a) i) Sea V_1 el voltaje a la salida del primer operacional, identificando a ambos operacionales en una configuración inversora, deducimos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{V_1(s)}{V_i(s)} = -\frac{L_1 s + R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{L_1 s} = -\frac{L_1 C_1 s^2 + R_1 C_1 s + 1}{L_1 C_1 s^2}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_1(s)} = -\frac{\frac{1}{C_2 s}}{L_2 s + R_2} = -\frac{1}{C_2 s\left(L_2 s + R_2\right)}$$

Multiplicando ambas ecuaciones obtenemos:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + \frac{R_1}{L_1}s + \frac{1}{L_1 C_1}}{L_2 C_2 s^3\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right)}$$

ii) Del término independiente del numerador deducimos que debe cumplirse $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$. Además

$$\begin{cases} L_1 = \frac{R_1^2.C_1}{4} \Rightarrow \frac{R_1^2}{L_1^2} = \frac{4}{L_1.C_1} \Rightarrow \frac{R_1}{L_1} = \frac{2}{\sqrt{L_1.C_1}} = 2.\omega_0 \\ C_2 = \frac{1}{1000.L_2.\omega_0^2} \Rightarrow \frac{1}{L_2.C_2} = 1000.\omega_0^2 \\ R_2 = 1000.L_2.\omega_0 \Rightarrow \frac{R_2}{L_2} = 1000.\omega_0 \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en la fórmula para H(s):

$$H(s) = 1000.\omega_0^2.\frac{s^2 + 2.\omega_0.s + \omega_0^2}{s^3.\left(s + 1000.\omega_0\right)} = 1000.\omega_0^2.\frac{\left(s + \omega_0\right)^2}{s^3.\left(s + 1000.\omega_0\right)}$$

b) La transferencia de lazo abierto es :

$$-L(s) = -k.H(s).H_2(s)$$

Donde $H_2(s) = \dfrac{1}{R_3 C_3 s + 1} = \dfrac{1}{\frac{s}{1000\omega_0} + 1} = \dfrac{1000\omega_0}{s + 1000\omega_0}$ es la transferencia del pasabajos formado por R_3 y C_3

Finalmente

$$L(s) = 10^6.k.\omega_0^3\frac{s^2 + 2.\omega_0.s + \omega_0^2}{s^3.\left(s + 1000.\omega_0\right)} = 10^6.\omega_0^3.\frac{\left(s + \omega_0\right)^2}{s^3.\left(s + 1000.\omega_0\right)^2}$$

Realizamos el diagrama de Bode que se muestra en la figura 1:

Para hacer el diagrama de Nyquist debemos elegir una curva cerrada que abarque todo el semiplano derecho y que no pase por ningún polo de L.

Como en este caso $L(s)$ tiene un polo en el origen, vamos a tener que usar una curva como la de la figura 2, en la cual el mapeo de la curva a través de L del tramo 2-3 lo sacamos de diagrama de Bode de la figura 1.

Como el grado del numerador es menor que el del denominador la curva 3-4 se mapea al origen cuando su radio tiende a infinito.

El mapeo de la curva 1-2 lo desarrollamos a continuación, para ello lo primero que tenemos que hacer es parametrizar la curva $\Gamma_{1-2} = r.e^{j.\theta}$ con θ yendo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y con r tendiendo a 0.

$$L\left(r.e^{j\theta}\right) \underset{r\to 0}{\simeq} \frac{10^6.k.\omega_0^5}{r^3.e^{3.j.\theta}10^6\omega_0^2} = k.\frac{\omega_0^3}{10.r^3}.e^{-3.j.\theta}$$

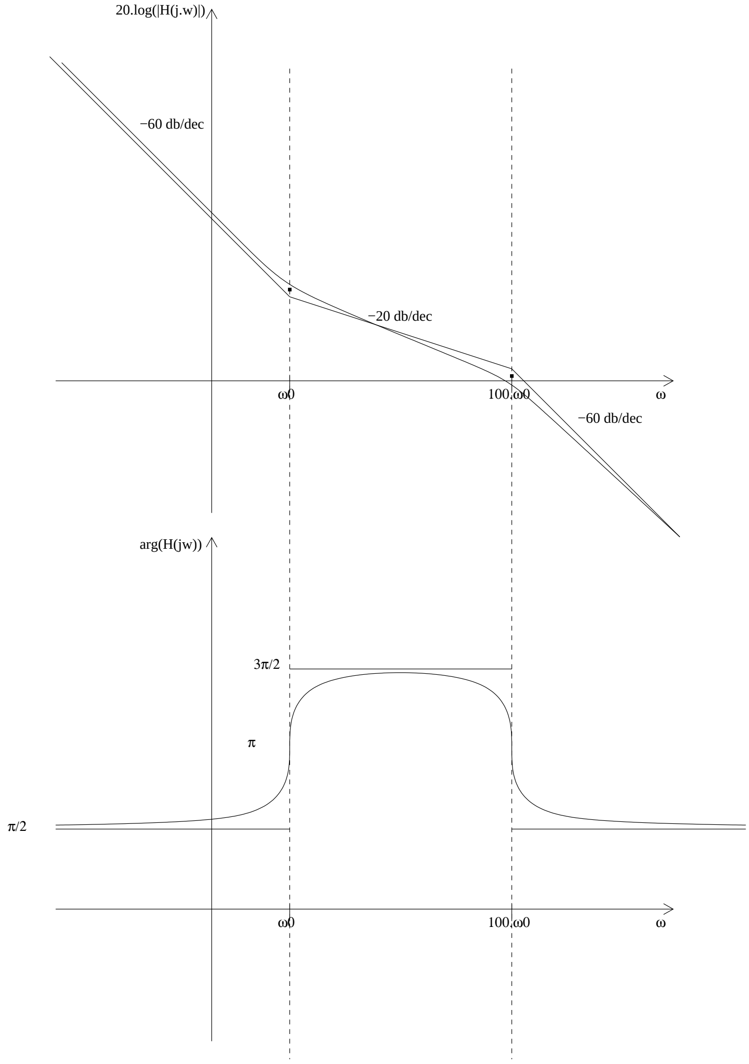

Figura 1: Diagrama de Bode

La curva resultante es un arco de circunferencia cuyo radio tiende a infinito y su argumento arranca en 0 y disminuye hasta llegar a $-\frac{3.\pi}{2}$, que es donde arranca el Bode . Con estos datos el diagrama de Nyquist nos queda como el de la figura 2.

Como el número de polos encerrados por la curva es cero, para que el sistema sea estable según el criterio de Nyquist, el número de vueltas que encierra al punto -1 debe ser cero. Por lo tanto se tiene que cumplir que el punto -1 debe estar en la región etiquetada como $N = 0$ para que el sistema sea estable. Es decir que α debe ser mayor que 1 y β menor.

Del diagrama de Bode se puede ver que las frecuencias para las cuales $H(j\omega)$ es real negativo son ω_0 y $1000\omega_0$, esta aproximación es razonable ya que las raíces están a tres décadas de distancia.

Esto se traduce en que $\alpha = |''A\beta''\,(j.\omega_0)|$ y $\beta = |''A\beta''\,(1000.j.\omega_0)|$. por lo que tenemos:

$$\alpha \simeq \left| \frac{10^6.k.\omega_0^5.\,(j+1)^2}{-j10^6.\omega_0^5} \right| = 2.k$$

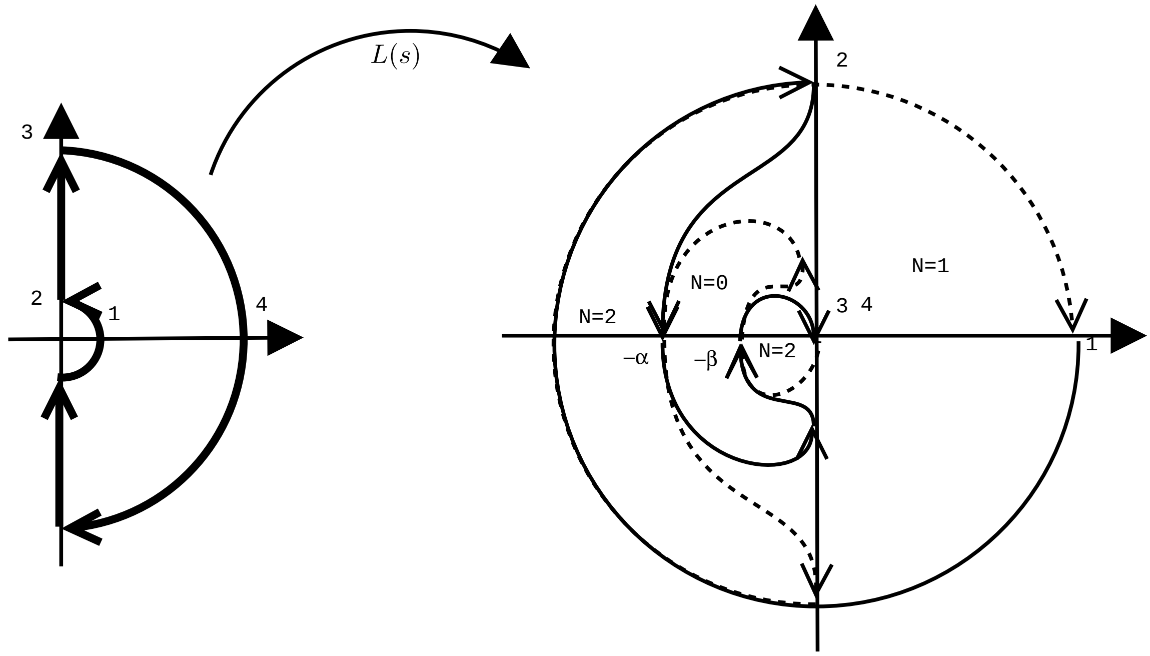

Figura 2: Diagrama de Nyquist

$$\beta \simeq \left| \frac{10^{11}.k.\omega_0^5}{-j10^{15}.\omega_0^5.\left(j+1\right)^2} \right| = \frac{k}{2000}$$

Por lo tanto para que el sistema sea estable se tiene que cumplir que $\boxed{0{,}5 < k < 2000}$

c) La transferencia de lazo cerrado es (cuentas mediante) $H_{CL}(s) = \frac{kH(s)}{1+L(s)}$.

Los polos del numerador en el origen se cancelan con los polos del denominador. La transferencia $H_{CL}(s)$ por lo tanto no tiene polos en el C^+ mientras se cumpla el criterio de Nyquist. Para una entrada escalón: $V_o(s) = H_{CL}(s)V_i(s) = \frac{H_{CL}(s)}{s}$, el único polo está en el origen y es de orden 1 por lo que podemos aplicar el teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} v_o(t) = \lim_{s\to 0} sV_o(s) = \lim_{s\to 0} H_{CL}(s)$$

$$H_{CL}(s) = \frac{k1000\omega_0^2(s+\omega_0)^2(s+1000\omega_0)}{s^3(s+1000\omega_0)^2 + k10^6\omega_0^2(s+\omega_0)^2}$$

Evaluando en 0: $H_{CL}(0) = 1$ entonces $\lim_{t\to\infty} v_o(t) = \lim_{s\to 0} sV_o(s) = 1$.

d) Usando la condición de Barkhausen ($L(j\omega^\star) = -1$) las frecuencias de oscilación y los valores de k para los cuales el sistema oscila los encontramos en los casos límites del diagrama de Nyquist, es decir cuando $\alpha = -1$ o $\beta = -1$. Hay dos frecuencias de oscilación diferentes y son ω_0 y $1000\omega_0$ y las condiciones de oscilación son $k = 0{,}5$ y $k = 2000$ respectivamente.