

Geometría Aleatoria

Modelado y Análisis de Redes de Telecomunicaciones

IIE - Facultad de Ingeniería

Curso 2013

Mosaicos de Voronoi

- Sea $\Phi = \sum_i \delta_{x_i}$ un p.p. en \mathbb{R}^d , se define la celda de Voronoi del punto x como

$$\mathcal{C}_x(\Phi) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq \inf_{x_i \in \Phi - \{x\}} \|y - x_i\| \right\}$$

es decir todos los puntos que están más cerca de x que de cualquier otro punto del proceso.

- Las celdas de Voronoi forman una partición del plano llamado mosaico de Voronoi:

$$\gamma = \sum_i \delta_{(x_i, \mathcal{C}_{x_i}(\Phi) - x_i)}$$

Fórmula de Inversión

Como antes relaciona P^0 con P :

$$\begin{aligned} E(f) &= \lambda E^0 \left(\int f(\Phi_x) \mathbf{1}_{\{x \in \mathcal{C}_0(\Phi)\}} dx \right) \\ &= \lambda E^0 \left(\int_{\mathcal{C}_0(\Phi)} f(\Phi_x) dx \right) \end{aligned}$$

- Demostración: aplicar la fórmula de Campbell a la función $h(x, \Phi) = f(\Phi) \mathbf{1}_{\{\Phi(B^0(0, |x|))=0\}}$ (vale 1 si no hay puntos en la bola abierta de centro 0 y radio $|x|$) y observar que:

$$\int \mathbf{1}_{\{\Phi(B^0(0, |x|))=0\}} \Phi(dx) = \sum_{x \in \Phi} \mathbf{1}_{\{\Phi(B^0(0, |x|))=0\}} = 1$$

$$\mathbf{1}_{\{\Phi_x(B^0(0, |x|))=0\}} = 1 \quad \text{sii} \quad x \in \mathcal{C}_0(\Phi)$$

- Sea $f = g(\mathcal{C}_0(\Phi))$ (no depende de x), entonces resulta:

$$E(g(\mathcal{C}_0(\Phi))) = \lambda E^0(g(\mathcal{C}_0(\Phi)) \nu_d(\mathcal{C}_0(\Phi)))$$

Mosaicos de Voronoi: resultados

Se pueden obtener muchos resultados sobre el mosaico de Voronoi asociado a un p.p. de Poisson Φ :

- Área media de la celda de Voronoi típica:

$$E^0(\nu_d(\mathcal{C}_0)(\Phi)) = \frac{1}{\lambda}$$

→ aplicar la fórmula de inversión a $f \equiv 1$

- Inverso del área de la celda de Voronoi que cubre al origen:

$$E\left(\frac{1}{\nu_d(\mathcal{C}_0(\Phi))}\right) = \lambda$$

→ aplicar la fórmula de inversión a $g = \frac{1}{\nu(\mathcal{C}_0(\Phi))}$

Mosaicos de Voronoi: resultados

- De los resultados anteriores se tiene que:

$$E(\nu_d(\mathcal{C}_0(\Phi))) \geq E^0(\nu_d(\mathcal{C}_0(\Phi)))$$

de hecho se puede probar que:

$$E(\nu_d(\mathcal{C}_0(\Phi))) = \frac{\gamma}{\lambda} \text{ con } \gamma = 1,280$$

(consecuencia directa de la desigualdad de Jensen)

→ es el equivalente a la paradoja de Feller (hay mayor probabilidad de elegir una celda grande)

- Otros resultados:
 - Intensidad de vértices: 2λ
 - Intensidad de puntos medios de los lados: 3λ
 - Número medio de vértices de una celda típica: 6
 - Perímetro de la celda típica: $\frac{4}{\sqrt{\lambda}}$

Fórmula de Intercambio de Neveu

Dados Φ y Φ' dos procesos puntuales estacionarios en \mathbb{R}^d de intensidades λ y λ' respectivamente, se tiene que:

$$\lambda E_{\Phi}^0(f) = \lambda' E_{\Phi'}^0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\Phi_x) \mathbf{1}_{\{x \in C_0(\Phi')\}} \Phi(dx) \right)$$

En particular si $f \equiv 1$, resulta que:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = E_{\Phi}^0 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{x \in C_0(\Phi')\}} \Phi(dx)$$

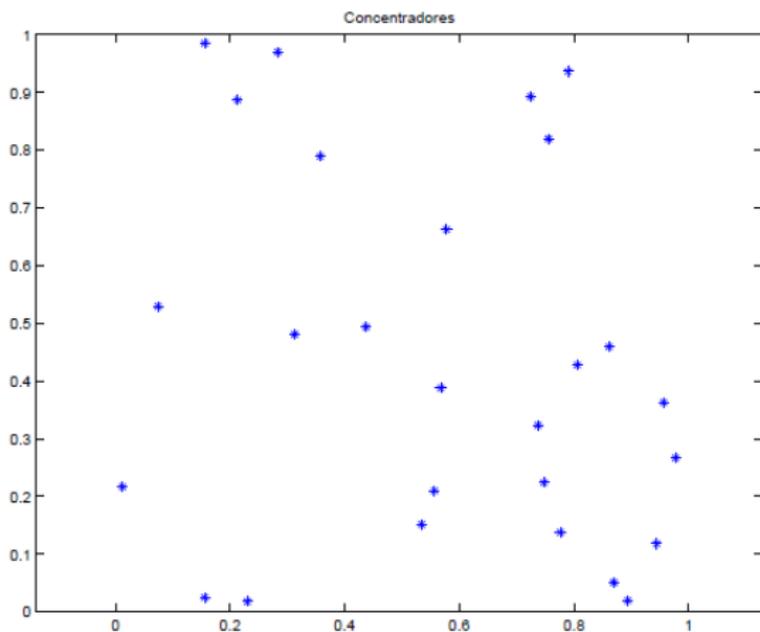
donde el término de la derecha representa el número medio de puntos de Φ en la celda de Voronoi típica asociada al proceso Φ' (y coincide con el cociente de las intensidades).

Mosaicos de Voronoi: aplicación 1

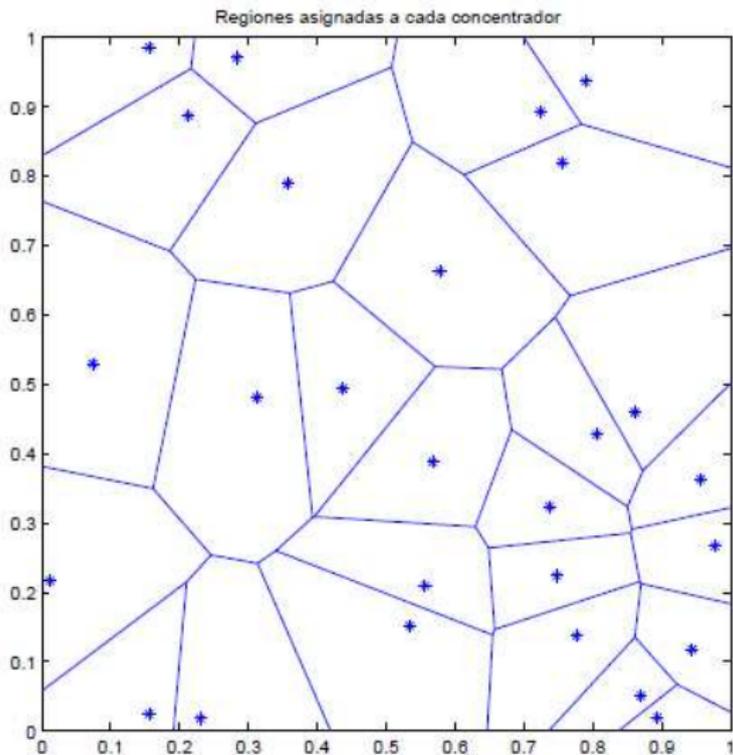
- Diseño de una red de acceso (e.g. ADSL):
 - abonados distribuidos en una región: se asumen Poisson de parámetro λ_a (es decir λ_a abonados por unidad de área)
 - concentradores que conectan a los abonados: se asumen Poisson de parámetro λ_c ($\lambda_c < \lambda_a$)
- Cada abonado se va a conectar al concentrador más cercano
- Se busca conocer la cantidad de concentradores necesaria (promedio por unidad de área) tal que:
 - la cantidad de abonados por concentrador sea acotada
 - la distancia al concentrador sea también acotada
- Se considera el mosaico de Voronoi asociado al p.p. de los concentradores (cada abonado va a estar conectado al concentrador más cercano)

Mosaicos de Voronoi: aplicación 1

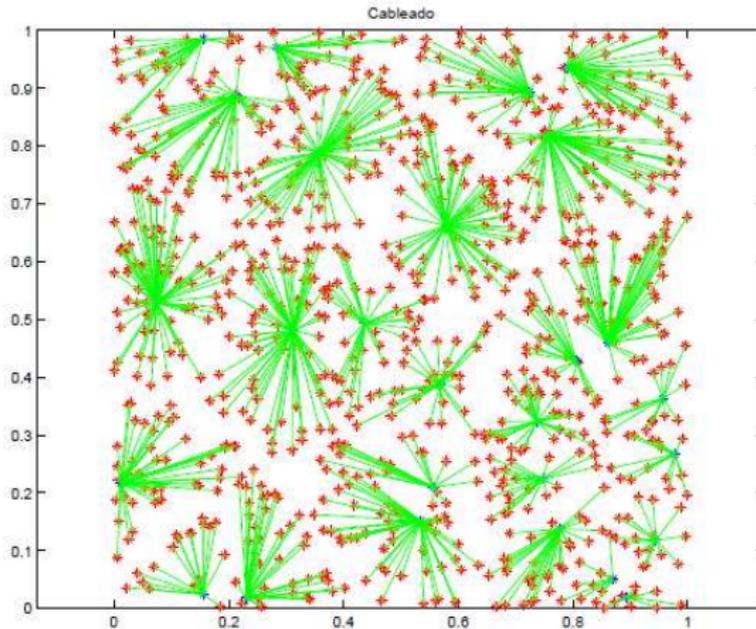
Mosaicos de Voronoi: aplicación 1



Mosaicos de Voronoi: aplicación 1



Mosaicos de Voronoi: aplicación 1



Mosaicos de Voronoi: aplicación 1

- A partir de los resultados anteriores se puede obtener (ver ejercicio práctico):
 - El número medio de abonados por concentrador:
 $\bar{N} = N(\lambda_1, \lambda_2)$
 - La distancia media al concentrador más cercano: $\bar{D} = D(\lambda_2)$
- Ejemplo: se asume $\lambda_a = 1000$ (abonados por km^2) y se imponen las restricciones:

$$\bar{N} \leq 50 \quad \text{y} \quad \bar{D} \geq 100$$

entonces resulta que $\lambda_c \geq 50$ (no dice dónde están los concentradores, solamente cuántos debe haber en promedio).

Mosaicos de Voronoi: aplicación 2

- Red Celular
 - se usa el mismo modelo que antes, donde los abonados son los usuarios de la red celular y los concentradores las radio bases: cada usuario se conecta a la radio base más cercana
- Preguntas ¿número medio de usuarios por radio base?
¿distancia a la radio base más cercana?

ALOHA Espacial

- Modelo bipolar:
 - cada punto del p.p. (Poisson) representa un posible transmisor (nodo en una MANET)
 - se asume caso saturado: siempre tiene paquetes para transmitir
 - el receptor no es parte del p.p. y está a distancia r (hay otros modelos más realistas)
 - representa una foto (snapshot) de una red multi-hop: los transmisores no son necesariamente las fuentes ni los receptores el destino final

ALOHA Espacial - Modelo

- $\Phi = \{X_i\}$ representa la localización de los potenciales transmisores. Φ se asume Poisson con intensidad $\lambda > 0$
- $\{y_i\}$ es la localización del receptor de X_i ($y_i \neq y_j \forall i \neq j$), $\{X_i - y_i\}$ son iid con $|X_i - y_i| = r$
- $\{F_i = (F_i^j : j)\}$ donde F_i^j es la "potencia virtual" (pot. transmisión por fading) emitida por el nodo i hacia el receptor y_j . Los vectores $\{F_i\}$ se asumen iid y las componentes (F_i^j, j) se asumen idénticamente distribuidas con media $1/\mu$ (también se asumen independientes)
- e_i es el indicador de acceso: $e_i = 1$ sii el nodo i puede transmitir en el slot en consideración. Las variables e_i son iid e independientes de todo el resto.
- Se define la MAP (medium access probability) como $P(e_i = 1) = p$
- W es el ruido térmico, y se considera como una v.a. independiente del proceso Φ

ALOHA Espacial - Probabilidad de Cobertura

- Sea $\Phi^1 = \{X_i : e_i = 1\}$ el conjunto de nodos habilitados a transmitir en un slot
- $\Phi^1 = \{X_i : e_i = 1\}$ en un p -refinamiento independiente de Φ , entonces su intensidad es $\lambda_1 = \lambda p$
- Se dice que el transmisor X_i cubre a su receptor y_i en el slot de referencia si:

$$SINR_i = \frac{F_i^i l(|X_i - y_i|)}{W + I_i^1} \geq T$$

donde $I_i^1 = \sum_{X_j \in \Phi^1, j \neq i} F_j^i l(|X_j - y_i|)$ es la interferencia sobre y_i y $l(|x - y|)$ es la pérdida de camino entre x e y .

- I_i^1 se llama Shot Noise asociado al proceso Φ^1

Shot Noise asociado a un Proceso Puntual

- En general se llama Shot Noise asociado a un p.p. marcado $\tilde{\Phi}$ al funcional $I(y) = \sum_{(x,z) \in \tilde{\Phi}} L(y, x, z)$
- La transformada de Laplace de I :

$$\mathcal{L}_{I(y)}(s) = E(e^{-sI}) = E\left(e^{-s \sum_{(x,z) \in \tilde{\Phi}} L(y, x, z)}\right) = \mathcal{L}_{\tilde{\Phi}}(sL(y, x, z))$$

- Si Φ es un p.p. Poisson entonces la transformada de Laplace se conoce.

$$\mathcal{L}_{\Phi}(f) = e^{-\lambda \int 1-f(x)dx}$$

ALOHA Espacial - Probabilidad de Cobertura

- Sea δ_0 el indicador de que el punto típico cubra a su receptor dado que es un transmisor
- La probabilidad de cobertura está dada por:

$$p_c(r, \lambda_1, T) = P^0(\delta_0 = 1 | e_0 = 1) = E^0(\delta_0 | e_0 = 1)$$

donde P^0 es la probabilidad Palm asociada al p.p. marcado Φ

- Se obtiene que:

$$\begin{aligned} p_c(r, \lambda_1, T) &= P^0(F_0^0 \geq T(I_0^1 + W)/l(r) | e_0 = 1) \\ &= P(F \geq T(I^1 + W)/l(r)) \end{aligned}$$

- Caso particular: Rayleigh fading ($F \sim \exp(\mu)$)

$$p_c(r, \lambda_1, T) = E(e^{-\mu T(I^1 + W)/l(r)}) = \mathcal{L}_{I^1}(\mu T/l(r)) \mathcal{L}_W(\mu T/l(r))$$

donde

$$\mathcal{L}_{I^1}(s) = \exp\left(-2\pi\lambda_1 \int_0^\infty \frac{r}{1 + \mu/sl(r)} dr\right)$$

ALOHA Espacial - Probabilidad de Cobertura

- Conociendo la distribución de W y la función de pérdida se conoce la probabilidad de cobertura
- Ejemplo: $W = 0$ y $l(r) = (Ar)^{-\beta}$ con $\beta > 2$

$$p_c(r, \lambda_1, T) = \exp(-\lambda_1 r^2 T^{2/\beta} k(\beta))$$

donde

$$k(\beta) = \frac{2\pi^2}{\beta \sin(2\pi/\beta)}$$

- Aplicación: elegir la MAP p tal que el SINR obtenido sea mayor que T con probabilidad mayor que $1 - \epsilon$. Para el ejemplo anterior se obtiene que,

$$p = \min \left(1, \frac{-\ln(1 - \epsilon)}{\lambda r^2 T^{2/\beta} k(\beta)} \right)$$

- Para el caso general no se tiene una fórmula explícita y depende de la transformada de Laplace de F .

ALOHA - Reuso Espacial

- ALOHA crea un disco de exclusión de radio aleatorio alrededor de cada transmisor
- Se define el radio de exclusión medio como la distancia del transmisor típico al transmisor más cercano:

$$R_{excl} = E^0(\min_{i \neq 0} \{|X_i| : e_i = 1\})$$

- Se tiene que $R_{excl} = R_{excl}(\lambda_1) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_p}}$
- Se puede calcular el factor de reuso espacial que es el cociente entre r y el radio medio de exclusion:

$$S_{reuse} = S_{reuse}(r, \lambda_1) = \frac{r}{R_{excl}} = 2r\sqrt{\lambda_1}$$

- Se puede considerar λ_{max} tal que maximice la densidad de transmisiones exitosas y hallar el reuso espacial para ese valor:
 - para el ejemplo de referencia: $S_{reuse} = \frac{2c}{T^{1/\beta}}$

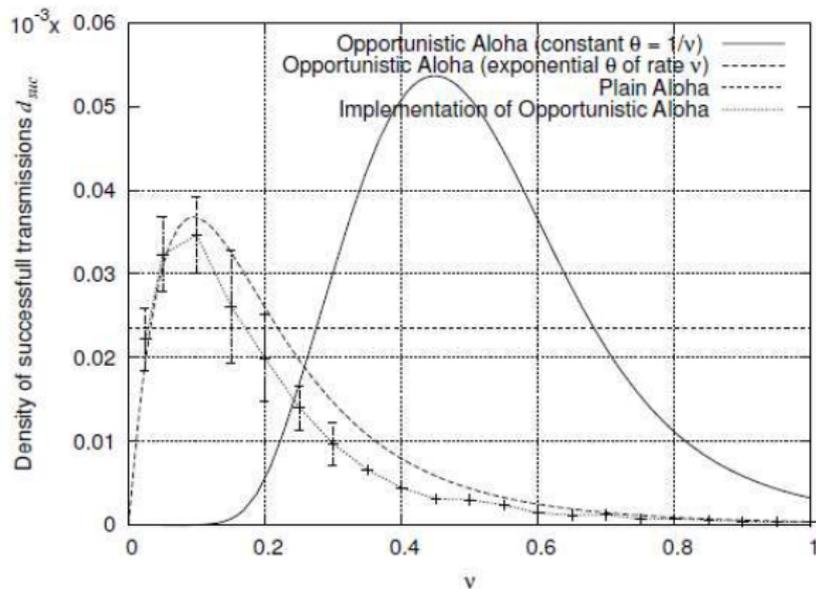
Opportunistic ALOHA

- La idea es habilitar a transmitir a aquellos cuyo fading en el canal sea mayor que un cierto umbral en el slot de referencia
 - el umbral puede ser determinístico o aleatorio
- El modelo es como antes $\tilde{\Phi} = \{X_i, y_i, F_i\}$ y ahora se modifica e_i tal que:
 - El indicador de acceso del nodo i se define como $e_i = \mathbf{1}_{\{F_i^i > \theta_i\}}$ donde $\{\theta_i\}$ son v.a. iid distribuidas como θ
 - Casos de interés: θ constante o exponencial de parámetro ν
- Se busca calcular $\hat{p}_c(r, \lambda_1, T)$ la probabilidad de cobertura en este caso
- Para Rayleigh fading y umbral exponencial, hay fórmula cerrada:

$$\hat{p}_c(r, \lambda_1, T) = P(F_\theta > T(I^1 + W)/l(r))$$

donde F_θ tiene la distribución de F condicional a que que $F > \theta$.

Opportunistic versus Plain ALOHA



Modelo Hard Core de Matèrn

- Modelo Hard Core: p.p. cuyos puntos están separados más de una distancia fija $h > 0$
- Por ejemplos los centros de esferas de radio $h/2$ cumplen lo anterior: Matèrn da mayor intensidad de puntos.
- Ningún proceso de Poisson lo cumple!
- El modelo de Matèrn consiste en suprimir una fracción de puntos de un p.p. Poisson de manera que los puntos retenidos estén a más de h
- Sea Φ un p.p. marcado Poisson de parámetro λ y sea $\tilde{\Phi} = \sum_i \epsilon_{(x_i, U_i)}$ una versión marcada donde U_i son v.a. iid con distribución $\mathcal{U}([0, 1])$
- El modelo hard core de Matèrn corresponde a

$$\Phi_{HC} = \sum_i \epsilon_{x_i} \mathbf{1}_{\{U_i < U_j \forall y_j \in B_{x_i}^*(h)\}}$$

es decir que se retienen los puntos x_i cuya marca es menor que la marca de todos los puntos en la bola de centro x_i y radio h

Modelo tipo Matèrn para CSMA

- Φ_{HC} es un refinamiento **dependiente** de Φ
- La intensidad de Φ_{HC} es:

$$\lambda_{HC} = \frac{1 - e^{-\lambda\pi h^2}}{\pi h^2}$$

- Aplicación: modelado del protocolo CSMA
 - versión más simple: h radio de la región de exclusión
 - versión con fading (modelo tipo Matèrn):

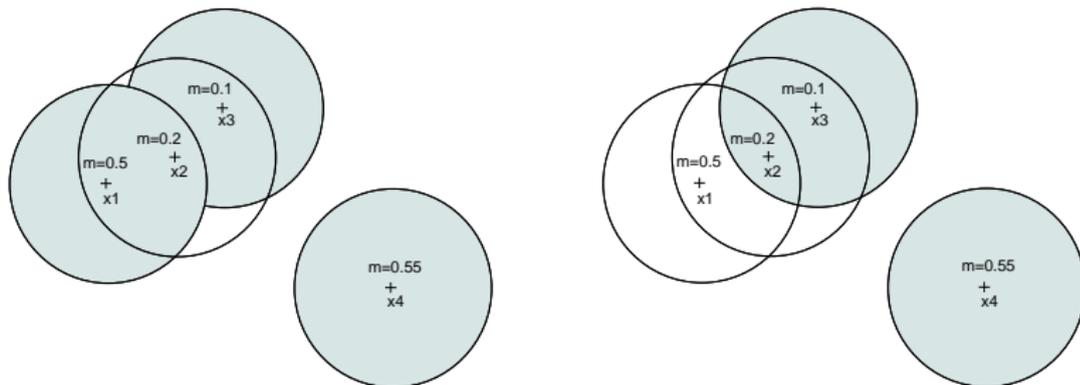
$$\lambda_{HC}^* = \frac{1 - e^{-\bar{\mathcal{N}}}}{\bar{\mathcal{N}}} \text{ donde}$$
$$\bar{\mathcal{N}} = 2\pi\lambda \int_0^\infty (1 - G(P_0 l(r))) r dr$$

es el número medio de “competidores” del punto típico

- Asintóticamente $p = p(\lambda)$ es equivalente a $\frac{1}{\bar{\mathcal{N}}}$ cuando λ tiende a infinito

Modelo tipo Matèrn para CSMA

Es una aproximación conservadora...



Modelo tipo Matèrn para CSMA

- También se puede calcular la probabilidad condicional (bajo E^0) de que el nodo típico $X_0 = 0$ sea retenido dado que hay otro nodo (punto del proceso Φ) a distancia r del origen
- Asumiendo, Rayleigh fading, se tiene que:

$$p_r = p - e^{-P_0\mu/l(r)} \left(\frac{1 - e^{-\bar{\mathcal{N}}}}{\bar{\mathcal{N}}^2} - \frac{e^{-\bar{\mathcal{N}}}}{\bar{\mathcal{N}}} \right)$$

Algunos extras...

ALOHA Espacial - Shannon Throughput

- Se define el shannon throughput para el canal desde el transmisor X_i hasta su receptor y_i como

$$\mathcal{T}_i = \log(1 + SINR_i)$$

- El throughput de un transmisor típico (o eq. el promedio espacial del rate obtenido por los transmisores) está dado por:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau(r, \lambda_1) = E^0(\mathcal{T}_0 | e_0 = 1) \\ &= E^0(\log(1 + SINR_0) | e_0 = 1) \\ &= \int_0^\infty \frac{p_c(r, \lambda_1, v)}{v + 1} dv\end{aligned}$$

- Aplicación: comparación del throughput obtenido con Rayleigh fading y sin fading

ALOHA Espacial - Shannon Throughput

- Aplicación: comparación del throughput obtenido con Rayleigh fading ($F \sim \exp(1)$) y sin fading (Erlang(8,1))
- Se usa $l(r) = (Ar)^{-\beta}$ con $A = 1$ y $\beta = 4$. El ruido W se asume exponencial con media 0.01.

	$r=.25$	$r=.37$	$r=.5$	$r=.65$	$r=.75$	$r=.9$	$r=1$
Rayleigh	1.52	0.886	0.48	0.25	0.166	0.093	0.0648
Erlang (8)	1.71	0.942	0.495	0.242	0.155	0.0832	0.571

- El fading aporta para distancias grandes y perjudica para distancias cortas

ALOHA - Métricas de Desempeño Espaciales

- Cuándo se trata de maximizar la probabilidad de cobertura o el throughput se obtiene el caso degenerado de $r = 0$
- Si se consideran métricas basadas en un transmisor típico se obtiene el caso degenerado de $p = 0$
- Entonces hay que considerar métricas “sociales” (que consideren toda la red):
 - densidad (espacial) de transmisiones exitosas d_{suc} : número medio de transmisiones exitosas por unidad de área
 - densidad (espacial) de progreso (en distancia) d_{prog} : número medio de metros progresados por todas las transmisiones habilitadas por unidad de área
 - densidad (espacial) de throughput d_{throu} : throughput medio por unidad de área
 - densidad (espacial) de transporte (bytes) d_{trans} : número medio de bits-metros transportados por segundo y por unidad de área

ALOHA - Métricas de Desempeño Espaciales

- Estos valores se pueden obtener a partir de la performance de una conexión típica ($p_c(\cdot)$ y $\tau(\cdot)$) con la fórmula de Campbell
- La densidad de transmisiones exitosas d_{suc} se puede ver como el número medio de densidades exitosas en un subconjunto cualquiera B del plano:

$$d_{suc}(r, \lambda_1, T) = \frac{1}{|B|} E \sum_i e_i \delta_i \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}}$$

- Tomando $g(x, \Phi) = \mathbf{1}_{\{(x \in B)\}} e_0 \delta_0$, se tiene que:

$$\frac{1}{|B|} E \left(\sum_i e_i \delta_i \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}} \right) = \frac{1}{|B|} E \left(\int_{\mathbb{R}^2} g(x, \Phi - x) \Phi(dx) \right)$$

y por la fórmula de Campbell, es igual a:

$$\frac{1}{|B|} \int_{\mathbb{R}^2} E^0(g(x, \Phi)) \Phi(dx) = \lambda E^0(e_0 \delta_0)$$

lo que resulta en:

$$d_{suc}(r, \lambda_1, T) = \lambda_1 p_c(r, \lambda_1, T) = \lambda p p_c(r, \lambda_1, T)$$

ALOHA - Métricas de Desempeño Espaciales

Análogamente se tiene:

$$d_{prog}(r, \lambda_1, T) = \frac{1}{|B|} E\left(\sum_i r e_i \delta_i \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}}\right) = r \lambda_1 p_c(r, \lambda_1, T)$$

$$d_{throu}(r, \lambda_1) = \frac{1}{|B|} E\left(\sum_i e_i \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}} \log(1 + SINR_i)\right) = \lambda_1 \tau(r, \lambda_1)$$

$$d_{trans}(r, \lambda_1) = \frac{1}{|B|} E\left(\sum_i r e_i \mathbf{1}_{\{X_i \in B\}} \log(1 + SINR_i)\right) = r \lambda_1 \tau(r, \lambda_1)$$

ALOHA - Métricas de Desempeño Espaciales

- Una posible aplicación es maximizar la densidad de transmisiones exitosas dado r y λ (compromiso entre cant.de trans. simultaneas y prob. de trans. exitosa):
 - es decir maximizar $d_{suc}(r, \lambda, T) = \lambda p p_c(r, \lambda, T)$ con respecto a p para un r y un λ dado
- Para Rayleigh fading se puede hacer explícitamente: se optimiza primero con respecto a λ asumiendo p fijo y se deduce la máxima p para el valor de λ fijo
- Sea $\lambda_{max} = \arg \max_{0 \leq \lambda < \infty} d_{suc}(r, \lambda, T)$ (si existe y es único)
- Entonces:

$$\lambda_{max} = \left(2\pi \int_0^{\infty} \frac{u}{1 + l(r)/Tl(u)} du \right)^{-1}$$

y el valor máximo es igual a

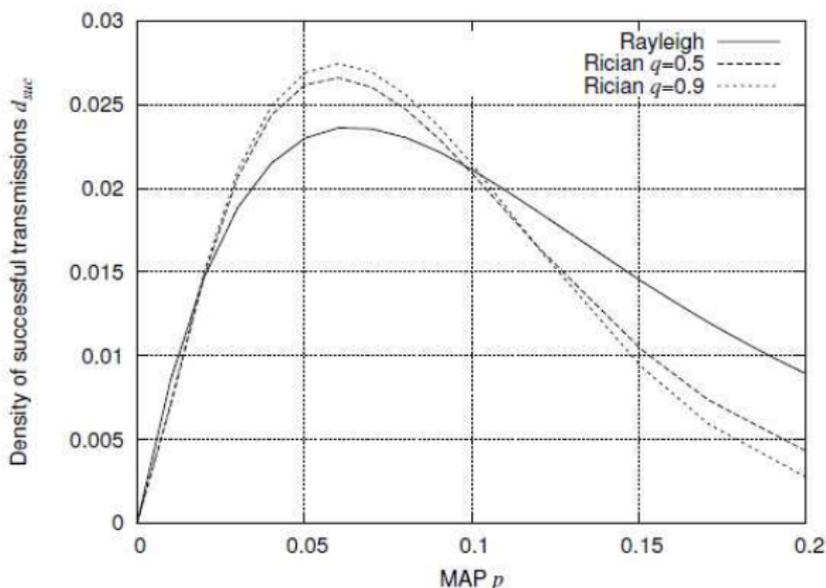
$$d_{suc}(r, \lambda_{max}, T) = e^{-1} \lambda_{max} \mathcal{L}_W(\mu T / l(r))$$

ALOHA - Métricas de Desempeño Espaciales

- Para un r dado, la MAP que maximiza la densidad de transmisiones exitosas esta dada por

$$p_{max} = \min\left(1, \frac{\lambda_{max}}{\lambda}\right)$$

- Rayleigh versus Rician fading



ALOHA - Métricas de Desempeño Espaciales

Otras aplicaciones

- Asumiendo λ fijo, hallar r tal que la densidad media de progreso $\text{prog}(r, \lambda, T)$ se maximice: se obtiene que $r_{max}(\lambda)$ es del orden de la distancia al vecino más cercano al transmisor ($1/2\sqrt{\lambda}$)
- No se puede optimizar al mismo tiempo en λ y en r ... hay que buscar un mejor modelo para el receptor
- Optimizar la distancia r dada la densidad de transmisores
- Maximizar el throughput
- etc...