Facultad de Ingeniería - IIE
Modelado y análisis de redes de telecomunicaciones
Curso 2011
Práctico 1

Repaso de probabilidad

Ejercicio 1
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y los sucesos A y B de los cuales se conocen $P(A)$, $P(B)$, y $P(A \cap B)$. Calcular

1. $P\left(A^C\right)$ y $P\left(B^C\right)$
2. $P(A \cup B)$
3. $P\left(A^C \cap B^C\right)$
4. $P\left(A^C \cap B\right)$ y $P\left(A \cap B^C\right)$

Ejercicio 2
Se consideran los eventos A y B tales que:

1. se conocen $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$. Calcular
   a) $P(A|B)$
   b) $P(B|A)$
   c) $P\left(A^C|B\right)$
   d) $P\left(B^C|A\right)$
   e) $P\left(A^C|B^C\right)$
   f) $P\left(B^C|A^C\right)$
2. se conocen $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup B)$. Calcular
   a) $P(A|B)$
   b) $P(B|A)$
3. $B \subseteq A$. Calcular $P(A|B)$
4. A y B son disjuntos (o excluyentes), esto es $A \cap B = \emptyset$. Suponiendo $P(B) \neq 0$, calcular $P(A|B)$. ¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa si $P(B) = 0$?

Ejercicio 3
Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ una partición de Ω (i.e. $\cup_i A_i = \Omega$ y $A_i \cap A_j = \phi \; i \neq j$) todos con probabilidad positiva y B un evento con probabilidad positiva. Pruebe la denominada *fórmula de Bayes*:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \quad k = 1, \ldots, n$$

Ejercicio 4
Se admite que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5 % consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un análisis clínico: si el resultado de aplicar el análisis a las dos submuestras da positivo, el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado. Considere los eventos:

$A_1 = \{$el resultado de la primera submuestra es positivo$\}$

$A_2 = \{$el resultado de la segunda submuestra es positivo$\}$

$B = \{$el jugador es sancionado$\}$

$D = \{$el jugador consumió anfetaminas$\}$

Se asume que los eventos A_1 y A_2 *condicionados* a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)P(A_2|D)$ y $P(A_1 \cap A_2|D^c) = P(A_1|D^c)P(A_2|D^c)$. Los ensayos en el laboratorio demostraron además que $P(A_i|D) = 0{,}90$ y $P(A_i|D^c) = 0{,}02$ para $i = 1, 2$.

1. ¿Le parece razonable la suposición de independencia de los eventos A_1 y A_2 condicionados a D y D^c? ¿Bajo qué condiciones?
2. Calcule la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.
3. Calcule la probabilidad de que el resultado de la segunda submuestra sea positivo dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.
4. Calcule la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?
5. Calcule la "tasa de no equivocación". Es decir, la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.
6. Calcule la "tasa de equivocación". Es decir, la probabilidad de que un jugador sancionado NO haya consumido anfetaminas.

Ejercicio 5
Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *iid* con distribución F.

1. Calcular la función de distribución de $X_n^* = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
2. Calcular la función de distribución de $X_1^* = \text{mín}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Ejercicio 6

1. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea dar garantía sobre sus equipos por un cierto período de x_0 años, pero no desea tener que reparar por este servicio más que el 10 % de los equipos que fabrica. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar x_0.

2. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida en años está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

Ejercicio 7

1. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros μ y λ respectivamente. Hallar la distribución de la variable aleatoria $Z = \min\{X, Y\}$.

2. Para las variables de la parte anterior calcular $P\{X < Y\}$ en función de μ y λ.

3. Un sistema electrónico con dos componentes A y B puede ser afectado por tres tipos de shock eléctrico.

   a) Uno que sólo destruye a A y que se produce (partiendo de un instante inicial) en tiempo X_1 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_1.
   b) Uno que sólo destruye a B y que se produce (partiendo de un instante inicial) en tiempo X_2 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_2.
   c) Uno que destruye a ambos componentes y que se produce (partiendo de un instante inicial) en tiempo X_3 que tiene distribución exponencial de parámetro λ_3.

   Sean T_1 y T_2 los tiempos de vida de los componentes A y B respectivamente. Asumiendo que las variables X_1, X_2 y X_3 son independientes; hallar en función de λ_1, λ_2 y λ_3 la probabilidad $P\{T_1 = T_2\}$.

Ejercicio 8
Se ponen a funcionar en un mismo momento (que tomamos como tiempo 0) dos lamparitas de dos marcas distintas, A y B, que se dejan prendidas hasta que se rompan. Llamemos X al tiempo de duración de la lamparita A e Y al tiempo de duración de la lamparita B. Admitamos que X e Y son independientes, que X sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_1 > 0$ y que Y sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_2 > 0$. Llamemos S al tiempo en que ocurre la primera rotura de alguna de las dos lamparitas y T al tiempo en que se rompe la restante lamparita.

1. Calcular las funciones de distribución de S y T.

2. Calcular $E(S)$, $E(T)$.

3. Calcular $E(ST)$. ¿Son S y T independientes? Justifique la respuesta.

4. Calcular $P(S = T)$.

Ejercicio 9
Una variable aleatoria continua X tiene densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

¿Cuál es el valor esperado de $g(X) = e^{\frac{2X}{3}}$.

Ejercicio 10

Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* con distribución F_θ donde θ es un parámetro. Se considera la familia $\{T_n(X_1,\ldots,X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde T_n es una función de los n datos (que cumple ciertas hipótesis). $T_n(X_1,\ldots,X_n)$ se llama un estimador de θ. Un estimador se dice *consistente* si $T_n(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} \theta$. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* tales que $E(X_1) = \mu$ y $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$.

1. Demostrar que $\overline{X}_n$ es un estimador consistente de μ, esto es que $\overline{X}_n \xrightarrow[n]{c.s.} \mu$.

2. Demostrar que si $\sigma_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ y $s_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ entonces

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma^2 \qquad s_n^2 \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma^2 \qquad \sigma_n \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma \qquad s_n \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma$$

   (σ_n^2 y s_n^2 son estimadores consistentes de σ^2 y σ_n y s_n son estimadores consistentes de σ.)

   Sugerencia: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$ y usar los siguientes resultados:

   Si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(X)$

   Si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$ e $Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} Y$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(X, Y)$

Ejercicio 11

Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *iid* con distribución F_θ. Se define el *sesgo* de un estimador de θ, $T_n = T_n(X_1,\ldots,X_n)$ como $E(T_n - \theta)$. Un estimador T_n se dice *insesgado* si su sesgo es cero, es decir $E(T_n) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Decimos que es *asintóticamente insesgado* si $E(T_n - \theta) \xrightarrow[n]{} 0$.

Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iid* tales que $E(X_1) = \mu$ y $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$.

1. Mostrar que $\overline{X}_n$ es insesgado como estimador de μ, que σ_n^2 no es insesgado como estimador de σ^2 y que s_n^2 es insesgado para σ^2.

2. Mostrar que σ_n y s_n no son insesgados como estimadores de σ.

3. Sea $X_1,\ldots,X_n \sim \exp(\lambda)$ *iid*, entonces $\dfrac{1}{\overline{X}_n}$ es consistente como estimador de λ pero no insesgado.

Sugerencia: para las dos últimas partes usar la desigualdad de Jensen[1].

Ejercicio 12

Imagine el siguiente experimento. Se tiene una superficie horizontal sobre la cual

[1] Desigualdad de Jensen: si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con $\varphi(x)'' \geq 0\ \forall x$, entonces $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$. Además el igual se cumple si $\varphi(x)$ es lineal. El enunciado anterior es válido más en general para cualquier φ convexa

hay dibujadas líneas paralelas (de espesor despreciable) separadas entre sí por una distancia t. Sobre esta superficie se lanza una aguja de largo l que cae de forma equiprobable en cualquier parte de la misma y en un ángulo uniformemente distribuido en $[0, 2\pi]$ (dada la dureza de la superficie el evento B={la aguja queda clavada en la superficie} tiene probabilidad nula). Sea el evento $A = \{$la aguja cae tocando una de las rayas de la superficie$\}$.

1. Pruebe la siguiente fórmula para el caso $l \leq t$:

$$P(A) = \frac{2l}{t\pi}$$

2. Simule en MATLAB (o su programa favorito) varias repeticiones del experimento y a partir de ellas estime el valor de π. Utilizando el teorema central del límite, calcule un intervalo dentro del cual π esté con probabilidad $p \geq 0{,}95$.