

Parte I

**Conceptos sobre  
Electromagnetismo**



# Capítulo 1

## Introducción

Conceptualmente sabemos que la energía es la capacidad para efectuar un trabajo. Existen diferentes formas en que la energía se manifiesta, dentro de las cuales la forma eléctrica y la forma mecánica resultan relevantes.

Las Máquinas Eléctricas han sido y continúan siendo el medio práctico relevante a fin de transformar, convertir, energía eléctrica en energía eléctrica o energía eléctrica en energía mecánica y viceversa.

Se considera que una máquina convertidora de energía es eléctrica cuando SIEMPRE emplea un enlace intermedio a través de un campo magnético (energía magnética) a fin de realizar la conversión. El proceso entonces es necesariamente de la forma:

$$\begin{array}{l} \text{ENERGÍA} \\ \text{ELÉCTRICA} \end{array} \iff \begin{array}{l} \text{ENERGÍA} \\ \text{MAGNÉTICA} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{ENERGÍA ELÉCTRICA} \\ \text{ENERGÍA MECÁNICA} \end{array} \right.$$

Si la máquina transforma energía bajo forma mecánica a energía bajo forma eléctrica se le llama GENERADOR. Mientras que si realiza el proceso inverso, energía bajo forma eléctrica a energía bajo forma mecánica se le llama MOTOR en el caso que el movimiento no tenga restricciones, mientras que si tuviera restricciones se le denomina ACTUADOR. Finalmente, cuando la máquina transforma energía eléctrica en energía eléctrica se le denomina TRANSFORMADOR.

La era de la aplicación industrial y comercial de las Máquinas Eléctricas comienza en 1870 con Thomas Edison quién desarrollo comercialmente generadores de c.d a fin de brindar iluminación a través de su invento: la lámpara incandescente. Implícitamente Edison es además el pionero de los sistemas de distribución eléctrica. El segundo “mojón” histórico del desarrollo de las máquinas eléctricas se debe a Nikola Tesla cuando en 1888 patenta el motor trifásico de inducción. Implícitamente introduce la aplicación industrial y comercial de la c.a, la cual en la década siguiente comienza su desarrollo explosivo en la expansión de las redes de transmisión de energía

a largas distancias, cuando Charles Steinmetz desarrolla la aplicación de los Transformadores.

Los conceptos básicos -electro-magnético-mecánicos- sobre las máquinas eléctricas actuales son los mismos que se originaron en aquella época. Lo que ha tenido y tiene grandes desarrollos son los materiales y diseño de detalle que se utilizan en la construcción de las máquinas, fundamentalmente, respecto a los materiales, en sus propiedades eléctricas y magnéticas. Últimamente en el tiempo, la “revolución del estado sólido” ha permitido el desarrollo de mejoras significativas en el control de las máquinas.

En última instancia, las máquinas eléctricas son uno de los instrumentos disponibles por los humanos con el fin de aumentar su capacidad de aprovechar los recursos, transformando y controlando la energía disponible en la naturaleza (para su bien o para su mal, pero esto último no es para nada tema de este curso).

## Capítulo 2

# Teoría de Circuitos Eléctricos en Estado Estable Senoidal

Se supone que el estudiante conoce y domina con razonable fluidez la resolución de circuitos excitados por fuentes de tensión y corrientes senoidales en régimen permanente o estacionario o estable, monofásicos y/o trifásicos a partir del curso de “Sistemas Lineales”<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Si este no fuera el caso se recomienda, en forma urgente, un repaso del contenido sobre esta temática en el curso de Sistemas Lineales, para luego, como ejercicio, confirmar que domina totalmente lo tratado en este capítulo.



## Capítulo 3

# Electromagnetismo

Como ha sido mencionado, uno de los aspectos centrales y comunes en todas las máquinas eléctricas es que su proceso de conversión de energía electro-mecánica lo realizan siempre “pasando” por la energía magnética.

Se supone que el estudiante tiene un curso de Electromagnetismo donde conoce y domina los aspectos básicos del magnetismo, resolución de circuitos magnéticos y energía magnética. Sin embargo, dada la trascendencia de estos temas para el entendimiento del proceso que tiene lugar en las máquinas eléctricas y dado que necesariamente los cursos básicos de Electromagnetismo presentan un “enfoque teórico”, se realiza un “repaso” de los conceptos más importantes que deberán ser aplicados y al mismo tiempo con un “enfoque” más pragmático de los mismos.

### 3.1. Leyes Fundamentales

A continuación se realiza un repaso de las principales leyes electromagnéticas, necesarias para el desarrollo de las teorías asociadas.

#### 3.1.1. Ley de Lorentz

Un campo magnético es un espacio de influencia donde cualquier carga eléctrica en movimiento experimenta una fuerza dada por:

$$\vec{F} = q\vec{u} \wedge \vec{B} \longleftrightarrow \begin{cases} F & \text{Fuerza en Nw} \\ q & \text{carga en Coulomb} \\ u & \text{velocidad de la carga en m/s} \\ B & \text{densidad de flujo magneticoen Wb/m}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Si la carga eléctrica fluye en un conductor dando lugar a una corriente  $I$  medida en Amperes, y el conductor se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  medido en Wb/m<sup>2</sup>, el conductor tiene una longitud  $l$  (metros) y la corriente circula normal al campo, entonces la fuerza vale

$\vec{F} = l \cdot \vec{I} \wedge \vec{B}$  (Nw) por lo cual resulta normal al plano  $[IB]$ . En este caso decimos que el sistema conductor-campo es bien comportado<sup>1</sup>.

### 3.1.2. Ley de Biot-Savat

El movimiento de cualquier carga eléctrica (flujo de corriente), establece en el espacio de un medio cualquiera un campo magnético  $\vec{H}$  que se mide en Amper/metro, cuya magnitud en cualquier punto  $P$  localizado a una distancia perpendicular  $R$  (metros) de un conductor de largo (infinito) recorrido por una corriente  $I$  es:

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi R} \vec{I} \wedge \vec{a}_R \longleftrightarrow |\vec{a}_R| = 1 \quad (3.2)$$

Observar que el módulo de  $\vec{H}$  no depende del material que compone “el espacio”, vale lo mismo sea el material “vacío, aire, agua o hierro”.

Si ahora el “medio” tiene como propiedad una permeabilidad magnética absoluta  $\mu^2$  medida en Hy/m, entonces se asocia al campo magnético  $\vec{H}$ , un vector densidad de flujo magnético  $\vec{B}$  en ese medio dado por:  $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ . Si el campo  $\vec{B}$  atraviesa una superficie  $A$ , entonces aparece un flujo magnético  $\phi = \oint_A \vec{B} \cdot \vec{n} dA$  medido en Wb. Si  $\vec{B}$  y  $\vec{A}$  son bien comportadas entonces  $\phi = B \cdot A$ .

De esta ley surge la “regla de la mano derecha” a fin de determinar el sentido del flujo magnético  $\phi$  generado por un campo magnético  $H$ , el cual a su vez es generado por una corriente  $I$  que recorre un conductor en cierta disposición en el espacio (si sujeto el conductor con la mano derecha, con el pulgar extendido en la dirección de  $I$ , entonces los dedos restantes se arrollan alrededor del conductor en la dirección del campo).

### 3.1.3. Ley de Faraday

Si un conductor finito resulta enlazado por un flujo magnético que varía en el tiempo, entonces aparece, se induce, en los bornes del conductor una tensión  $e$  dada por:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3.3)$$

La polaridad de la tensión es tal que; si la corriente pudiera circular como resultado de la misma, el flujo magnético que esta corriente establecería se

<sup>1</sup>En general en los estudios introductorios de las Máquinas Eléctricas en régimen permanente los sistemas conductor-campo son “bien comportados”.

<sup>2</sup>La permeabilidad absoluta del vacío vale:  $\phi_o = 4\pi 10^{-7}$  Hy/m constante  $\forall \vec{H}$ , sin embargo en el resto de los materiales de la naturaleza la permeabilidad depende del valor de  $\vec{H}$ . En la práctica solo se considera esta dependencia en los llamados materiales ferromagnéticos, asumiéndose para los restantes materiales, constante independiente de  $\vec{H}$ .

opondría a la variación del flujo que la origina, se podría decir que intenta oponerse al cambio. Como colorario inmediato si al conductor lo devano en  $N$  vueltas la tensión en sus extremos será:  $e = -N \frac{d\phi}{dt}$ . Medítese como esta ley vincula la existencia de una campo magnético con una tensión eléctrica resultante, resulta una de las leyes fundamentales del electromagnetismo y base del funcionamiento de las máquinas.

### 3.1.4. Ley de Ampere

La relación causa-efecto entre una corriente eléctrica  $I$  que recorre  $N$  conductores en un mismo sentido y el campo magnético que estas generan a lo largo de una curva cerrada que rodea a los  $N$  conductores esta dada por:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI = Fmm \quad (3.4)$$

$Fmm$  es la llamada Fuerza MagnetoMotriz. Esta ley al igual que la anterior tiene una importancia teórica fundamental, medítese ahora como vincula la existencia de una corriente eléctrica con un campo magnético resultante. Estas dos últimas leyes son la base de la teoría electro-magnética Sin embargo su aplicación práctica resulta en general muy engorrosa dada su dependencia geométrica con la trayectoria elegida así como la disposición de los conductores, salvo para configuraciones típicas realizadas de ex profeso.

Este último es el caso del circuito magnético el cual se configura de la manera indicada por la figura 3.1.

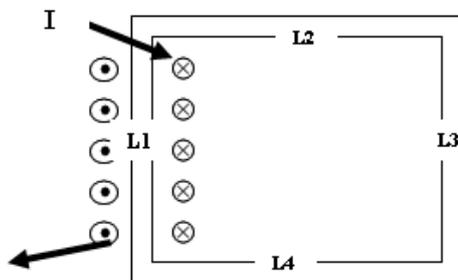


Figura 3.1: Circuito Magnético simple

En una “estructura” de material principalmente magnético (representada en la fig 3.1 por las long.  $L1$  a  $L4$  y secciones  $S1$  a  $S4$ ) inmersa en un medio no magnético (usualmente aire) se bobina en forma uniforme  $N$  vueltas de un conductor recorrido por una corriente  $I$ . Si aplicamos la ley de Ampere en la trayectoria dada por el material se tiene  $\sum_{i=1}^4 \int_{L_i} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$  en la aproximación que  $H$  es colineal con

$d\vec{l}$ . Pero  $H = \frac{B}{\mu} = \frac{\phi}{S\mu}$ , y si suponemos ahora que el flujo magnético se conserva dada la diferencia de permeabilidad magnéticos entre el material y el medio resulta:  $\phi \sum_{i=1}^4 \frac{L_i}{\mu S_i}$  obteniendo de manera sencilla la determinación del flujo magnético.

La configuración tipo indicada en la figura es de aplicación generalizada en las máquinas eléctricas como forma de obtener un cierto flujo magnético en un material a partir de una cierta corriente  $I$ . Dada su trascendencia da

lugar a la Teoría de Circuitos Magnéticos que repasaremos más adelante, que permite determinar los flujos magnéticos para diferentes tipos de configuraciones del circuito.

## 3.2. Propiedades Magnéticas de los Materiales

### 3.2.1. La curva magnética

La magnitud fundamental que identifica las diferentes características magnéticas de los materiales es la *permeabilidad magnética*  $\mu$ , utilizándose usualmente la *permeabilidad relativa*  $\mu_r = \mu/\mu_0$ . La clasificación básica es en materiales magnéticos o ferromagnéticos y no magnéticos dependientes de la forma de la curva  $\mu = B/H$  para diferentes valores de  $H$ .

Los materiales no magnéticos (aire, cobre, bronce, agua, etc) presentan una curva *lineal* para todo  $H$ , siendo el valor de  $\mu_r \cong 1$ . Por su parte los materiales magnéticos (hierro, níquel, cobalto) presentan una curva *no lineal* en  $H$ , típica, la cual presenta dos zonas bien diferenciadas para  $H$  creciente: una zona *lineal* donde  $\mu_r \cong 1000$  (o mucho más), una zona de transición rápida llamada *codo* donde  $\mu_r$  cae rápidamente y luego una zona de saturación donde  $\mu_r \cong 1$  comportándose entonces como un material no magnético. A esta curva se le denomina usualmente la *curva del Hierro* o *curva magnética*. Se observa que todos los materiales en particular los magnéticos presentan magnetismo remanente (base de los llamados imanes permanentes) el cual se caracteriza por que  $B \neq 0$  (usualmente de muy pequeño valor) con  $H = 0$ . En la naturaleza las propiedades magnéticas de los materiales magnéticos son regulares en estado natural, por tal razón los materiales magnéticos hoy utilizados si bien la mayoría en base a Hierro son productos de transformaciones térmico-mecánicas llamadas los aceros magnéticos existiendo hoy día múltiples variedades calidad-precio.

Se recomienda consultar cualquier manual (reciente) de materiales magnéticos a fin de observar las diferentes características magnéticas de los materiales usualmente utilizados. En la práctica común es usual aproximar la curva sin tener en cuenta el codo en la forma indicada por la figura 3.2.

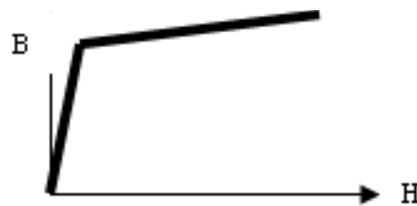


Figura 3.2: Curva Magnética Típica

### 3.2.2. Histéresis

Los materiales magnéticos (ferromagnéticos) presentan todos (en mayor o menor medida actualmente controlable) el fenómeno de histéresis. Este

fenómeno se caracteriza por el hecho de que la curva magnética cuando  $H$  “crece” es diferente que la curva magnética cuando  $H$  “decrece”, siempre en el plano  $[H; B]$  la curva magnética para  $H$  crecientes esta “por debajo” de la curva magnética para  $H$  decrecientes. Este fenómeno usualmente no es tenido en cuenta en la práctica operativa común con las máquinas, pero sí debe ser tenido en cuenta en algunas aplicaciones en particular, como luego veremos, en la determinación de las llamadas *pérdidas magnéticas*.

### 3.2.3. Magnetostricción

Los materiales magnéticos presentan un fenómeno de *deformación elástica* en presencia de un campo magnético externamente aplicado. Si bien el cambio dimensional en términos absolutos es despreciable (micras), si el campo es alterno, el fenómeno se manifiesta por una vibración en el rango audible al doble de la frecuencia de la fuente. En la práctica operativa este fenómeno no se tiene en cuenta, sin embargo en las especificaciones de las máquinas se debe tener en cuenta en virtud de las restricciones actualmente existentes de contaminación sonora.



## Capítulo 4

# Circuitos Magnéticos

Denominamos circuitos magnéticos ciertas trayectorias concentradas de flujo magnéticos en materiales ferromagnéticos junto con su fuente de excitación magnetomotriz ( $Fmm$ ).

El objetivo básico en el diseño de los circuitos magnético es establecer un flujo magnético predeterminado en un espacio o caminos ferromagnéticos dados y generado por la mínima  $Fmm$  posible. Dado un circuito magnético los problemas ha resolver en general son de dos tipos:

- Determinar la  $Fmm$  requerida para obtener un cierto flujo dado.
- Determinar el flujo establecido por un valor dado de  $Fmm$ .

### 4.1. Metodología de Análisis

Es posible realizar una analogía entre los circuitos magnético con fuentes constantes de  $Fmm$  excitadoras (corriente en d.c) y los circuitos eléctricos de  $cd$ . Si hacemos abstracción de la no linealidad magnética, la técnica de análisis es idéntica para ambos tipos de circuitos. En efecto consideremos el circuito de la figura 4.1, donde los caminos  $L1$  a  $L4$  son de ciertos materiales ferromagnéticos con permeabilidad  $\mu_1$  a  $\mu_4$  supuesta constante.

Habíamos visto que:

$$\phi \sum_{i=1}^4 \frac{Li}{\mu_i S_i} = NI \quad (4.1)$$

Consideremos ahora la siguiente ecuacion:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{Li}{\mu_i S_i} = \sum_{i=1}^4 \mathfrak{R}_i \quad (4.2)$$

siendo  $\mathfrak{R}_i$  la RELUCTANCIA del tramo  $i$ , la cual se interpreta como la oposición al paso del flujo magnético en analogía directa a la resistencia de

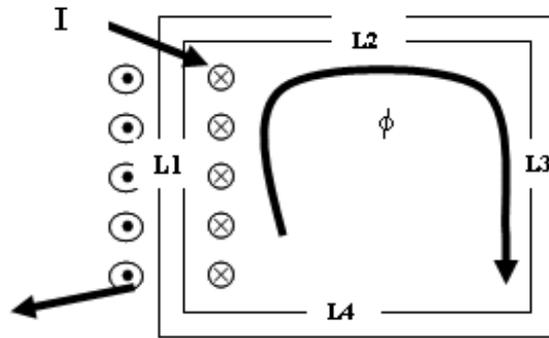


Figura 4.1: Circuito Magnético

un circuito eléctrico al paso de la corriente.

Análogamente la ecuación anterior indica que la suma de todas las caídas de  $Fmm$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada de material ferromagnético es igual al valor de las fuentes de  $Fmm$  incluídas en dicha trayectoria, lo cual es una analogía directa a la ley de mallas de Kirchoff.

En consecuencia podemos “modelar” un circuito magnético como si fuera eléctrico donde la fuente de tensión es la  $Fmm$ , las resistencia son las reluctancias y la corriente es el flujo y aplicar los métodos ya conocidos de resolución de circuitos eléctricos. Para el circuito de la figura 4.1 esta analogía quedaria como muestra la figura 4.2. Luego al igual que los circuitos

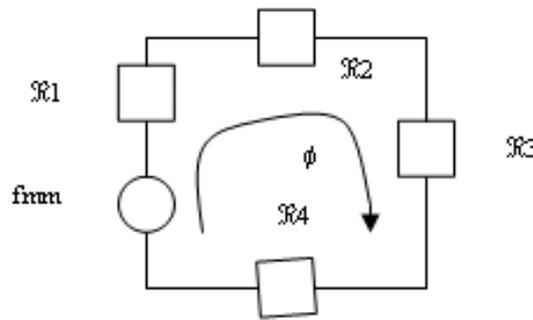


Figura 4.2: Equivalente Electrico

eléctricos resueltos a través de la ley de Ohm ( $I = \frac{V}{R}$ ) resulta  $\phi = \frac{Fmm}{\mathfrak{R}}$  donde  $\mathfrak{R} = \sum \mathfrak{R}_i$  (para el caso “serie” de la figura) a la que se le denomina Ley de Hopkinson.

Si la permeabilidad magnética fuera constante la resolución de circuitos magnéticos sería idéntica a la de los circuitos eléctricos. En general se hará este supuesto, mientras que en aquellos casos en que no puedas suponerse que la permeabilidad es constante se debe recurrir a soluciones iterativas mediante software de aplicación. Las configuraciones típicas de los circuitos

magnéticos, al igual que los circuitos eléctricos, son dos:

**Circuito serie** Cuando el trayecto del flujo único he idéntico para diferentes reluctancias, conectadas entonces en serie.

**Circuito paralelo** Cuando existe dos o más trayectorias de flujo en general diferentes para diferentes reluctancias conectadas entonces en paralelo.

Los métodos de cálculo son idénticos a los realizados en los circuitos eléctricos a fin de determinar la reluctancia equivalente “vista” por la fuente o los flujos que circulan por las diferentes reluctancias que componen el circuito, no debiéndose esperar dificultad alguna en su resolución<sup>1</sup>. Al igual que los circuitos eléctricos los circuitos magnéticos presentan topologías de reluctancias en serie y/o paralelo.

## 4.2. El EntreHierro

Los circuitos magnéticos que se encuentran usualmente en las máquinas, salvo en el caso de los transformadores, no presentan una trayectoria continua de material ferromagnético. En general aparece una discontinuidad en la trayectoria constituida por un espacio en aire, de una longitud muy pequeña  $\delta$  (del orden de mm) mucho menor que cualquiera de las dimensiones que conforman la sección de la trayectoria ferromagnética. A este espacio en aire es lo que denominamos *entrehierro*.

En estas condiciones el esquema básico más general para representar los circuitos magnéticos que interesan en las máquinas eléctricas es el que se muestra en la figura 4.3. Si el flujo que circula por el material ferromagnético

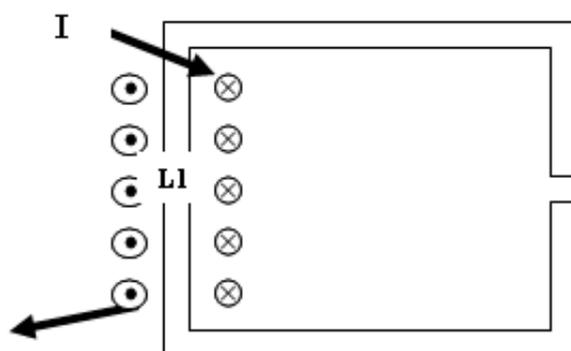


Figura 4.3: Circuito Magnético con EntreHierro

no se distorsionara, el método de análisis sería idéntico al que se indicó en

<sup>1</sup>En caso de presentarse dificultades, además de preocuparse, se sugiere consultar la referencia básica páginas 61 a 75, luego de repasar los métodos básicos de resolución de circuitos eléctricos.

el punto anterior, simplemente la trayectoria dada por el entrehierro impondría una reluctancia expresada por  $\mathfrak{R}_\delta = \frac{\delta}{\mu_o S}$  donde  $S$  es la sección de la trayectoria ferromagnética.

Sin embargo en la realidad lo anterior no es exacto debido a que suponíamos que el flujo se “cerraba” por la trayectoria ferromagnética por la diferencia de permeabilidad magnética (muy superior) al medio circundante en general aire. Pero ahora es el mismo aire por el que circula el flujo por lo que el supuesto anterior es falso. En efecto el flujo magnético circula por una sección mayor que la dada por las superficies adyacentes de la trayectoria de material ferromagnético con lo cual aparecen errores en el cálculo de la intensidad del campo magnético si no se tiene en cuenta este efecto. El error cometido es muy dependiente del “ancho” del entrehierro, pudiéndose no tenerse en cuenta para cálculos aproximados en entrehierros no superiores a  $\delta = 0,5mm$ .<sup>2</sup>

### 4.3. Flujo de Fugas

El supuesto anterior que todo el flujo se cierra por la trayectoria de material ferromagnética introduce otro error tenga el circuito o no entrehierro. En efecto a pesar de la diferencia de permeabilidad con el medio circundante (aire) parte del flujo generado por la bobina se cierra por el medio circundante, a este flujo se le denomina flujo de fugas. En el modelado de las máquinas este flujo en general no puede ser despreciado aún en cálculos aproximados y como se verá siempre será tenido en cuenta. En los circuitos magnéticos se tiene en cuenta a partir de una *reluctancia equivalente de fugas* cuyo cálculo supera los objetivos de este curso.

---

<sup>2</sup>Para este curso, salvo indicación expresa este efecto NO (no) será tenido en cuenta en los cálculos en circuitos magnéticos. Una forma de tener en cuenta este efecto en los cálculos se indica en la referencia básica del curso en el ítem 3.4.2 pag. 60/61.

## Capítulo 5

# Energía Magnética

Hemos mencionado que la conversión electro-electromecánica de energía que tienen lugar en las máquinas eléctricas, pasa, necesariamente, por la conversión en energía magnética. Por tanto, más allá del cálculo, la conceptualización de la energía magnética resulta de trascendente importancia para este tema. Una de las magnitudes fundamentales que relacionan las magnitudes magnéticas ( $B$ ,  $H$ ,  $\mu$ , circuitos magnéticos, etc) con las magnitudes eléctricas ( $V$ ,  $I$ ) es la conocida INDUCTANCIA o IMPEDANCIA INDUCTIVA o  $L$ . Veámosla con cierto cuidado.

### 5.1. Indutacias de los Circuitos Magnéticos

Consideremos el circuito magnético elemental de la figura 5.1 y su curva del hierro aproximada.

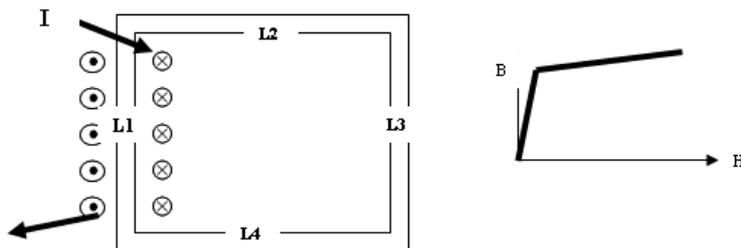


Figura 5.1: Circuito Magnético y curva del material

Si  $N$  es el número de vueltas del bobinado,  $L$  la longitud de la trayectoria magnética y  $S$  la sección de la misma sabemos que en primera aproximación podemos escribir:

$$HL = NI \Rightarrow H = \frac{N}{L}I \text{ \& } \phi = BS \Rightarrow B = \frac{\phi}{S} \quad (5.1)$$

por tanto si  $S$ ,  $N$  y  $L$  son constantes la curva del hierro  $[H B]$  se corresponde salvo un factor de escala con la curva  $[I \phi]$ <sup>1</sup>

Sea ahora  $v$  una tensión alterna<sup>2</sup> aplicada a la bobina por la cual circula la corriente  $i$  y despreciemos la resistencia eléctrica del bobinado. Entonces por aplicación de la ley de Faraday al mismo se cumple siempre que:

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \quad (5.2)$$

pero antes vimos que se puede concebir que  $\phi = \phi(i)$ ; por tanto podemos escribir que:

$$v = N \frac{d\phi}{dt} = N \frac{\partial \phi}{\partial i} \frac{di}{dt} \quad (5.3)$$

La razón de utilizar la derivada parcial del flujo respecto de  $i$  recoge el hecho del supuesto de  $S$  &  $L$  constante, puesto que si estos variaran variaría el flujo a corriente constante. Como usualmente  $S$  &  $L$  son fijos puede utilizarse la derivada total.

Definamos ahora la AUTOINDUCTANCIA ELÉCTRICA DEL CIRCUITO O INDUCTANCIA como (por definición)

$$L = \frac{v}{di/dt} \quad (5.4)$$

Pero entonces es inmediato de lo anterior que

$$L = N \frac{\partial \phi}{\partial i} \quad (5.5)$$

Pero la derivada parcial es la pendiente en el punto de operación de la curva del hierro, observándose que la inductancia siempre decrece a medida que el punto de operación se mueve hacia la región de saturación del hierro. Si adoptamos la primera aproximación que el circuito magnético tuviera una curva lineal entonces se cumple que para circuitos magnéticos lineales:

$$L = N \frac{\phi}{i} \quad (5.6)$$

Si la curva la representamos en dos tramos lineales obsérvese e indicamos “el codo” de saturación por  $(\phi_s, i_s)$  que la inductancia cae a

$$L_s = N \frac{\phi - \phi_s}{i - i_s} \quad (5.7)$$

<sup>1</sup>Obsérvese la importancia conceptual de esta relación pues  $I$  es una magnitud eléctrica (corriente) mientras que  $\phi$  (flujo) es una magnitud magnética.

<sup>2</sup>Podría ser continua?

En estas condiciones de linealidad es muy fácil probar que

$$L_s = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (5.8)$$

siendo  $\mathfrak{R}$  la reluctancia equivalente del circuito magnético.

En el análisis de las máquinas es usual considerar al circuito magnético como lineal con un punto de operación nominal en el codo de saturación.

Consideremos ahora que al circuito magnético anterior le bobinamos en el lado  $L3$  un segundo bobinado de  $N2$  vueltas sometido a una tensión alterna  $v_2$  y llamemos  $N1$  el número de vueltas del bobinado en el lado  $L1$  así como  $v_1$  la tensión a que se somete. El flujo total que pasa ahora por el lado  $L1$  será el flujo generado por su bobinado más el flujo que pueda llegar (luego de las fugas) del bobinado 2, recíprocamente para el bobinado del lado  $L3$ . Entonces si  $k$  lo llamamos *coeficiente de acoplamiento* podemos escribir que:

$$\phi_{1T} = \phi_1 + k\phi_2 \quad (5.9)$$

$$\phi_{2T} = \phi_2 + k\phi_1 \quad (5.10)$$

Por tanto tendremos que:

$$v_1 = N1 \frac{\partial \phi_1}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + N1k \frac{\partial \phi_2}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt} \quad (5.11)$$

$$v_2 = N2 \frac{\partial \phi_2}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt} + N2k \frac{\partial \phi_1}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} \quad (5.12)$$

Definamos ahora como INDUCTANCIA MUTUA  $M_{ij}$  a:

$$M_{ij} = kN_i \frac{\partial \phi_j}{\partial i_j} \quad (5.13)$$

Resulta entonces la conocidas relaciones:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad (5.14)$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (5.15)$$

Si además el punto de operación está en la zona lineal del hierro y las bobinas comparten el mismo circuito magnético se prueba que:

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}} \quad (5.16)$$

## 5.2. Energía

Volvamos a considerar ahora el circuito magnético anterior (figura 5.1) con un solo bobinado. Supongamos además que en un cierto intervalo de tiempo ( $t$ ) la corriente del bobinado (sometido a una tensión  $v$ ) sube en forma monótona desde 0 a un cierto valor  $I_0$ .

Supongamos que las pérdidas Joule del bobinado son despreciables porque su resistencia lo es. La energía eléctrica que entrega la fuente será:

$$E_e = \int_0^t v \cdot i \cdot dt \quad (5.17)$$

Pero esa energía no fue disipada por efecto Joule que despreciamos, tampoco realizó ningún trabajo mecánico pues el circuito es estático, por tanto debe ser igual a la energía almacenada en el campo magnético de núcleo ferromagnético ( $E_M$ ). Por tanto  $E_e = E_M$ . Por otra parte sabemos que:

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \implies E_M = N \int_0^{\phi_0} i d\phi \quad (5.18)$$

Recordemos que el andamio  $\phi(i)$  era (salvo un factor de escala) el de la curva de magnetización del hierro. Por tanto la energía magnética almacenada en un circuito magnético está dada por  $N$  veces el área a la izquierda de la curva de magnetización y por debajo de  $\phi_0$ .

Supongamos ahora que la trayectoria magnética está compuesta por un material ferromagnético de sección  $S$  uniforme y con una longitud  $L$ . Entonces se cumple que  $HL = Ni$  y  $\phi = BS$  de donde se cumple, teniendo en cuenta que  $LS = V_{Fe}$  es el volumen de material ferromagnético del circuito que:

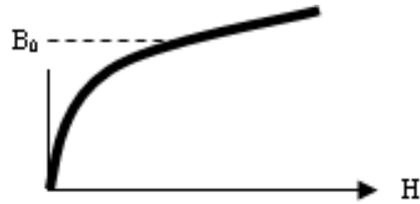


Figura 5.2: Curva típica

$$E_M = V_{Fe} \int_0^{B_0} H dB \quad (5.19)$$

### 5.2.1. Resultado trascendente

Si además ahora existe linealidad magnética entonces:

$$E_M = V_{Fe} \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (5.20)$$

Observar

- que un circuito magnético es capaz de almacenar mayor cantidad de energía a mayor volumen ( $V_{Fe}$ ) de hierro contenga, a mayor densidad magnética se establezca ( $B$ ) o a mayor inductancia posea ( $L$ ).
- que la conversión de energía eléctrica a magnética resulta extremadamente sencilla (y recíprocamente<sup>3</sup>)
- Que el área entre la curva de magnetización y el eje  $B$  da la energía almacenada o entregada por el circuito magnético según sea su evolución creciente o decreciente<sup>4</sup>.

### 5.3. Pérdidas en los Circuitos Magnéticos. Perdidas en el Hierro

Los flujos que varían en el tiempo producen pérdidas de energía en los materiales magnéticos debido a dos fenómenos: la existencia de histéresis en estos materiales y el llamado “efecto Foucault” de las corrientes parásitas inducidas en el hierro. A estas dos fuentes de pérdidas de energía se les llama “pérdidas del hierro” o “pérdidas del núcleo”. Debido a que las máquinas eléctricas, como más adelante se verá, los flujos en general varían en el tiempo la determinación de estas pérdidas de energía resultan muy importantes en la práctica.

### 5.4. Pérdidas de Histéresis

Hemos observado que los materiales magnéticos presentan un andamamiento en el plano  $[H B]$  como el indicado en la figura 5.3 en el cual la permeabilidad es diferente para una intensidad de campo  $H$  que aumenta que para una que disminuye. El ciclo siempre tiene el sentido indicado en la figura 5.3.

Por tanto si la  $Fmm(H)$  se lleva a través del ciclo completo ( $Hmax, -Hmax, Hmax$ ) la inducción  $B$  se moverá a través de la curva con los sentidos indicados. En consecuencia la energía que almacena el circuito ( $H$  crecientes) es MAYOR que la energía que entrega ( $H$  decrecientes) de acuerdo a la expresión  $E = V_{Fe} \int H dB$ . Luego es fácil ver que por cada ciclo las pérdidas de energía estará dada por **ÁREA DEL CICLO DE HISTÉRESIS** multiplicada por el volumen de hierro.

Si la frecuencia de variación del campo es  $f$  indica la cantidad de ciclos por segundo que existen. Luego la potencia de pérdidas por histéresis serán proporcionales a  $f$  (ciclos/segundos o  $Hz$ ) En la realidad los ciclos de histéresis no tienen una función explícita ( $H - B$ ) sino que dependen de

<sup>3</sup>Mostrarlo.

<sup>4</sup>Esta observación es central para lo que sigue.

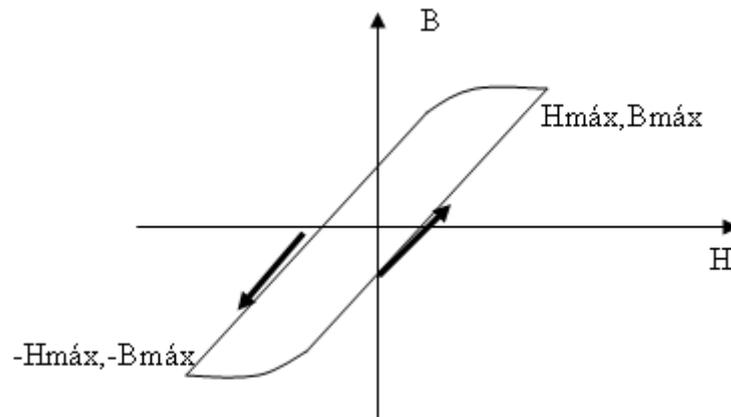


Figura 5.3: Curva de Histeresis

cada tipo de material por lo cual se utiliza una expresión empírica que tiene la forma:

$$P_{Histeresis} = f \cdot V_{Fe} \cdot B_{Max}^n \text{ con } n \text{ que puede variar entre } 1,5 \text{ y } 2,5 \quad (5.21)$$

#### 5.4.1. Pérdidas de Foucault

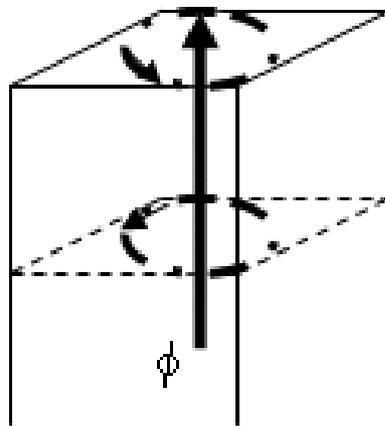


Figura 5.4: Corrientes de Foucault

Si someto un material a un flujo magnético alterno por aplicación de la ley de Faraday tendré necesariamente *f.e.m* inducidas en el seno del mismo que dará lugar a corrientes parásitas tanto más altas cuanto menor resistividad eléctrica tenga el material o mayor la densidad de flujo utilizada.

La figura 5.4 ilustra esquemáticamente el efecto. Las corrientes circularán en planos normales al flujo que las origina. Estas corrientes, luego provocarán necesariamente pérdidas Joule en el seno del material. Obsérvese que en el seno del material ferromagnético de un circuito magnético esto siempre acontece. De no tomarse algún tipo de medidas estas corrientes pueden ser muy

importantes en los núcleos habida cuenta de las altas densidades de flujo que deben ser utilizadas.

En general se toman dos tipos de medidas en los núcleos magnéticos. Ambas apuntan a aumentar la resistencia eléctrica del material:

**Laminació** El núcleo en lugar de ser una pieza única, se forma apilando láminas de material ferromagnético aisladas entre sí, esto hace aumentar la resistencia por disminución de la Sección, por tanto cuanto más finas sean las láminas menor importancia tendrá el efecto. Este procedimiento se usa siempre en los núcleos sometidos a campos alternos y su manufactura es una de las causas más importantes del costo de los núcleos de aplicación práctica. En el proceso se debe cuidar que no exista ningún punto de cortocircuito entre las láminas debiéndose además utilizar materiales aislantes (madera) para realizar el zunchado de las láminas.

**Contaminación del Hierro con Silicio** a fin de elevar la resistividad del material sin provocar un desmejoramiento sensible de las propiedades magnéticas del hierro utilizado.

El cálculo preciso de estas corrientes escapa a los fines de este curso, sin embargo resulta útil conocer el cálculo aproximado el cual puede ser consultado en cualquier libro de Máquinas Eléctricas en particular en MAQUINAS de L.W. Match pag. 37 a 39.

Se puede ver que la potencia de pérdidas por efecto Foucault, para frecuencias no superiores a  $60Hz$  pueden expresarse como:

$$P_{Foucault} = k \cdot f^2 \cdot V_{Fe} \cdot B_{Max}^2 \quad (5.22)$$

Obsérvese que ahora la dependencia tanto con la frecuencia como con la densidad magnética máxima es con el cuadrado de ambos en forma precisa.

Obsérvese que si el circuito es excitado por una corriente continua entonces  $f = 0$  con lo cual no hay pérdidas en el hierro y por lo tanto los núcleos no es necesario que sean laminados.