Facultad de Ingeniería - IIE
Modelado y análisis de redes de telecomunicaciones
Práctico 3

Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

Ejercicio 1

Considere un sistema de enrutamiento de paquetes basado en diferenciación de servicios y reserva de recursos. Al router arriban dos clases de paquetes (clases 1 y 2). En ambos casos los paquetes arriban según un proceso de Poisson de tasas λ_1 y λ_2 respectivamente. El tiempo de servicio se supone exponencial de tasa μ, independiente de la clase. La capacidad del buffer está limitada a $K - 1$ paquetes. Los paquetes de clase 1 tienen prioridad absoluta sobre los paquetes de clase 2. Esto significa:

- Sólo una parte del buffer es destinada a los paquetes de clase 2: si hay más de L paquetes en el router (cualquiera sea su clase y contando al eventual paquete que está siendo servido), todo paquete de clase 2 que arribe es instantáneamente descartado. Los últimos $K-L$ lugares del buffer son reservados para los paquetes de clase 1.
- Los paquetes de clase 1 son siempre colocados delante de los paquetes de clase 2, si un paquete de clase 2 está en servicio (no hay ninguno de clase 1 en el sistema) y arriba un paquete de clase 1, este último entra en servicio inmediatamente, reemplazando al paquete de clase 2 quien pasa a ser encolado.
- Los paquetes de clase 1 pueden sacar del buffer a los de clase 2. Si un paquete de clase 1 arriba cuando hay exactamente K paquetes en el sistema (suponiendo que alguno de ellos es de clase 2), un paquete de clase 2 es descartado ("corrimiento" del paquete hacia atrás). Este descarte no ocurre cuando hay exactamente L paquetes en el sistema.

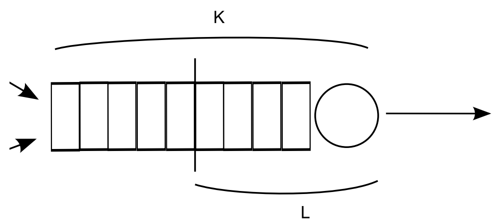

Figura 1: Esquema del sistema de enrutamiento

1. ¿Cuál es la distribución del tiempo remanente de servicio de un paquete de clase 2 al ser desplazado por el arribo de un paquete de clase 1?
2. ¿Qué modelo simple puede utilizar para modelar el comportamiento del sistema para el tráfico de clase 1?

3. Dimensione el tamaño del sistema (K) de manera tal de tener una probabilidad de rechazo de paquetes de clase 1 inferior a p.

4. Suponiendo los siguientes valores para los parámetros del problema: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mu = 4$, $p = 0{,}02$, K el mínimo valor de K que cumple la parte 3 y $L = 3$.

   a) Se considera una variable aleatoria bivariada $X_n = (n1, n2)$ para modelar el comportamiento del sistema. Dibujar el diagrama de estados asociado y calcular la distribución estacionaria.

   b) Calcular el número promedio de paquetes de clase 1 y de clase 2 en el buffer.

   c) Calcular para ambas clases la tasa de entrada de paquetes al sistema.

   d) Calcular el número promedio de paquetes de clase 2 que son "eliminados" del buffer (por arribos de paquetes de clase 1) por unidad de tiempo.

   e) Calcular para ambas clases la tasa de salida de paquetes al sistema.

Ejercicio 2

Se desea modelar la red celular de un proveedor de servicios de telefonía móvil. Para ello se asume el siguiente modelo simplificado del problema. La red está formada por celdas de cobertura contiguas, cada una atendida por una antena fija. Todas las celdas son iguales y disponen de C canales de comunicación (1 llamada ocupa un canal de comunicación). Como los usuarios son móviles, una llamada está compuesta por diferentes "sesiones", una por cada celda atravesada. El pasaje de una sesión a otra dentro de una misma llamada se denomina handover.

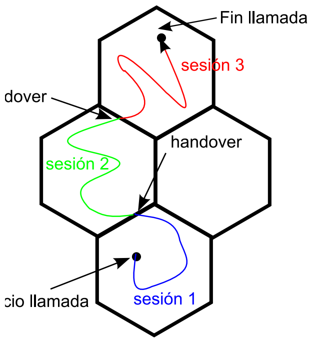

Figura 2: Ejemplo de una llamada separada en sesiones

Las siguientes hipótesis serán tenidas en cuenta:

- El arribo de nuevas llamadas dentro de una celda es un proceso de Poisson de tasa λ.

- El arribo de handovers dentro de una celda es un proceso de Poisson de tasa ν.

- La duración de una llamada sigue una distribución exponencial de tasa μ.

- El tiempo de permanencia de un usuario dentro de una misma celda sigue una distribución exponencial de tasa γ.
- Todos los procesos son independientes entre sí.

En la primera parte del problema, nuevas llamadas y handovers son tratados de igual forma, siendo rechazados en caso de que los C canales de la celda correspondiente estén ocupados.

1. Sea T la duración de una sesión: ¿cuál es la distribución de dicha duración?
2. ¿Cuál es el proceso global que rige el arribo de nuevas sesiones dentro de una celda?
3. Sea $X(t)$ el número de sesiones en la celda en el momento t. ¿Qué modelo simple puede adoptar para modelar $X(t)$?
4. Calcule la probabilidad de bloqueo de nuevas llamadas y de nuevos handovers.
5. ¿Qué inconveniente presenta el tratar de igual forma el arribo de nuevas llamadas y de handovers?

   En la segunda parte del problema se considera un tratamiento distinto para los handovers: dentro de cada celda se reservan g canales de guardia para los handovers, restringiendo a $C - g$ el número de nuevas llamadas aceptadas (una nueva llamada es aceptada en caso de haber menos de $C - g$ canales en uso).
6. Muestre que $X(t)$ sigue siendo una cadena de Markov en tiempo continuo, dibuje su grafo asociado y calcule su distribución estacionaria.
7. Calcule nuevamente la probabilidad de bloqueo de nuevas llamadas y de handovers.

Ejercicio 3
Se desea modelar un conmutador telefónico de prioridades, capaz de manejar C llamadas de forma simultánea. Tres clases de llamadas arriban al sistema, cada una con un nivel de prioridad distinto. Las llamadas de tipo $r = 1, 2, 3$ arriban al sistema de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_r, y el tiempo de servicio es de duración exponencial de tasa μ, independientemente de la clase. Si al arribar una nueva llamada se encuentran C o más llamadas en servicio, la llamada es encolada en el buffer del sistema de acuerdo al nivel de prioridad de la clase correspondiente. Tres zonas de prioridad son definidas en este buffer: en cada zona K_r es posible encolar llamadas de clase r a 1 (en la zona K_1 solo se encolan llamadas de clase 1, en la zona K_2 se encolan llamadas de clase 1 y 2 y en la zona K_3 se encolan llamadas de clase 1, 2 y 3). Si la nueva llamada no puede ser encolada se descarta.

1. Sea $X(t)$ una V.A. que indica la cantidad de llamadas (de cualquier clase) en el conmutador en el instante t. Muestrre que $X(t)$ es una cadena de Markov aunque no incluya la información sobre la cantidad de llamadas por clase.

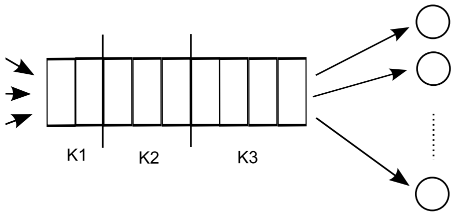

Figura 3: Diagrama del conmutador

2. El sistema se modela mediante una cadena de Markov unidimensional de tiempo continuo. Dibuje el diagrama de estados de dicha cadena.

   De aquí en adelante se consideran los siguientes valores para los parámetros del sistema: $C = 2$, $K_1 = K_2 = K_3 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1/3$ y $\mu = 1/2$.

3. Calcular la distribución estacionaria del sistema.

4. Calcular el porcentaje de llamadas rechazadas de clase $r = 1, 2, 3$.

5. Calcular el número de llamadas rechazadas por unidad de tiempo.

6. Calcular el número medio de llamadas atendidas de clase $r = 1, 2, 3$ por unidad de tiempo.

7. Calcular el número promedio de llamadas en espera.

8. Observe que el proceso de las llamadas *aceptadas* no es Poisson para todos los tipos de llamadas (*aceptadas* en el sentido de no rechazadas). Calcule la probabilidad de que haya i llamadas en el sistema (en curso y en el buffer) cuando una llamada de la clase r es *aceptada* y verifique no vale PASTA en este caso.

9. Calcular el tiempo promedio de espera de una llamada de clase $r = 1, 2, 3$ (sólo el tiempo en el buffer). Sugerencia: Considere todos los posibles casos del sistema cuando una llamada del tipo r es aceptada y calcule el tiempo medio de estadía en el buffer para ellos. Luego, utilizando la parte anterior, calcule la esperanza del tiempo de estadía en el buffer.

10. Calcular el número promedio de llamadas en espera de clase $r = 1, 2, 3$.

Ejercicio 4

Considere una red de estructura simétrica compuesta por M enlaces. Todos los enlaces tienen un buffer de capacidad ilimitada y tiempo de servicio distribuido exponencialmente de tasa μ. El tráfico arriba al sistema desde el exterior de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Cada nuevo paquete que arriba escoge uno de los M enlaces de manera equiprobable. Luego de ser atendido, cada paquete retorna al mismo enlace con probabilidad p, se dirige a alguno de los otros $M - 1$ enlaces con probabilidad q (probabilidad q para cada enlace) y deja la red con probabilidad r.

1. ¿Qué condición deben verificar M, p, q y r?

2. ¿Cuál es la tasa efectiva de entrada de paquetes a cada enlace?

3. ¿Cuál es el valor mínimo de M (en función del resto de los parámetros del problema) tal que el sistema se mantiene estable?

4. Suponiendo que se cumple la relación anterior, calcule el desempeño del sistema (tasa de partida del sistema, número medio de clientes en la red y retardo promedio por enlace).

Ejercicio 5

Imaginemos el siguiente modelo para una estación de taxis. Los clientes llegan a la estación cada tiempo exponencial de parámetro λ. Los taxis llegan a la estación también cada tiempo exponencial, pero de parámetro μ. Cada vez que un taxi llega a la estación, o recoge un cliente y ambos se van del sistema, o si no hay clientes queda esperando en la estación. Lo mismo sucede con los clientes: cada vez que un cliente llega a la estación, o se sube a un taxi y ambos se van del sistema, o si no hay taxis queda esperando en la estación. Sea $X_{\text{clientes}}(t)$ y $X_{\text{taxis}}(t)$ el número de clientes y taxis en la estación en tiempo t respectivamente. Imagine que la estación puede contener hasta m_c clientes y hasta m_t taxis. Cuando se llega a alguno de estos límites, los nuevos clientes o taxis se van a buscar otra estación. Sea $Y(t) = (X_{\text{clientes}}(t), X_{\text{taxis}}(t))$

Se pide:

1. Observe que $Y(t)$ es una cadena de Markov en tiempo continuo. Muestre que es ergódica.

2. Calcule la distribución estacionaria de $Y(t)$.

3. ¿Cuántos taxis hay en media en la estación? ¿Cuántos clientes?

4. Calcule la cantidad media de clientes rechazados por unidad de tiempo. Calcule la cantidad media de taxis rechazados por unidad de tiempo.