

SISTEMAS LINEALES 2

Examen, diciembre de 2013

Problema 1

1. Considere el sistema dinámico S descrito por: $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{bmatrix}; \omega_0 > 0; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0].$$

- a. Utilizando **la definición** de estabilidad interna, indicar si el sistema S es o no internamente estable. Justifique.
- b. ¿El sistema S es BIBO estable? Justifique.
- c. Calcule la respuesta a impulso de S .

2. Considere la interconexión realimentada del sistema S con un sistema S' cuya transferencia es: $k \frac{\omega_1^4}{(s+\omega_1)^2}$ donde $\omega_1 = 1000\omega_0$ y $k > 0$, ver figura 1.

- a) Realice los diagramas de Bode del opuesto a la ganancia en lazo abierto. Calcule los valores del diagrama real en los puntos notables.
- b) Discuta la estabilidad BIBO del sistema en función de $k > 0$ mediante el criterio de Nyquist. Justifique todas las aproximaciones realizadas.

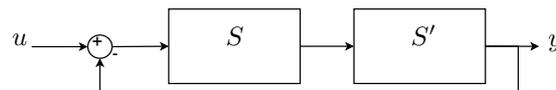


Figura 1:

- Al sistema se le agrega un filtro F , como muestra la figura 2. El mismo es estable y tiene una respuesta en frecuencia como se muestra en la figura 3. Tomando $k = \frac{1}{2000}$, determinar la frecuencia ω_c del filtro en función de ω_0 para maximizar el margen de fase del sistema realimentado. Calcular dicho margen de fase. Justifique.
- Calcular, para la Fig. 2, la salida $y(t)$ en régimen cuando la entrada $u(t)$ es un escalón.
- Calcular, para la Fig. 2, la salida $y(t)$ en régimen cuando la entrada $u(t)$ es: $u(t) = Y(t)\cos(\omega_0 t)$

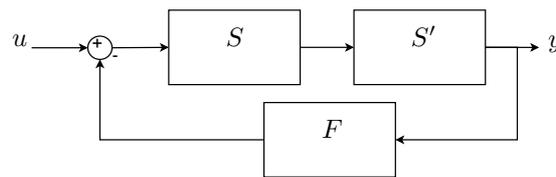


Figura 2:

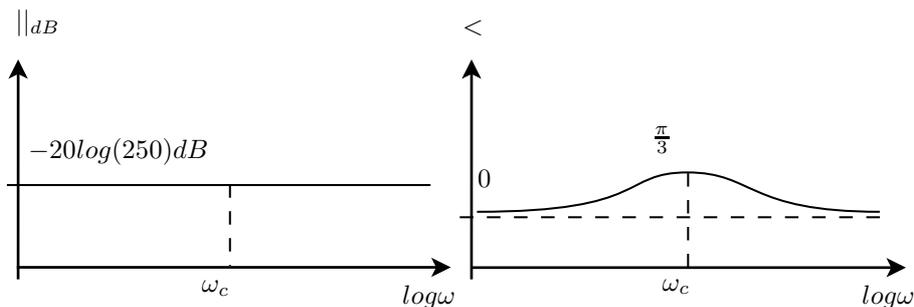


Figura 3: Respuesta en frecuencia del filtro F .

Problema 2

En este problema todos los operacionales son ideales alimentados con $\pm V_{CC}$. No es necesario justificar explícitamente el estado de cada elemento no lineal en cada tramo.

- a. Considere el circuito de la figura 4, con una entrada continua $v_i(t)$ como la de la figura 5: $v_i(t) > 0$ en $t \in (0, T_1)$, $v_i(t) < 0$ en $t \in (T_1, T_1 + T_2)$ y v_i sólo se anula en $t \in \{0, T_1, T_1 + T_2\}$. Asuma $E < V_{CC}$ y que el condensador C arranca inicialmente descargado.

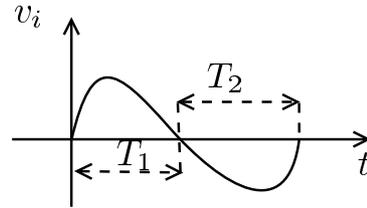
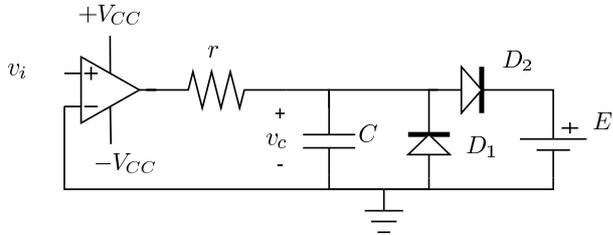


Figura 4: Circuito de la parte a.

Figura 5: Entrada $v_i(t)$

- i) Hallar los valores mínimos de T_1 y T_2 ($T_{1,\text{mín}}$ y $T_{2,\text{mín}}$) para que $v_C(T_1) = E$ y vuelva a ser nulo en $t = T_1 + T_2$. Expresar sus resultados sólo en términos de E , V_{CC} , y $\tau = rC$.
- ii) Asumiendo que se cumplen las restricciones anteriormente calculadas, hallar y graficar $v_C(t)$ para $t \in [0, T_1 + T_2)$. Indique en la gráfica el estado de cada elemento no lineal.
- b. Considere el circuito de la figura 6. Se sabe que $\frac{L}{R} = R \cdot C' = \tau' \ll \tau$, $V_{CC} \gg E$. Asuma que el amplificador operacional A_3 trabaja siempre en la zona lineal.

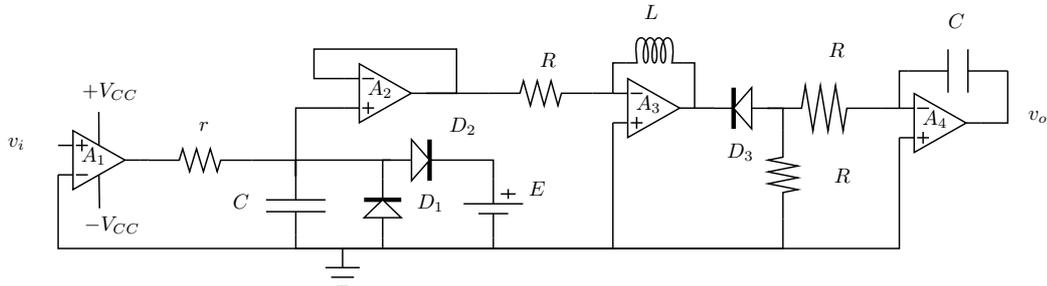


Figura 6: Circuito correspondiente a la parte b del problema 2

- i) Para la misma entrada de la figura 5 con L y C inicialmente en reposo y $v_o(0^-) = n \cdot E$, $n \in \mathbb{N}$, hallar $v_o(t)$ para $t \in [0, T_2 + T_1)$ sabiendo que se cumple $(n + 1) \cdot E < V_{CC}$.

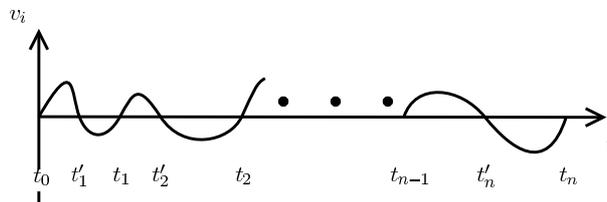


Figura 7: entrada correspondiente a la parte bII del problema 2

- ii) Hallar $v_o(t_i)$ para una entrada como la de la figura 7, donde $n \cdot E < +V_{CC}$ y $\forall i \in [1, n], i \in \mathbb{N}$:
- $T_{i1} = t'_i - t_{i-1} > T_{1,\text{mín}}$ donde $t_0 = 0$
 - $T_{i2} = t_i - t'_i > T_{2,\text{mín}}$

Notar que se piden los valores de v_o sólo evaluado en t_i

- iii) 1) Cuál puede ser la utilidad de este circuito?
 2) Cómo mejoraría el circuito para ser inmune a un ruido pequeño sumado a la entrada?

Problema 1 - Solución

a. i) $\dot{x} = Ax \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \Rightarrow x(t) = Y(t) \begin{pmatrix} e^{-\omega_0 t}x_{01} + te^{-\omega_0 t}x_{02} \\ e^{-\omega_0 t}x_{02} \end{pmatrix} \rightarrow \sigma \quad \forall x_{01}, x_{02} \in R.$

Por lo tanto el sistema es internamente estable.

ii) Como el sistema es internamente estable, entonces también es BIBO estable.

iii) $h(t) = te^{-\omega_0 t}Y(t).$

b. i) $L(s) = C(sI - A)^{-1}Bk \frac{\omega_1^4}{(s+\omega_1)^2} = k \frac{\omega_1^4}{(s+\omega_0)^2(s+\omega_1)^2}.$

El diagrama de bode se presenta en la figura 8. En los puntos notables $j\omega_0$ y $j\omega_1$ el diagrama real vale: $|L(j\omega_0)| \approx k\frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{\omega_0})^2 < L(j\omega_0) \approx -\frac{\pi}{2}$ $|L(j\omega_1)| \approx \frac{k}{2} < L(j\omega_1) \approx -\frac{3\pi}{2}.$

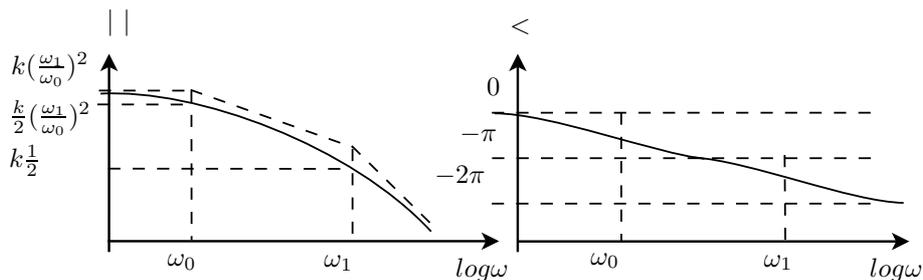


Figura 8:

ii) El diagrama de Nyquist se presenta en la figura 9. El punto de corte en la semirecta real negativa se da aproximadamente a la frecuencia $\sqrt{\omega_0\omega_1} = \sqrt{1000}\omega_0.$ En este frecuencia el módulo vale: $L(j\sqrt{1000}\omega_0) \approx 1000k.$ Por lo tanto, para que el sistema sea BIBO estable k debe cumplir: $k < \frac{1}{1000}.$

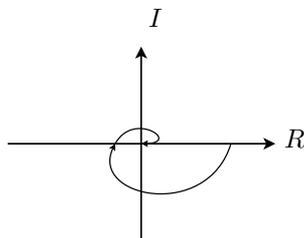


Figura 9:

c. Como la ganancia se verá atenuada en la misma magnitud para toda las frecuencias, el diagrama de bode de módulo es como el de la figura 10. Donde se observa que a la frecuencia ω_0 el módulo vale 1. Por lo tanto, el margen de fase estará determinado por la fase $L(j\omega)$ a la frecuencia $\omega_0.$ Por este motivo, si $\omega_c = \omega_0$ la fase se adelantará lo más posible y por tanto se maximizará el margen de fase.

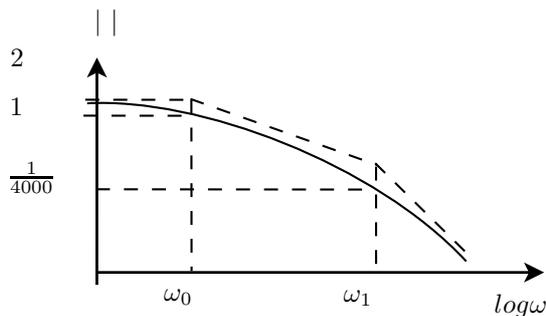


Figura 10:

En esta condición el diagrama de Nyquist será como el de la figura 11. El nuevo margen de fase será: $\pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

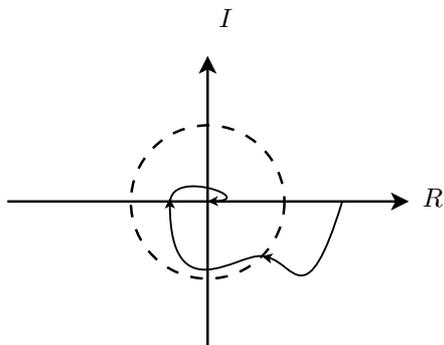


Figura 11:

d. Por el teorema del valor final: $y(t) \rightarrow \frac{H_{SS'}(0)}{1+L(0)} = \frac{500}{1+2}$.

e. $y(t) \rightarrow Re(\frac{250 \angle -\frac{\pi}{2}}{1+1 \angle -\frac{\pi}{6}} e^{j\omega_0 t})$