal{C}_1 & .. & \mathcal{C}_i & .. & \mathcal{C}_n\end{array}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{z}_i & = & \lambda_i z_i+\mathcal{B}_iw\\ y & = & \sum_{i=1}^{n}\mathcal{C}_iz_i\end{array}\right.$$

Interpretación:

Dado un conjunto de entradas w (salidas y) las matrices de controlabilidad (observabilidad) nos dan una medida de cuánto es posible incidir en (observar) cada modo desde esas entradas (salidas).