Solución del ejercicio 3

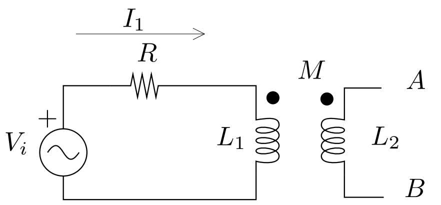

Figura 1: Cálculo del voltaje de vacío

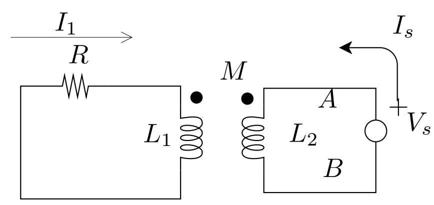

Figura 2: Cálculo de impedancia de salida

a. Primero calculamos el voltaje de vacío V_{AB} en la figura 1. Por estar en vacío la corriente por el secundario es nula, así que las ecuaciones en el primario y secundario quedan:

$$V_i = RI_1 + L_1 s I_1 \tag{1}$$
$$V_{AB} = MsI_1 \tag{2}$$

Despejando I_1 de 1, sustituyendo en 2:

$$V_{AB}(s) = \frac{Ms}{R + L_1 s} V_i(s) \tag{3}$$

Para calcular la impedancia de salida, anulamos las fuentes independientes (sólo la fuente de voltaje ya que no hay condiciones iniciales), conectamos una fuente V_s entre los terminales A y B y calculamos la corriente I_s que esta entrega, luego realizamos el cociente. Esto lo ilustramos en la figura 2

Planteando las mallas en el primario y el secundario obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$-RI_1 = L_1 s I_1 + MsI_s \Rightarrow I_1 = \frac{-Ms}{L_1 s + R} \tag{4}$$
$$V_s = L_2 s I_s + MsI_1 = \left(L_2 s - \frac{M^2 s^2}{L_1 s + R} \right) I_s \tag{5}$$
$$\Rightarrow \boxed{Z_{AB} = L_2 s - \frac{M^2 s^2}{L_1 s + R}} \tag{6}$$

b. i) Para esta parte no tenemos más que aplicar el equivalente Thévenin, el mismo está en la figura 3. Donde $L_1 = 3L$, $L_2 = L$ y por ser el transformador perfecto $M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{3}L$

El voltaje V_o lo podemos calcular como un divisor:

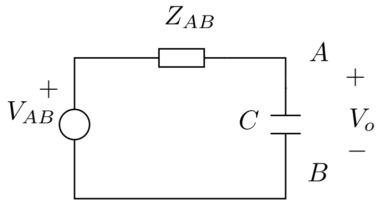

Figura 3: Equivalente Thévenin

$$V_o = \frac{\frac{1}{Cs}}{Z_{AB} + \frac{1}{Cs}} V_{AB} = \frac{1}{1 + Cs\left(Ls - \frac{3L^2s^2}{3Ls+R}\right)} \frac{Ms}{L_1 s + R} V_i \tag{7}$$

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{Ms}{3Ls + R + RLCs^2} = \frac{\frac{M}{R}s}{LCs^2 + 3\frac{L}{R}s + 1} \tag{8}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{\frac{M}{LRC}s}{s^2 + \frac{3}{RC} + \frac{1}{LC}}} \tag{9}$$

ii)

$$H(s) = \frac{\sqrt{3}\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{3}{RC} + \frac{1}{LC}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{RC}} \tag{10}$$

$$\frac{1}{LC} = 2\alpha^2 \Rightarrow L = \frac{1}{2\alpha^2 C} = \frac{R^2C^2}{2C} \qquad \boxed{L = \frac{R^2}{2C}} \tag{11}$$

c.

$$V_i(s) = \frac{E}{s^2}$$

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{\sqrt{3}\alpha^2 E}{s(s^2 + 3\alpha s + 2\alpha^2)} = \frac{\sqrt{3}\alpha^2 E}{s(s+\alpha)(s+2\alpha)} \tag{12}$$

$$\text{(por tapadita)} \ = E\sqrt{3}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{2(s+2\alpha)}\right) \tag{13}$$

Antitransformando:

$$v_o(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}E\left(1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}\right)Y(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}E\left(1 - e^{-\alpha t}\right)^2 Y(t)$$