Sistemas Lineales 2 - Práctico 8

Estabilidad Interna y Estabilidad de sistemas realimentados

2^{do} semestre 2013

1) El esquema de la figura muestra un sistema electro-mecánico movido por un motor eléctrico de corriente continua

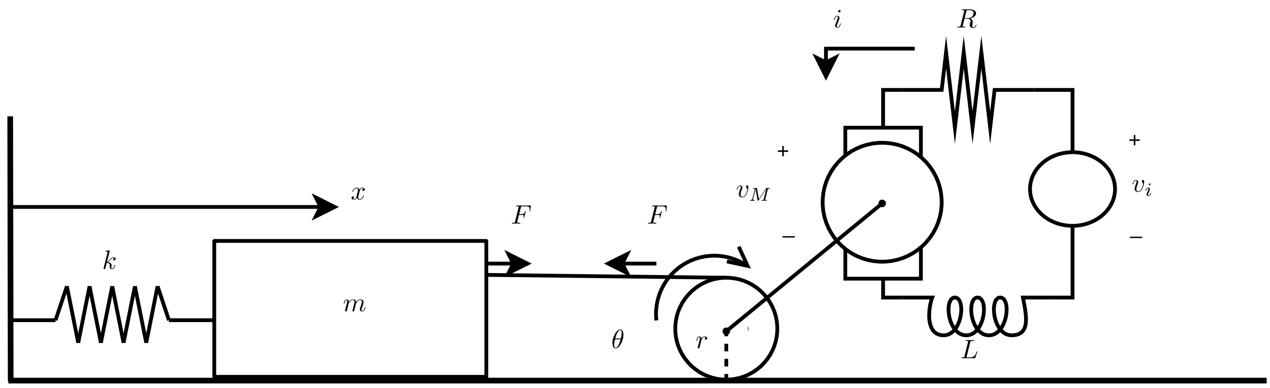


Figura 1.1: Sistema del problema 1

e imanes permanentes. El comportamiento dinámico de dicho motor es descrito por las siguientes ecuaciones:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_M(t) = v_i(t)\,,$$
$$\tau(t) = \kappa\, i(t)\,,\; v_M(t) = \kappa\,\omega(t)\,,$$

donde $L > 0$, $R > 0$, y $\kappa > 0$ son parámetros dados, $\omega(t)$ es la velocidad angular del motor, $\tau(t)$ es el torque generado por el motor, y $v_i(t)$ es la tensión con que este es excitado. El eje del motor está soldado a un disco, de radio r, que enrolla una cuerda que en el otro extremo tiene colgando una masa m que a su vez está unida a un resorte de constante k_1. El sistema compuesto por (el disco) + (el eje) + (el rotor (del motor)) tiene momento de inercia J. Se supone que la masa de la cuerda es despreciable, por lo que la tensión $F(t)$ es la misma a lo largo de toda la cuerda. Vea la figura donde se muestra la fuerza ejercida por la cuerda sobre el disco, y por la cuerda sobre la masa m. $x(t)$ es la desviación en la posición de la masa con respecto a la longitud natural del resorte; véase la figura 1.1. $\theta(t)$, indicada en la figura, indica la posición angular del eje con respecto a alguna referencia prefijada. Con las direcciones indicadas en la figura 1.1 tenemos que $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$.
Se pide:

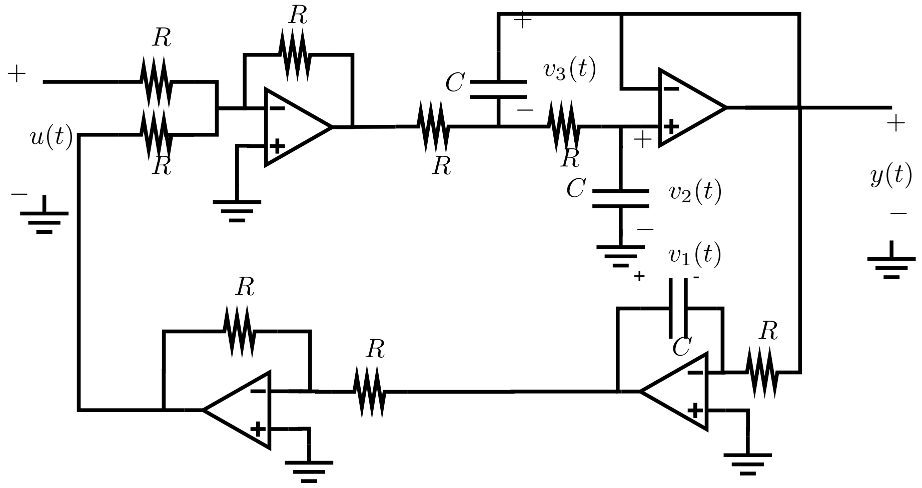
(a) Halle la función de transferencia $H(s)$ que vincula la entrada v_i con la salida x del sistema. Es decir, halle $H(s)$ tal que, con condiciones iniciales nulas, se verifica que $X(s) = H(s)\,V_i(s)$.

(b) Considere los siguientes valores para los parámetros del problema:

$$R = 7\Omega,\; L = 1Hy,\; k = 2\frac{V.s}{rad},\; r = 0.189,\; k_1 = 15.10\frac{N}{m},\; m = 2kg,\; J = 0.3067\frac{N.m.s^2}{rad}$$

Dada la función $H(s)$ calculada en **(a)**, determine, usando dichos valores para los parámetros, si el sistema es BIBO estable(Puede utilizar software de cálculo numérico).

2) Considere el circuito de la figura, en donde $RC = \tau = 1[s]$:



(a) Escriba una descripción de la forma:

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t), \quad x(o) = x_o, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t) \tag{2.2}$$

para el comportamiento dinámico del circuito arriba considerado. Calcule explícitamente las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $D \in \Re$, (solo en términos de los datos del problema) para:

$$x(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

(b) Calcule los valores propios de A

¿Es el sistema internamente estable?

¿Es posible afirmar algo acerca de la estabilidad BIBO del sistema?

(c) Sea $y(t)$ la respuesta, con condiciones iniciales nulas, a la entrada

$$u = \begin{cases} 0, & si \quad t < 0 \\ 1, & si \quad 0 \leq t < 1 \\ 0, & si \quad t \geq 1 \end{cases}.$$

¿Cuánto vale $\lim_{t\to+\infty} y(t)$? Justifique.

(d) Sea $y(t)$ la respuesta total de nuestro sistema para el caso $v_1(0) = v_2(0) = v_3(0) = 1$,

$$u = \begin{cases} 0, & si \quad t < 0 \\ 1, & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Halle $H = L\{y\}$

Calcule $\lim_{t\to+\infty} y(t)$

3) Considere un sistema dinámico descripto por:

$$\dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

$$y(t) = C.x(t) + D.u(t) \tag{3.2}$$

y donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad, D = 0$$

(a) Calcule los valores propios de A.

¿Es el sistema internamente estable?

¿Acaso es posible afirmar algo acerca de la estabilidad BIBO del sistema?

(b) Calcule la respuesta al impulso h del sistema, y también $H = L\{h\}$.¿Es este sistema BIBO estable?

4) Considere dos sistemas con funciones de transferencia H_1 y H_2, reales-racionales y propias, los cuales se interconectan en lazo cerrado como lo muestra la figura 4.1. Definamos las funciones $L = H_1 H_2, \;\; F_1 = (1 + L)$.

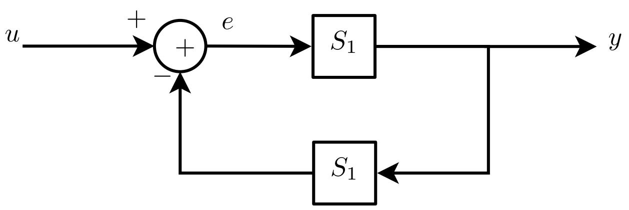


Figura 4.1:

Considere los siguientes casos:

A. $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)^3}, \; H_2(s) = 1$ **B.** $H_1(s) = -\frac{1}{(s+1)^2}, \; H_2(s) = 1$ **C.** $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)^4}, \; H_2(s) = 1$

D. $H_1(s) = 2\frac{s+4}{s+3}\frac{1}{s-2}, \; H_2(s) = 1$ **E.** $H_1(s) = \frac{s+1}{(s-1)^3}, \; H_2(s) = 1$ **F.** $H_1(s) = \frac{s+\frac{3}{2}}{s-\frac{1}{2}}, \; H_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

G. $H_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \; H_2(s) = \frac{1}{s}$ **H.** $H_1(s) = \frac{1}{s^2+1}, \; H_2(s) = \frac{10s}{s+10}$ **I.** $H_1(s) = \frac{1}{s^2}, \; H_2(s) = 10\frac{s+1}{s+10}$

Para cada uno de los casos:

(a) Realice el diagrama de Bode (módulo y fase) correspondiente a L.

(b) Realice el diagrama de Nyquist correspondiente a L y aplique el criterio de estabilidad de Nyquist a fin de determinar la estabilidad BIBO de la interconexión.

(c) Corrobore las conclusiones a las que arribó en la parte **b)** acerca de la estabilidad de la interconexión a través del cálculo (en cada caso) de los ceros de la función F_1

(d) Determine, para los casos A,B, G,H los márgenes de fase y ganancia.

(e) Para los casos de realimentación unitaria ($H_2 = 1$) se define la señal de error $e = u - y$. Determine el error en régimen cuando la entrada es un escalón unitario.

5) La estabilidad de un sistema en lazo cerrado cuya función de transferencia en lazo abierto es

$$-k.L(s) = -A\beta(s) = k\frac{1+T_2.s}{s^2\,(1+T_1.s)}, T_1 > 0,\ T_2 > 0,$$

depende de los valores relativos de T_1 y T_2. Trazar los diagramas de Bode y Nyquist de L para $T_1 > T_2$,$T_1 = T_2$, $T_1 < T_2$. Analizar en cada caso la estabilidad BIBO del sistema en lazo cerrado, aplicando el criterio de Nyquist.

6) Considere un sistema en lazo cerrado conformado por la interconexión de dos subsistemas tal que la función de transferencia de lazo abierto $-k.L = -A\beta$ está dada por:

(i) $k.L(s) = A.\beta(s) = k\dfrac{1}{s(1+T.s)}$ **(ii)** $k.L(s) = A.\beta(s) = k\dfrac{s+3}{s(s-1)}$ **(iii)** $k.L(s) = A.\beta(s) = k\dfrac{(s+10)(s+20)}{s(s-10)(s+40)}$

Dibuje en cada uno de los casos el diagrama de Bode y el diagrama de Nyquist (de L) y analice en cada caso, aplicando el criterio de Nyquist, la estabilidad BIBO del sistema en lazo cerrado correspondiente.

7) Segundo parcial, Sistemas Lineales 2, diciembre 1999

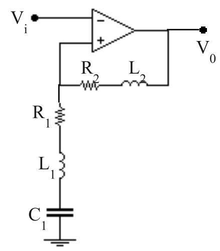


Figura 7.1: Nota: las entradas del operacional están al revés

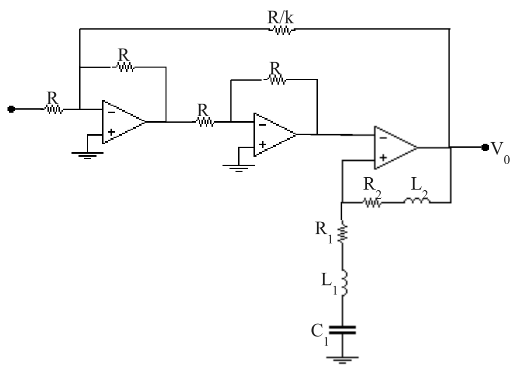


Figura 7.2: Nota: las entradas del operacional de más a la derecha están al revés

(a) Halle la transferencia $H\,(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ del circuito de la figura 7.1, en el cual el operacional es ideal.

(b) Hallar la ganancia de lazo abierto $-k.L = -A\beta$ del circuito de la figura 7.2, con operacionales ideales.

(c) Realizar los Diagramas de Bode de la transferencia hallada. Para esta parte se cumplen las siguientes relaciones. $L_2.C_1 = \dfrac{1}{10.\omega_0^2}$, $L_1.C_1 = \dfrac{1}{10^5.\omega_0^2}$, $R_2.C_1 = \dfrac{11}{10.\omega_0}$ y $R_1.C_1 = \dfrac{11}{10^3.\omega_0}$
Sugerencia: observar que $L_2 \gg L_1$ y $R_2 \gg R_1$.

(d) Estudiar la estabilidad del circuito en función de $k > 0$.

8) Examen, Sistemas Lineales, Marzo 1991

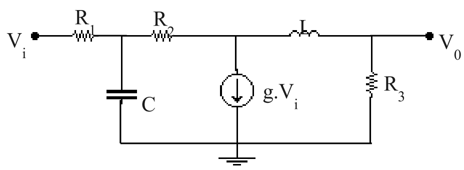


Figura 8.1:

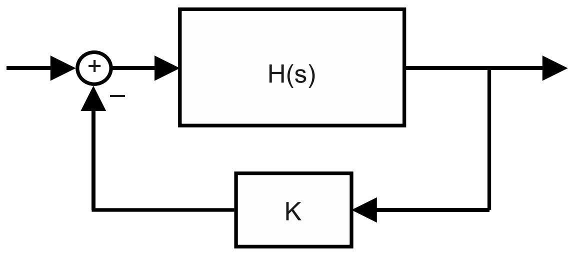


Figura 8.2:

Dado el circuito de la figura 8.1, hallar:

(a) Transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

(b) Imponiendo $R_1 = R_2 = R_3 = R$, $\tau = R.C = \dfrac{2L}{R}$ y $10gR = 1$, calcular y graficar la respuesta al escalón $v_i(t) = E.Y(t)$ (asumiendo que el circuito se encuentra inicialmente relajado).

(c) Se realimenta este circuito como se muestra en la figura 8.2. Hallar una condición en K para que el sistema en lazo cerrado de la figura 8.2 sea BIBO estable.

9) Examen, Sistemas Lineales 2, Julio 2004

En todo el ejercicio los operacionales son ideales.

(a) En el circuito de la figura 9.1 hallar la transferencia $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}$.

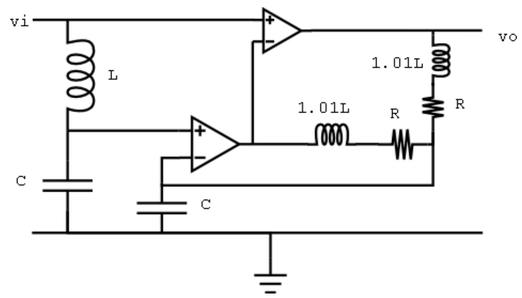


Figura 9.1:

(b) i. En el circuito de la figura 9.2 hallar la transferencia de lazo abierto $-k.L = -A\beta$.

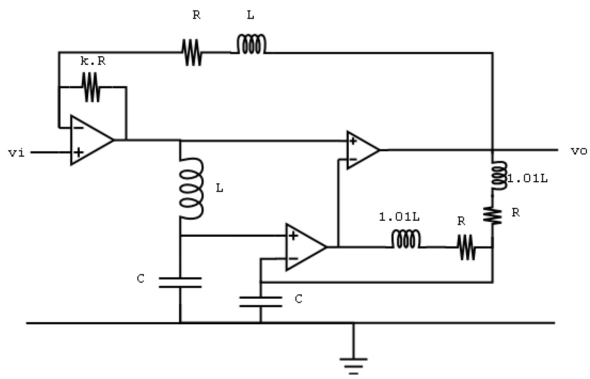


Figura 9.2:

ii. Realizar el diagrama de Bode de $k.L = A\beta$ sabiendo que $R = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{L}{C}}$.
iii. Estudie la estabilidad según el criterio de Nyquist. Si realiza alguna aproximación, justifíquela.

10) Sea el circuito de la figura 10.1

(a) Encontrar la transferencia de lazo abierto si se cumple: $\dfrac{R_2}{L_1} = 15$, $\dfrac{R_2}{L_2} = 20$, $\dfrac{1}{L_3C_1} = 16$. Demostrar que dicha transferencia se puede expresar de la forma

$$-k.L = -A\beta = -K\frac{s^2+35s+300}{s\,(s^2+16)}$$

(b) Estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando el criterio de Nyquist

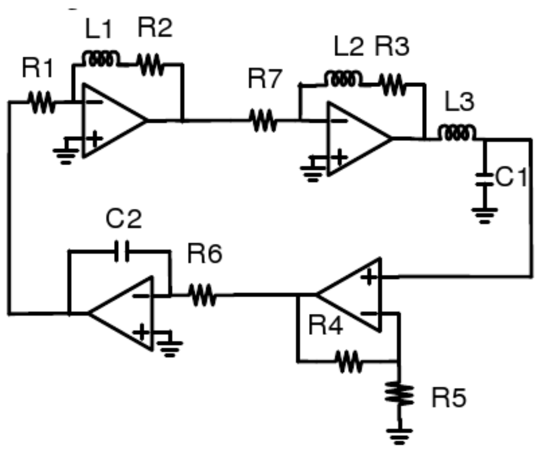


Figura 10.1: