Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Curso Anual 2013**

EXAMEN DICIEMBRE DE 2013

Cédula	Apellido y Nombre

Ejercicio 1 (30 puntos)

1. Se consideran los puntos $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ tales que $P = (1, 2, 1)$, $Q = (0, 1, 0)$ y $R = (-1, 1, -1)$.
   a) Hallar las ecuaciones paramétricas y reducida del plano π_1 determinado por P, Q y R.
   b) Hallar un plano paralelo a π_1 que pase por el punto $(1, 1, 0)$.
2. Se considera el plano π_2 de ecuación reducida $2x + y - z = 0$.
   a) Hallar $S = \pi_1 \cap \pi_2$ la intersección de los planos π_1 y π_2. Interpretar geométricamente.
   b) Probar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Hallar una base de S e indicar su dimensión.
3. *a*) Sea un plano π de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ y el punto $A = (x_0, y_0, z_0)$. Probar que la distancia del punto A al plano π está dada por:
   $$d(A, \pi) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$
   b) Hallar $d(P, \pi_2)$ distancia del punto $P = (1, 2, 1)$ al plano π_2 definido en la parte 2.

Ejercicio 2 (35 puntos)

1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y S un subconjunto de V:
   a) Definir S subespacio vectorial de V.
   b) Probar que si S es un subespacio de V entonces $0 \in S$ (todo subespacio contiene al vector nulo).
   c) Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V:
      1) Probar que $S_1 \cap S_2$ es subespacio vectorial de V.
      2) ¿$S_1 \cup S_2$ es necesariamente un subespacio vectorial de V? Probar o dar un contraejemplo.

2. Sea $V = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 5 con cuerpo en los reales. Se consideran en él los siguientes subconjuntos:

   - $S_1 = \{p \in V : p(-x) = p(x)\, \forall\, x \in \mathbb{R}\}$,
   - $S_2 = \{p \in V : p(-x) = -p(x)\, \forall\, x \in \mathbb{R}\}$,
   - $S_3 = \{p \in V : p(0) = p'(1) = 0\}$,
   - $S_4 = \{p \in V : \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty\}$.

   a) Indicar cuál de ellos es un subespacio y cuál no.

   b) Cuando corresponda, hallar una base y la correspondiente dimensión de cada subespacio.

   c) Hallar $S_1 + S_2$ e indicar si la suma es directa. Hallar $S_1 \cap S_3$ y $\dim(S_1 + S_3)$.

   d) Encontrar un subespacio W de V tal que $V = S_3 \oplus W$.

Ejercicio 3 (35 puntos)

1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ es:

$$_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Para $i = 1, 2, 3, 4$, hallar $T(v_i)$ en función de v_1, v_2, v_3 y v_4.

   b) Sin hallar los subespacios indicar las dimensiones de $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ (núcleo e imagen de T). Justificar.

   c) ¿Es T invertible? Justificar.

   d) Probar que $\mathrm{N}(T) = [v_1 + v_2 + v_3 - v_4]$ e $\mathrm{Im}(T) = [v_1 - v_3, v_2 + v_3, -2v_3 + v_4]$.

2. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que dos. Se consideran las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$T(a, b, c, d) = ax^2 + (b + c)x + d \quad \text{y}$$

$$_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$$

   a) Hallar una matriz asociada a la composición $S \circ T$ en bases a elección y hallar $(S \circ T)(X)$ $\forall\, X \in \mathbb{R}^4$.

   b) Hallar $\mathrm{N}(T)$ y $\mathrm{N}(S \circ T)$. Verificar que $\mathrm{N}(T) \subset \mathrm{N}(S \circ T)$ y encontrar $v \in \mathrm{N}(S \circ T)$ tal que $v \notin \mathrm{N}(T)$.

   c) Probar que $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(S \circ T)$.