# Geometría Aleatoria

Modelado y Análisis de Redes de Telecomunicaciones

IIE - Facultad de Ingeniería

Curso 2014

# Distribución Palm - Introducción Informal

- Punto Típico: interesa definir "punto arbitrario" o "punto cualquiera" que corresponde a elegir al azar un punto donde cada punto tiene la misma probabilidad de ser seleccionado

# Distribución Palm - Introducción Informal

- Punto Típico: interesa definir "punto arbitrario" o "punto cualquiera" que corresponde a elegir al azar un punto donde cada punto tiene la misma probabilidad de ser seleccionado
- La probabilidad Palm es la probabilidad condicional dado que en tal lugar (localización específica) hay un punto del proceso.
    - hace precisa la noción de punto típico.

# Distribución Palm del Poisson - Introducción Informal

- Un poco de notación:

  $$P(\Phi \text{ tiene la propiedad } Y||x) = P(\Phi \text{ tiene la propiedad } Y|x \in \Phi)$$
  $$= P(\Phi \in Y||x) \quad Y \in \sigma - \text{álgebra del cjto de realizaciones}$$

  Por ejemplo:

  $$Y = \{\varphi : \varphi(B(0,1)) = 1\}$$
  $$Y = \{\varphi : \ x \in B \text{ y } \varphi(B(x,r)) = 0\}$$

- Si $\Phi$ es estacionario: $P(\Phi \in Y||x) = P(\Phi_{-x} \in Y||0)$

# Distribución Palm del Poisson - Introducción Informal

- Un poco de notación:

$$P(\Phi \text{ tiene la propiedad } Y||x) = P(\Phi \text{ tiene la propiedad } Y|x \in \Phi)$$
$$= P(\Phi \in Y||x) \quad Y \in \sigma - \text{álgebra del cjto de realizaciones}$$

Por ejemplo:

$$Y = \{\varphi : \varphi(B(0,1)) = 1\}$$
$$Y = \{\varphi : \ x \in B \text{ y } \varphi(B(x,r)) = 0\}$$

- Si $\Phi$ es estacionario: $P(\Phi \in Y||x) = P(\Phi_{-x} \in Y||0)$
- Sea $D$ la distancia de un punto típico $x \in \Phi$ al vecino más cercano (punto más cercano de $\Phi \backslash x$):

$$D(r) = P(D > r) = P(\Phi(B(x,r)) = 1||x) = P(\Phi(B(0,r)) = 1||0)$$

## Distribución Palm del Poisson - Introducción Informal

- Un poco de notación:

$$P(\Phi \text{ tiene la propiedad } Y||x) = P(\Phi \text{ tiene la propiedad } Y|x \in \Phi)$$
$$= P(\Phi \in Y||x) \quad Y \in \sigma - \text{álgebra del cjto de realizaciones}$$

Por ejemplo:

$$Y = \{\varphi : \varphi(B(0,1)) = 1\}$$
$$Y = \{\varphi : \ x \in B \text{ y } \varphi(B(x,r)) = 0\}$$

- Si $\Phi$ es estacionario: $P(\Phi \in Y||x) = P(\Phi_{-x} \in Y||0)$
- Sea $D$ la distancia de un punto típico $x \in \Phi$ al vecino más cercano (punto más cercano de $\Phi \backslash x$):

$$D(r) = P(D > r) = P(\Phi(B(x,r)) = 1||x) = P(\Phi(B(0,r)) = 1||0)$$

Pero estoy condicionando a un evento de probabilidad nula! Condicionando a $\Phi(B(0,\epsilon) = 1$ con $\epsilon > 0$, y tomando luego límite $\epsilon \to 0$ se obtiene que:

$$D(r) = P(\Phi(B(0,r)) = 0) = e^{-\lambda b_r r^d}$$

## Distribución Palm del Poisson - Introducción Informal

- Se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
P(\Phi(B(0,r)) = 1||0) &= e^{-\lambda b_r r^d} = P(\Phi(B(0,r)) = 0) \\
&= P(\Phi \cup \{0\}(B(0,r)) = 1)
\end{aligned}
$$

- Esto sugiere que:

$$P(\Phi \in Y||0) = P(\Phi \cup 0 \in Y)$$

  y de la misma manera se puede probar que

$$P(\Phi(B) = n)||0) = P(\Phi(B) = n)$$

  para cualquier $B$ tal que $0 \notin B$.
- **La distribución palm de un p.p. de Poisson estacionario es la distribución del proceso original con el agregado de un punto en el origen.**

## Distribución Palm del Poisson - Introducción Informal

- Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(\Phi(B(0,r)) = 1||0) &= e^{-\lambda b_r r^d} = P(\Phi(B(0,r)) = 0) \\ &= P(\Phi \cup \{0\}(B(0,r)) = 1) \end{aligned}$$

- Esto sugiere que:

$$P(\Phi \in Y||0) = P(\Phi \cup 0 \in Y)$$

y de la misma manera se puede probar que

$$P(\Phi(B) = n)||0) = P(\Phi(B) = n)$$

para cualquier $B$ tal que $0 \notin B$.

- **La distribución palm de un p.p. de Poisson estacionario es la distribución del proceso original con el agregado de un punto en el origen.**
- Ejercicio: probar que para $d = 2$

$$\mathrm{E}(D(r)) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}(D(r)) = \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{1}{4\lambda}$$

## Cálculo de Palm para el p.p. Poisson

**Teorema de Slyvniak**:
Sea $\Phi$ un p.p. de Poisson de intensidad $\lambda$, entonces bajo la probabilidad Palm, la distribución es la de $\Phi_0 = \Phi + \delta_0$

# Cálculo de Palm para el p.p. Poisson

**Teorema de Slyvniak**:
Sea $\Phi$ un p.p. de Poisson de intensidad $\lambda$, entonces bajo la probabilidad Palm, la distribución es la de $\Phi_0 = \Phi + \delta_0$

- el origen se transforma entonces en el punto típico (representa lo que le ocurre a cualquier punto del proceso)
- dado un punto en el origen el resto de los puntos se comporta igual
- $E^0(f(\Phi)) = E(f(\Phi_0))$ (sirve para evaluar la prob. palm a partir de simulaciones pues basta agregar un punto en el origen)

# Cálculo de Palm para el p.p. Poisson

**Teorema de Slyvniak**:
Sea $\Phi$ un p.p. de Poisson de intensidad $\lambda$, entonces bajo la probabilidad Palm, la distribución es la de $\Phi_0 = \Phi + \delta_0$

- el origen se transforma entonces en el punto típico (representa lo que le ocurre a cualquier punto del proceso)
- dado un punto en el origen el resto de los puntos se comporta igual
- $E^0(f(\Phi)) = E(f(\Phi_0))$ (sirve para evaluar la prob. palm a partir de simulaciones pues basta agregar un punto en el origen)
- Junto con la fórmula de Campbell permite realizar cálculos para el p.p. Poisson

# Fórmula de Campbell: Introducción

- Sea $\Phi$ p.p. no necesariamente Poisson de intensidad $\Lambda$:
  - La distribución $P$ de $\Phi$ está dada por $P(Y) = P(\Phi \in Y) = P(\{w : \Phi(w) \in Y\})$
  - Esta distribución queda caracterizada por las distribuciones finito - dimensionales o incluso menos por las probabilidades de vacío en conjuntos compactos
- El proceso $\Phi$ se escribe como $\Phi = \{x_n\}_n$ o $\Phi = \sum_n \delta_{x_n}$, y para $f$ medible no-negativa se tiene que:

$$\int f(x)\Phi(dx) = \sum_{x\in\Phi} f(x) = \sum_{x_n} f(x_n)$$

$$E\left(\sum_{x\in\Phi} f(x)\right) = E\left(\int f(x)\Phi(dx)\right) = \int\int f(x)\varphi(dx)P(d\varphi)$$

# Fórmula de Campbell

- La cantidad de puntos en un conjunto $B$ está dada por $\Phi(B) = \sum_{x \in \Phi} \mathbf{1}_B(x)$ y su media es:

$$\Lambda(B) = E(\Phi(B)) = E\left(\sum_{x \in \Phi} \mathbf{1}_B(x)\right) =$$

$$\int\int \mathbf{1}_B(x)\varphi(dx)P(d\varphi) = \int \varphi(B)P(d\varphi)$$

- Intercambiando el orden de las integrales (Fubini) tenemos que:

$$E\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \int\int f(x)\varphi(dx)P(d\varphi) = \int f(x)\Lambda(dx)$$

- En el caso estacionario $\Lambda(B) = \lambda\nu_d(B)$ y se obtiene teorema o fórmula de Campbell:

$$E\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \lambda \int f(x)dx$$

# Distribución Palm - Introducción Informal

- ¿Cómo sería la generalización para una función $h(x, \Phi)$?

$$E\left(\sum_{x \in \Phi} h(x, \Phi)\right) = \int \sum_{x \in \varphi} h(x, \varphi) P(d\varphi) = \int E(h(x, \Phi) || x) \Lambda(dx)$$

esta igualdad se obtiene de tomar una partición $\{D_k\}_k$ del espacio y tomar límite con $D_k \to dx$.

- Si se define $P_x(Y) = P(\Phi \in Y || x)$, resulta que:

$$E\left(\sum_{x \in \Phi} h(x, \Phi)\right) = \int \int h(x, \varphi) P_x(d\varphi) \Lambda(dx)$$

# Distribución Palm - Introducción Informal

- En el caso estacionario se tiene que:

$$E\left(\sum_{x\in\Phi} h(x,\Phi)\right) = \lambda \int\int h(x,\varphi)P_x(d\varphi)dx$$
$$= \lambda \int\int h(x,\varphi_x)P_0(d\varphi)dx$$

y se conoce como la fórmula refinada de campbell.

## Distribución Palm - Introducción Informal

- En el caso estacionario se tiene que:

$$E\left(\sum_{x\in\Phi} h(x,\Phi)\right) = \lambda \int\int h(x,\varphi) P_x(d\varphi) dx$$
$$= \lambda \int\int h(x,\varphi_x) P_0(d\varphi) dx$$

  y se conoce como la fórmula refinada de campbell.
- Si $h(x,\varphi) = f(x)$ se recupera la fórmula de campbell:

$$E\left(\sum_{x\in\Phi} h(x,\Phi)\right) = E\left(\sum_{x\in\Phi} f(x)\right) = \lambda \int f(x) dx$$

## Distribución Palm - Introducción Informal

- Consideremos el siguiente caso particular:
  $Y = \{\varphi : \varphi(B(0,r)) = 1\}$ y la función $h : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}$ tal que
  $$h(x,\varphi) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\varphi_{-x})$$
  para $B \in \mathcal{B}^d$ acotado.
- Se quiere evaluar la cantidad media de puntos en $B$ cuyo vecino más cercano está a más de $r$, es decir:
  $$E\left(\sum_{x\in\Phi} h(x,\Phi)\right) = \lambda \int \sum_{x\in\varphi\cap B} \mathbf{1}_Y(\varphi) P_0(d\varphi) = \lambda\nu_d(B)P_0(Y)$$
- Esto inspira la definición de Matthes:

$$\begin{aligned} P_0(Y) &= \frac{1}{\lambda\nu_d(B)} \int\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\varphi_{-x})P(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda\nu_d(B)} E\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\Phi_{-x})\Phi(dx) \end{aligned}$$

# Distribución Palm - Introducción Informal

- Consideremos el siguiente caso particular: $Y = \{\varphi : \varphi(B(0,r)) = 1\}$ y la función $h : \mathbb{R}^d \times M \to \mathbb{R}$ tal que
$$h(x,\varphi) = \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\varphi_{-x})$$
para $B \in \mathcal{B}^d$ acotado.
- Se quiere evaluar la cantidad media de puntos en $B$ cuyo vecino más cercano está a más de $r$, es decir:
$$E\left(\sum_{x\in\Phi} h(x,\Phi)\right) = \lambda \int \sum_{x\in\varphi\cap B} \mathbf{1}_Y(\varphi)P_0(d\varphi) = \lambda\nu_d(B)P_0(Y)$$
- Esto inspira la definición de Matthes:

$$\begin{aligned} P_0(Y) &= \frac{1}{\lambda\nu_d(B)} \int\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\varphi_{-x})P(d\varphi) \\ &= \frac{1}{\lambda\nu_d(B)} E\int \mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_Y(\Phi_{-x})\Phi(dx) \end{aligned}$$

# Distribución Palm - Definición de Matthes

$$
\begin{aligned}
P_0(Y) &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int \int \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_Y(\varphi_{-x}) P(d\varphi) \\
&= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} E \int \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_Y(\Phi_{-x}) \Phi(dx)
\end{aligned}
$$

# Distribución Palm - Definición de Matthes

$$
\begin{aligned}
P_0(Y) &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int \int \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_Y(\varphi_{-x}) P(d\varphi) \\
&= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} E \int \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_Y(\Phi_{-x}) \Phi(dx)
\end{aligned}
$$

- Observar que lo anterior no depende de $B$

# Distribución Palm - Definición de Matthes

$$
\begin{aligned}
P_0(Y) &= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} \int \int \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_Y(\varphi_{-x}) P(d\varphi) \\
&= \frac{1}{\lambda \nu_d(B)} E \int \mathbf{1}_B(x) \mathbf{1}_Y(\Phi_{-x}) \Phi(dx)
\end{aligned}
$$

- Observar que lo anterior no depende de $B$
- Si $Y = \{\varphi : 0 \in \varphi\}$ entonces resulta que:

$$P_0(Y) = P(\Phi \in Y || 0) = 1$$

bajo la probabilidad Palm siempre hay un punto en el origen.

# Fórmula de Inversión

Como se relaciona $P_0$ con $P$:

$$\begin{aligned}
P(\Phi(B)=k) = E\left(\mathbf{1}_{\Phi(B)=k}\right) &= \frac{1}{k}E\left(\sum_{x\in\Phi\cap B}\mathbf{1}_{\{\Phi(B)=k\}}\right)\\
&= \frac{1}{k}E\left(\sum_{x\in\Phi}\mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{\Phi(B)=k\}}\right)\\
&= \frac{\lambda}{k}\int\int \mathbf{1}_B\mathbf{1}_{\{\Phi_x(B)=k\}}P_0(d\varphi)dx\\
&= \frac{\lambda}{k}\int_B P_0(\Phi_x(B)=k)dx
\end{aligned}$$

# Fórmula de Inversión

Como se relaciona $P_0$ con $P$:

$$
\begin{aligned}
P(\Phi(B)=k) = E\left(\mathbf{1}_{\Phi(B)=k}\right) &= \frac{1}{k} E\left(\sum_{x\in\Phi\cap B} \mathbf{1}_{\{\Phi(B)=k\}}\right) \\
&= \frac{1}{k} E\left(\sum_{x\in\Phi} \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\Phi(B)=k\}}\right) \\
&= \frac{\lambda}{k} \int\int \mathbf{1}_B \mathbf{1}_{\{\Phi_x(B)=k\}} P_0(d\varphi)dx \\
&= \frac{\lambda}{k} \int_B P_0(\Phi_x(B)=k)dx
\end{aligned}
$$

Hay versiones más generales de esta fórmula (por ejemplo considerando los mosaicos de voronoi)