Solución del Ejercicio 1

a. i) Para hallar la transferencia usamos el equivalente thévenin de la figura 1.

$$V_o = \frac{R}{R+Z_{AB}}V_{AB} = \frac{R}{R+R\frac{\tau^2s^2+\tau s+1}{\tau s(1-4\tau s)}}\frac{1}{\tau s}\frac{5+\tau s}{1-4\tau s}V_i = \frac{5+\tau s}{\tau s-4\tau^2s^2+\tau^2s^2+\tau s+1}V_i \tag{1}$$

$$H(s) = \frac{5+\tau s}{1+2\tau s-3\tau^2s^2} = \boxed{-\frac{\omega_0}{3}\frac{5\omega_0+s}{s^2-\frac{2}{3}\omega_0 s-\frac{\omega_0^2}{3}}} \tag{2}$$

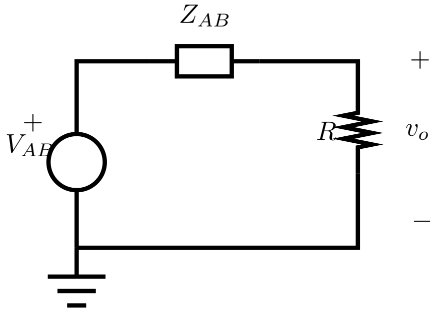

Figura 1: Cálculo de transferencia

ii) Para ver la estabilidad BIBO obtenemos los polos del sistema:

$$\omega_0\left(\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}\right) = \omega_0\left(\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}\right) = \left\{\omega_0, -\frac{1}{3}\omega_0\right\} \tag{3}$$

Tiene un polo con parte real positiva (ω_0), por lo tanto no es estable BIBO.

b. i) Lo primero que hacemos es hallar la transferencia de lazo abierto, para ello abrimos el lazo a la salida del integrador, ya que tiene impedancia de salida nula. Otra opción sería a la salida del primer operacional y daría el mismo resultado. Inyectamos una señal e_i y calculamos la transferencia $G_{OL}(s) = \dfrac{e_o}{e_i}$

Identificamos el bloque de la parte anterior y dos inversores en la figura 2. El inversor 1 solo multiplica por -1 mientras que el otro tiene transferencia $-\dfrac{R+\frac{1}{10Cs}}{k.R} = \dfrac{s+\frac{\omega_0}{10}}{ks}$ y vemos que $e_o(s) = H(s).\dfrac{1}{k\tau s}e_i(s)$.

Así la transferencia de lazo abierto nos da $G_{OL}(s) = H(s)\dfrac{s+\frac{\omega_0}{10}}{ks} = \dfrac{-\omega_0}{3ks}\dfrac{\left(s+\frac{\omega_0}{10}\right)(s+5\omega_0)}{(s-\omega_0)\left(s+\frac{\omega_0}{3}\right)}$. En la figura

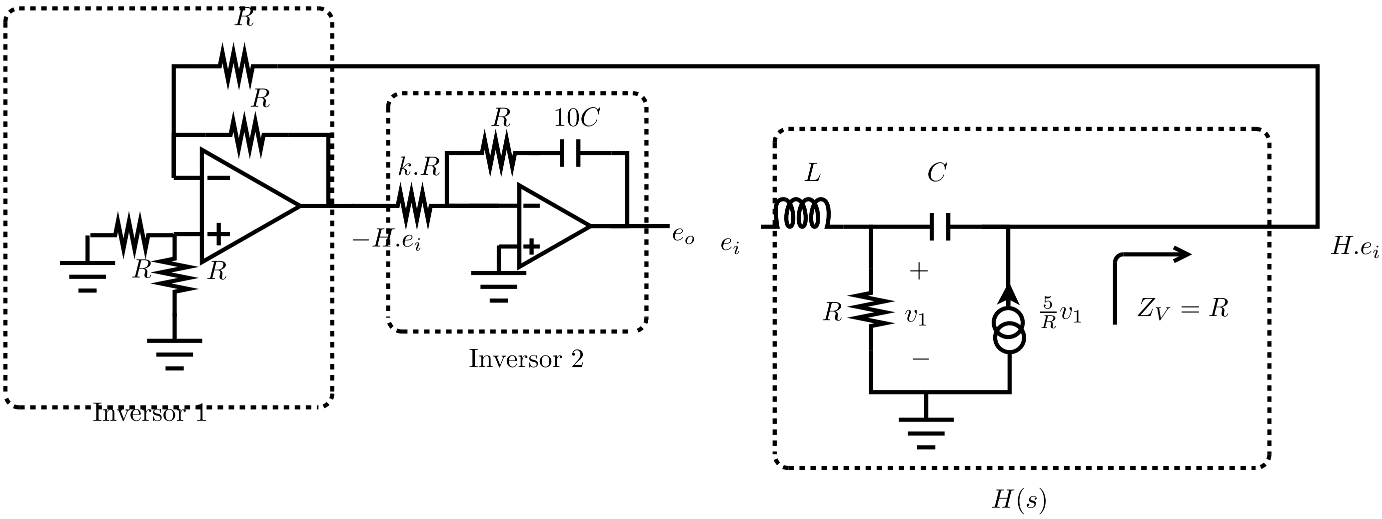

Figura 2: Sistema realimentado

3 mostramos los diagramas de Bode y Nyquist de $L(j\omega) = -G_{OL}(j\omega)$. Como L tiene un polo encerrado

por la curva $\mathcal{C}$, para que el sistema en lazo cerrado sea estable la curva de Nyquist debe encerrar al -1 en sentido horario (es decir $N = -1$). Sea $-\alpha$ el punto de corte de la curva con el eje real, debemos hacer que $\alpha > 1$.

Para hallar el punto de corte podemos usar la aproximación $\omega \gg \frac{\omega_0}{10}$ ya que en el diagrama de Bode vemos que eso ocurre a una frecuencia entre ω_0 y $5\omega_0$.

$$L(j\omega_1) = \frac{\omega_0}{3kj\omega_1}\frac{\left(j\omega_1 + \frac{\omega_0}{10}\right)(j\omega_1 + 5\omega_0)}{(j\omega_1 - \omega_0)\left(j\omega_1 + \frac{\omega_0}{3}\right)} \simeq \frac{\omega_0}{3kj\omega_1}\frac{j\omega_1\,(j\omega_1 + 5\omega_0)}{(j\omega_1 - \omega_0)\left(j\omega_1 + \frac{\omega_0}{3}\right)} \tag{4}$$

$$= \frac{\omega_0}{3k}\frac{(j\omega_1 + 5\omega_0)}{(j\omega_1 - \omega_0)\left(j\omega_1 + \frac{\omega_0}{3}\right)} = -\alpha \tag{5}$$

$$\Rightarrow \omega_0(j\omega_1 + 5\omega_0) = -3k\alpha\,(j\omega_1 - \omega_0)\left(j\omega_1 + \frac{\omega_0}{3}\right) \tag{6}$$

$$\text{Igualando partes reales: } 5\omega_0^2 = 3k\alpha\left(\omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{3}\right) \tag{7}$$

$$\text{Igualando partes imaginarias: } 1 = 3k\alpha\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2k\alpha \Rightarrow k = \frac{1}{2\alpha} \overset{\alpha>1}{<} \frac{1}{2} \tag{8}$$

Por lo tanto para que el sistema sea estable $k < 0{,}5$

Notar que si substituimos el resultado de 8 en 7, podemos ver a que frecuencia se da el corte con el eje imaginario y da $\omega_1 = \sqrt{3}\omega_0$ que está efectivamente a más de una década de la raíz que despreciamos.

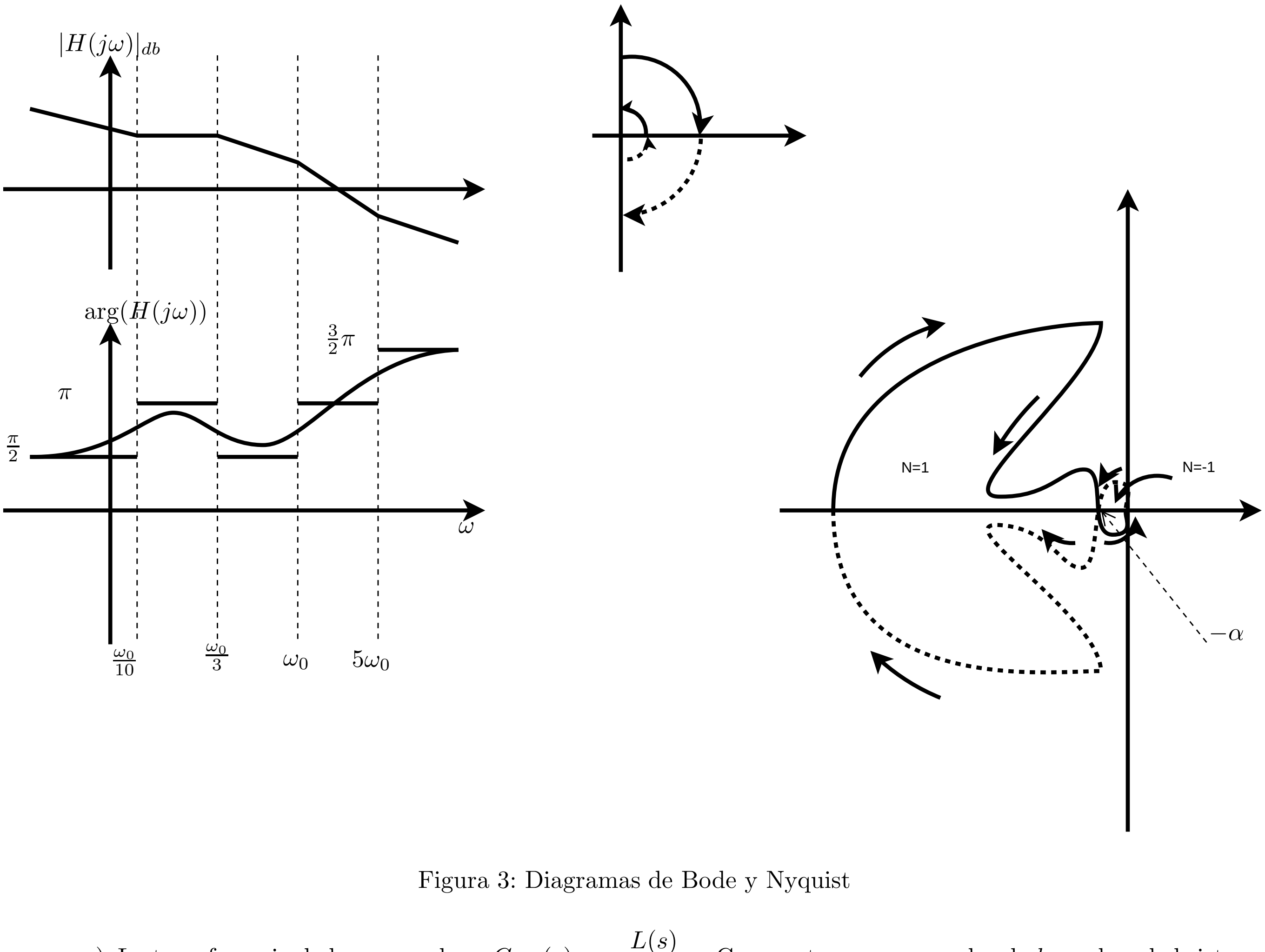

Figura 3: Diagramas de Bode y Nyquist

ii) La transferencia de lazo cerrado es $G_{CL}(s) = \dfrac{L(s)}{1 + L(s)}$. Como estamos en un valor de k en el cual el sistema es estable, podemos usar los resultado de régimen.

1) Para saber la ganancia en continua simplemente tenemos que evaluar G_{CL}en 0. $\lim_{\omega \to 0} L(j\omega) = \infty$ por lo tanto $G_{CL}(0) = 1$. Así la salida en régimen será: $\boxed{v_o(t) = A}$

2) Como vimos $\omega_1 = \sqrt{3}\omega_0$ por lo tanto nos están pidiendo la salida a la frecuencia de corte con el semi eje real negativo, por lo cual $L(j\omega_1) = -\alpha = -\frac{1}{2k} = -2$, o sea $G_{CL}(j\omega_1) = \frac{-2}{1-2} = 2$

$$\boxed{v_o(t) = 2A.\cos(\sqrt{3}\omega_0 t)}$$