**Facultad de Ingeniería - IIE**
**Modelado y análisis de redes de telecomunicaciones**
**Práctico 2**

## Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

### Ejercicio 1

Una computadora genera paquetes de datos y los envía por la red. Éstos son recibidos por un enrutador que los coloca en la cola correspondiente a la interfaz de salida de acuerdo a la información de ruteo. El tiempo está dividido en intervalos de longitud constante y se observa el sistema al final de cada intervalo.

Suponemos que el tamaño de la cola es infinito y que la disciplina de la misma es FIFO. Los paquetes llegan y parten del sistema al final de cada intervalo. Suponemos que las partidas se producen antes que los arribos (para evitar servicios de duración nula).

En cada intervalo habrá un arribo con probabilidad $p$ y ningún arribo con probabilidad $1-p$ y esto será independiente de todo el pasado del proceso. Al mismo tiempo, en cada intervalo un paquete dejará la cola con probabilidad $q$ y no lo habrá hecho con probabilidad $1-q$ independientemente del pasado. Se supone además que los procesos de arribo y partida son independientes entre sí.

Sea $A_n$ una variable aleatoria que vale 1 si hubo un arribo en el intervalo $n$ y 0 en caso contrario. Sea $D_n$ una variable aleatoria que vale 1 si hubo una partida en el intervalo $n$ y 0 en caso contrario. Sea $X_n$ la variable aleatoria que indica el número de paquetes en la cola al final del intervalo $n$.

1. Escribir $X_{n+1}$ en función de $A_n$, $D_n$ y $X_n$.
2. ¿Es $X_n$ una cadena de Markov? Justificar.
3. Dibujar el diagrama de estados del proceso.
4. Escribir la matriz de transición de estados.
5. Clasificar la cadena (periodicidad, recurrencia, etc.) discutiendo según $p$ y $q$.
6. ¿Cuándo la cadena es ergódica? Justificar.
7. Se supone ahora que el tamaño de la cola no es infinito, sino que tiene una capacidad para dos paquetes. Si llega un paquete a la cola cuando está llena el mismo se pierde. ¿Cómo queda ahora el diagrama de estados? Clasificar la cadena. ¿Cuál es la probabilidad (en estado estacionario) de que la cola tenga $i$ paquetes ($i = 0, 1, 2$)? ¿Cuál es la probabilidad de que se pierda un paquete?

### Ejercicio 2

Se quiere realizar un modelo de la voz para una conversación de VoIP. La voz se digitaliza a 64 kbps, suprimiéndose a continuación los períodos de silencio de manera tal de no transmitir paquetes cuando la persona no habla. El protocolo genera cada 20 ms un paquete con datos (de 160 bytes) si se está hablando y no se generan paquetes si se está en silencio. De esta forma el tiempo queda dividido en intervalos (slots) de 20 ms. Definimos una variable aleatoria $X_n$ que vale 1 si se está hablando en el intervalo $n$ y 0 en caso contrario.

Para un primer modelo se asume la simplificación de que la probabilidad de que una persona continúe hablando o deje de hablar sólo depende de si estaba hablando o no en el slot anterior. De igual forma, la probabilidad de que la persona permanezca en silencio o comience a hablar sólo depende del estado anterior. Sea $p$ la probabilidad de dejar de hablar en el siguiente slot ($1-p$ será la probabilidad de continuar hablando) y $q$ la probabilidad de comenzar a hablar en el siguiente slot ($1-q$ la probabilidad de continuar en silencio).

1. El proceso $X_n$, ¿es una cadena de Markov? Justificar.
2. Dibujar el diagrama de estados del proceso.
3. Escribir la matriz de transición de estados.
4. Si la persona comienza hablando, ¿cuál es la probabilidad de que continúe hablando en el siguiente slot? ¿Y luego de dos slots?
5. ¿La cadena es irreducible? ¿Los estados son periódicos, aperiódicos? ¿La cadena es recurrente, recurrente positiva, recurrente nula? ¿Es ergódica? Justificar y distinguir casos si los hay.
6. Utilizando las ecuaciones de balance, ¿cuánto valen las probabilidades de hablar y de estar en silencio en estado estacionario?
7. Encontrar la expresión de la probabilidad de, dado que estoy en un determinado estado, permanecer en él durante exactamente $k$ slots. ¿Qué distribución tiene la cantidad de slots en que se permanece en el estado $i$ dado que se comienza en el estado $i$?

Ahora se intentará refinar el modelo de voz propuesto. Para ello tomaremos dos estados de silencio en lugar de uno: un estado de pausa corta que simule las pausas que una persona realiza normalmente al hablar y un estado de pausa larga para cuando la persona no habla porque el otro está hablando.

1. Extender el modelo anterior y dibujar el diagrama de estados de la cadena resultante.
2. Escribir la matriz de transición de estados.
3. Escribir un programa que genere trazas de voz artificialmente con este modelo a partir de diferentes estados iniciales y que grafique la evolución de la cadena para las siguientes probabilidades de transición:
   - Probabilidad de estar hablando y pasar a pausa corta 0,06 y a pausa larga 0,04.
   - Probabilidad de pasar de pausa larga a hablar 0,04.
   - Probabilidad de pasar de pausa corta a hablar 0,5.

**Ejercicio 3**

Se desea modelar el comportamiento de asignación de bandas de frecuencia en un sistema FDMA. Para ello se considera el siguiente modelo simplificado:

El sistema consta de $N$ bandas de frecuencia de ancho $BW$ en $Hz$. El tiempo está dividido en intervalos de longitud constante y se observa el número de bandas ocupadas al final de cada intervalo. En cada intervalo de tiempo, un nuevo cliente arriba con probabilidad $p$ y algún cliente libera su banda con probabilidad $q$. Se asume que en un mismo slot de tiempo:

- A lo sumo se libera una banda de frecuencia.
- A lo sumo arriba un nuevo cliente.
- Una banda de frecuencia se libera antes que se de un arribo.

La asignación de bandas se realiza de la siguiente forma:

- Mientras que el número de bandas ocupadas es menor a un cierto umbral $L$, a cada nuevo cliente que arriba se le asigna una banda entera (llamaremos $e$ al número de bandas enteras ocupadas).
- Al superarse dicho umbral, cada nuevo cliente que arriba recibe una banda de la mitad de ancho ($BW/2$). Llamaremos $m$ al número de medias bandas ocupadas.
- Todo nuevo cliente es rechazado si todas las bandas están en uso.

En resumen, al arribar un nuevo cliente:

- Si $e + m/2 < L$ se le asigna una banda entera.
- Si $e + m/2 \geqslant L$ se le asigna media banda.
- Si $e + m/2 = N$ el cliente es rechazado.

Sea $X_n = (e_n, m_n)$ un proceso bidimensional que indica el número de bandas enteras y de medias bandas ocupadas en el tiempo $n$. Para los parámetros del modelo consideraremos los siguientes valores: $p = 0{,}15$, $q = 0{,}3$, $L = 1$ y $N = 3$.

1. Dibujar el diagrama de estados del proceso .
2. Escribir la matriz de transición de estados.
3. ¿La cadena resultante es irreducible? ¿Los estados son periódicos, aperiódicos? ¿La cadena es recurrente? ¿Es ergódica? Justificar.
4. En caso de haberla, calcule la distribución estacionaria del proceso (dado el número de estados se recomienda utilizar alguna herramienta de cálculo numérico).
5. Suponiendo que $BW = 0{,}4$ Mhz, ¿cuánto vale el ancho de banda promedio asignado en este sistema?

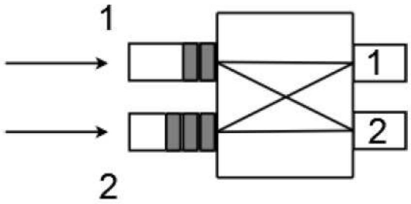


Figura 1: Input Queued Packet Switch

**Ejercicio 4**
Se desea estimar el throughput (en bytes/segundo) alcanzado en un switch de paquetes de buffer a la entrada (Input Queued Packet Switch) como el de la figura 1. El sistema posee dos puertos de entrada y dos de salida y los paquetes son de largo fijo $L = 1040$ bytes. El tiempo esta dividido en intervalos de longitud constante, igual al tiempo de transmisión de un paquete. En cada intervalo de tiempo se rutean los paquetes disponibles en los puertos de entrada de acuerdo al puerto de salida correspondiente. En este modelo ambos puertos de salida son equiprobables. Se asume que a la entrada del sistema (en ambos puertos) siempre hay paquetes disponibles para atender.

En caso de que ambos paquetes tengan el mismo puerto destino, se atiende uno de ellos de manera equiprobable y el otro se encola. Sea $X_n = (d1_n, d2_n)$ un proceso bidimensional que indica el puerto destino de cada paquete en tiempo $n$.

1. Dibujar el diagrama de estados del proceso.
2. Escribir la matriz de transición de estados.
3. ¿La cadena resultante es irreducible? ¿Los estados son periódicos, aperiódicos? ¿La cadena es recurrente? ¿Es ergódica? Justificar.
4. Estimar el throughput (en bytes/seg) de dicho switch, considerando una capacidad de salida en cada puerto de 1 Mbps.

**Ejercicio 5**

En este ejercicio se estudiará un modelo sencillo para la supervivencia de un apellido en el tiempo. Sean $n$ un indice que indica el nivel dentro del árbol genealógico y $X_n$ una V.A. que indica la cantidad de individuos varones en ese nivel. Por ejemplo, si asumimos $X_0 = 1$, $X_1$ serán los hijos varones del primer individuo, $X_2$ serán sus nietos, y así sucesivamente. Asumiremos que cada individuo en la generación $n$ tiene $k = 0, 1, \ldots$ hijos varones con probabilidad $p_k$ (donde lógicamente $\sum_k p_k = 1$ y $p_k \geq 0$) y que inicialmente hay una única persona con el apellido en cuestión (i.e. $X_0 = 1$)

1. Demostrar que $X_n$ es una cadena de Markov, identificar su espacio de estados, hallar la distribución inicial y dar la matriz de transiciones. (Observación: No es necesario para el ejercicio escribir las probabilidades de transición en una forma

cerrada. Es perfectamente aceptable dejarlas en función de la probabilidad de que la suma de $i$ V.A.s con distribución $p_k$ sea $j$.) ¿La cadena es ergódica?

2. Sea $q = f_{10} = P(X_n = 0$ para algún $n)$ la probabilidad de que el apellido se extinga. ¿Qué ecuación cumplen $q$ y $p_k$?

   Ayuda: Asuma que el $X_1 > 0$ (i.e. el primer individuo tuvo más de un hijo). Defina $Y_n$ como la cantidad de individuos varones en el nivel $n$ del sub-árbol generado por alguno de los primeros hijos. ¿Cuál es la probabilidad de extinción de que este sub-árbol se extinga? ¿Qué relación tiene este valor con $q$? ¿Qué se puede decir de los sub-árboles generados por los otros posibles hijos?

3. Encontar $q$ para $p_0 = p_1 = 1/4$ y $p_2 = 1/2$.

**Ejercicio 6**

El protocolo ALOHA fue uno de los primeros algoritmos de Control de Acceso al Medio para redes inalámbricas. El mecanismo es de una sencillez extrema. Cuando una estación tiene un paquete para transmitir, simplemente lo hace. Si el paquete no fue correctamente recibido por el destinario (hecho que queda en evidencia al no recibirse un ACK de su parte) entonces se espera un cierto tiempo aleatorio antes de intentar enviar el paquete nuevamente.

Se asumirán las siguientes hipótesis:

- Todas las estaciones transmiten paquetes a un único nodo, llamado radiobase o simplemente base.
- Existe un canal separado para las comunicaciones uplink (de las estaciones a la base) y downlink (de la base a las estaciones).
- Nos ocuparemos del canal uplink, pues el downlink en este escenario no es de interés.
- No existe la denominada captura de canal. Es decir, cuando las señales de dos estaciones (o más) llegan a la radiobase a la misma vez (sea cual sea la distancia entre la radiobase y cualquiera de las estaciones) éstas interfieren de tal forma que no se puede decodificar. También asumiremos que para decodificar un paquete correctamente, el paquete debe ser recibido correctamente en su totalidad (i.e. no hay corrección de errores). Esto significa que para recibir un paquete de un estación correctamente, la radiobase debe recibir la señal de esa radiobase exclusivamente durante el tiempo $T$ que dure el paquete (asumiremos $T = 1$).

Consideraremos una versión ranurada de ALOHA. En este caso, cada estación no envía el paquete inmediatamente después de haber sido generado, sino que espera hasta el comienzo de la ranura. El comienzo de la ranura depende de la estación en particular, y es tal que si hay más de una transmisión en la misma ranura, todas las tranmisiones son recibidas al unísono en la radiobase. Asumiremos un ancho de ranura igual a 1.

En esta ejercicio trataremos de analizar el caso en que hay una cantidad fija de usuarios $M$ en una red que opera bajo la versión ranurada de ALOHA. Para hacer el análisis realizable haremos ciertas suposiciones acerca del proceso de generación de paquetes de cada usuario, que detallamos a continuación.

En cada ranura de tiempo, cada usuario puede estar en uno de dos estados:

**Pensando** En este estado el usuario no tiene paquetes en el buffer esperando por ser re-enviados. La generación de paquetes es nuevos es la siguiente. En cada ranura temporal se pueden generar a lo sumo un paquete, evento cuyo probabilidad vale $\sigma$ independiente de todo el resto del sistema y la historia anterior de la estación. Cuando el paquete es generado se intenta enviar inmediatamente (i.e. al comienzo del siguiente slot). Si la transmisión es exitosa el usuario queda en el estado "pensando" y el proceso de generación de paquetes comienza nuevamente. Si no, el usuario pasa el estado "esperando".

**Esperando** En este estado el usuario re-envia el paquete que está en el buffer. Se asume que la estación no genera nuevos paquetes mientras esté en este estado. En cada ranura el usuario intenta re-enviar el paquete con probabilidad $\nu$ independiente de todo el resto del sistema y la historia anterior de la estación. Cuando el paquete es correctamente enviado la estación vuelve al estado "pensando".

Sea $k$ un índice que indica la ranura y $E_k$ una V.A. que indica la cantidad de usuarios en estado "esperando" en la ranura $k$.

1. ¿A qué tamaño de buffer corresponde el modelo anterior?
2. Muestre que $E_k$ es una Cadena de Markov.
3. Dibuje el grafo de transiciones de $E_k$ sin indicar los valores de los $p_{ij}$, dibujando una flecha para aquellas transiciones con probabilidad no nula.
4. ¿La cadena es ergódica?
5. Calcule la probabilidad de que, habiendo $j$ usuarios en estado "esperando" en la ranura $k$, $i$ de ellos intenten transmitir en esa ranura.
6. Calcule la probabilidad de que, habiendo $j$ usuarios en estado "esperando" en la ranura $k$, $i$ usuarios que están en estado "pensando" intenten transmitir en esa ranura.
7. Escriba una fórmula para $p_{ij}$ separando en casos según sea necesario.
8. Haga un programa que calcule la distribución estacionaria de $E_k$.
9. Calcule la probabilidad de que, habiendo $i$ usuarios en estado "esperando", en un slot se dé una transmisión exitosa.
10. Calcule el throughput del sistema (asuma que conoce la distribución estacionaria de $E_k$ porque hizo la parte 8).