**Facultad de Ingeniería - IIE**
**Modelado y análisis de redes de telecomunicaciones**

## Matèrn Hard Core Process

El modelo de Matèrn consiste en suprimir una fracción de puntos de un p.p. Poisson de manera que los puntos retenidos estén a más de $h$. Sea $\Phi$ un p.p. marcado Poisson de parámetro $\lambda$ y sea $\widetilde{\Phi} = \sum_i \epsilon_{(x_i,U_i)}$ una versión marcada donde $U_i$ son v.a. iid con distribución $\mathcal{U}([0,1])$. El modelo hard core de Matèrn corresponde a

$$\Phi_{HC} = \sum_i \epsilon_{x_i} \mathbf{1}_{\{U_i < U_j \ \forall y_j \in B^*_{x_i}(h)\}}$$

es decir que se retienen los puntos $x_i$ cuya marca es menor que la marca de todos los puntos en la bola de centro $x_i$ y radio $h$.

**Proposición 1.** *La intensidad de $\Phi_{HC}$ definido en $\mathbb{R}^2$ es:*

$$\lambda_{HC} = \frac{1 - e^{\lambda \pi h^2}}{\pi h^2}$$

**Dem.**
Vamos a calcular esta intensidad de dos maneras diferentes:

1. Usando que $\lambda_{HC} = \lambda P^0(e_0 = 1)$ donde $e_0$ es la función indicatriz de que el nodo 0 es retenido por $\Phi_{HC}$.
2. Usando directamente la definición de intensidad, esto es: $\lambda_{HC} = E(\Phi_{HC}(B))$ donde $\nu(B) = 1$.

Comencemos con el primer caso:

El nodo típico es retenido por $\Phi_{HC}$ si y sólo si $U_0 < U_j \ \forall y_j \in B^*_0(h) \cap \Phi$, i.e.

$$e_0 = 1 \quad \text{sii} \quad \mathbf{1}_{\{U_0 < U_j \ \forall y_j \in B^*_0(h) \cap \Phi\}} = 1$$

Condicionando al valor de la marca del origen $U_0$ (que se asume uniforme en el intervalo $[0,1]$), resulta que:

$$P^0(e_0 = 1) = \int_0^1 P^0(e_0 = 1 | U_0 = t) dt = \int_0^1 P^0(t < U_j \ \forall y_j \in B^*_0(h) \cap \Phi) dt$$

Sea $\Phi^t = \{x_i \in \Phi : U_i < t\}$, es decir aquellos puntos de $\Phi$ cuya marca sea menor que $t$. Por ser un refinamiento independiente de $\Phi$, resulta que $\Phi^t$ es un proceso de Poisson de intensidad $\lambda p$ con $p = P(U < t) = t$, es decir de intensidad $\lambda t$.

Entonces:

$$P^0(t < U_j \ \forall y_j \in B_0^*(h) \cap \Phi) = P^0(\Phi^t(B^*(0,h)) = 0) = P(\Phi^t(B(0,h)) = 0) = e^{-\lambda t \pi h^2}$$

En la última igualdad se uso el teorema de Slivnyak para el proceso de Poisson $\Phi^t$. Sustituyendo en la ecuación anterior, resulta que:

$$P^0(e_0 = 1) = \int_0^1 e^{-\lambda t \pi h^2} dt = \frac{1 - e^{-\lambda \pi h^2}}{\lambda \pi h^2}$$

De donde se obtiene el resultado enunciado: $\lambda_{HC} = \frac{1-e^{-\lambda\pi h^2}}{\pi h^2}$.

**Observación 2.** 1. *Observar que si el proceso está definido en $\mathbb{R}^d$, el cálculo es exactamente el mismo y el resultado es:*

$$\lambda_{HC} = \frac{1 - e^{-\lambda \nu(B(0,h))}}{\nu(B(0,h))}.$$

2. *El resultado no depende de la distribución de las marcas. Repetiendo los cálculos usando que $p = P(U < t) = F(t)$ conduce al mismo resultado (independiente de $F$).*

Calculemos ahora la intensidad directamente de la definición. Sea $B$ un conjunto de medida 1 (i.e. $\nu(B) = 1$), entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda_{HC} &= E(\Phi_{HC}(B)) = E\left(\int \mathbf{1}_B(x)\Phi_{HC}(dx)\right) \\
&= E\left(\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^1 \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_{\{u<U_j \ \forall y_j \in B_x^*(h)\}}\widetilde{\Phi}(dx,du)\right) \\
&= \lambda \int_{\mathbb{R}^2}\int_0^1 E^0\left(\mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_{\{u<U_j \ \forall y_j \in B_0^*(h)\}}\right) dudx \quad \text{(Campbell)} \\
&= \lambda \int_B \int_0^1 E\left(\mathbf{1}_{\{u<U_j \ \forall y_j \in B_0(h)\}}\right) dudx \quad \text{(Slyvniak)} \\
&= \lambda \int_B \int_0^1 P(u < U_j \ \forall y_j \in B_0(h))dudx \\
&= \lambda \int_B \int_0^1 P(\Phi^u(B_0(h)))dudx \quad \text{donde } \Phi^u = \{x_j \in \Phi : U_j \leq u\} \\
&= \lambda \int_B \int_0^1 e^{-\lambda u \pi h^2} dudx = \lambda \int_B dx \int_0^1 e^{-\lambda u \pi h^2} du \\
&= \lambda \nu(B) \frac{1 - e^{-\lambda \pi h^2}}{\lambda \pi h^2} \quad (\nu(B) = 1) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda \pi h^2}}{\pi h^2}
\end{aligned}$$

$\square$

**Observación 3.** *Valen las mismas observaciones que antes sobre el resultado en* $\mathbb{R}^d$ *y la independencia de la distribución de las marcas.*