# Sistemas Lineales 2 - Práctico 1

Transformada de Laplace y modelado de sistemas

$2^{do}$ semestre 2013

---

## *Transformada de Laplace para funciones*

---

**1.-**

**a)** Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ dado. Halle la transformada de Laplace (incluyendo abscisa de convergencia) de

$$x(t) = Y(t)e^{\alpha t}.$$

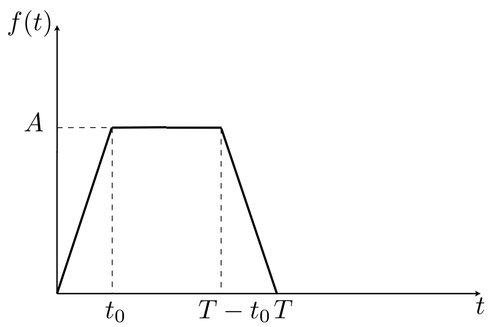
**b)** Deducir la transformada de Laplace de

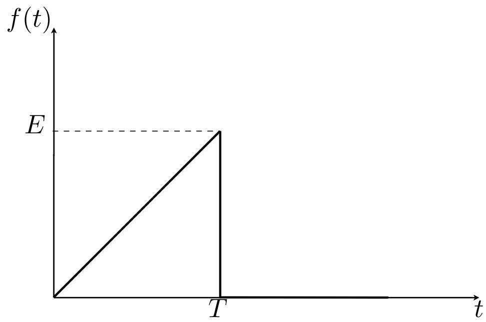
$$Y(t)f(t) = Y(t)\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right), \ \omega_n > 0,\ 1 > \zeta \geq 0$$

de dos maneras diferentes.

**2.-** Para cada una de las funciones indicadas, calcular su transformada de Laplace.

**a)**




**b)** $x(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & , t \in [0, \frac{\pi}{\omega_0}) \\ 0 & , t \notin [0, \frac{\pi}{\omega_0}) \end{cases}$, donde $\omega_0 > 0$.

**3.-** Hallar la transformada de Laplace de:

**a)** $Y(t)t^n$ **b)** $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, a] \\ 0 & , t \notin [0, a] \end{cases}$ **c)** $Y(t)t^n e^{-at}$ **d)** $Y(t)\frac{(1-e^{-at})}{a}$

**e)** $Y(t)e^{-at}\sin(\omega t)$ **f)** $Y(t)t^n e^{-at}\sin(\omega t)$

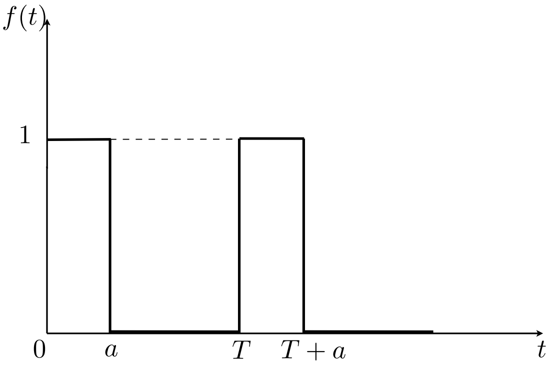



Figura 4.1: Onda cuadrada

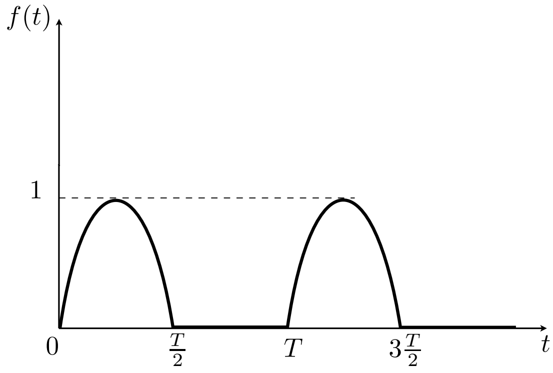



Figura 4.2: Seno rectificado en media onda

**4.-** Hallar la transformada de las señales periódicas de la figura 4.1 y 4.2:

**5.-** Calcular $f(t)$ siendo su transformada de Laplace $F(s)$:

**a)** $\dfrac{s+2}{2(s^2-1)}$ **b)** $\dfrac{3s+1}{5s^3(s-2)^2}$ **c)** $\dfrac{1-e^{-4s}}{3s^3+2s^2}$ **d)** $\dfrac{1}{s^3}$ **e)** $\dfrac{s+1}{s(s^2+4)}$ **f)** $\dfrac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$

**g)** $\dfrac{(1-e^{-\pi s})^2}{s(s^2+4)}$ en este caso, graficar.

**h)** $\dfrac{1}{s(s^2+1)^2}$ utilizando sólo propiedades de la transformada de Laplace (tenga en cuenta la transformada del seno)

**i)** En qué casos es posible aplicar el teorema del valor final?. Para esos casos utilice el teorema y corrobore el resultado con $f(t)$.

**6.-** Igual que el ejercicio anterior, para las siguientes transformadas:

**a)** $\dfrac{s^2+5}{s^3+2s^2+4s}$ **b)** $\dfrac{\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ **c)** $\dfrac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

**7.-** Resolver aplicando transformada de Laplace:

**a)** $x(t)+5\dot{x}(t)+4\ddot{x}(t)=1$ , $x(0)=3$ , $\dot{x}(0)=1$ , $t\geq 0$

**b)** $\displaystyle\int_0^t x(t)dt+5x(t)+4\dot{x}(t)=1$ , $x(0)=3$ , $t\geq 0$

**c)** $\dot{x}(t)+\alpha_0 x(t)=u(t)$ $\quad x(0)=x_0$ donde $x_0\in\mathbb{R}$, y donde $u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ está dada por:

I. $u(t)=0$.
II. $u(t)=Y(t)$.
III. $u(t)=Y(t)e^{\alpha_0 t}$, $\alpha_0\in\mathbb{R}$.
IV. $u(t)=Y(t)\cos(\omega_0 t)$ , $\omega_0>0$.

**8.-** Calcular las relaciones $\frac{V(s)}{I(s)}$ en cada uno de los siguientes casos (suponer condiciones iniciales nulas):

**a)** resistencia $R$ **b)** inductancia $L$ **c)** condensador $C$ **d)** serie de $R$ y $L$ **e)** paralelo de $R$ y $C$

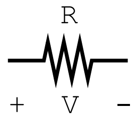



Figura 8.1: Resistencia: $V = Ri$

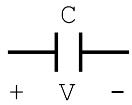



Figura 8.2: Condensador: $i = C\frac{dV}{dt}$

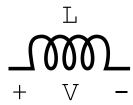



Figura 8.3: Inductancia: $V = L\frac{di}{dt}$

**9.-** La transformada de Laplace de una función $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, con $x_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, se define:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x\}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x_1\}(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{x_n\}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Asuma que las funciones $x_i$ cumplen las condiciones técnicas necesarias y defina la abscisa de convergencia absoluta asociada a $x$, $\delta_x$, como

$$\delta_x = \max_{\{1,\ldots,n\}} \{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}.$$

Note que con esta definición, la transformada de Laplace de una función $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^n$ hereda las propiedades que cumplen las funciones componentes $x_i$. Consideremos ahora el siguiente problema con condición inicial (en $\mathbb{R}^+$):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \ , \ t > 0 \ , \ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{9.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , y $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^m$ son dados, y cuya solución $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^n$ queremos hallar.

Demuestre que dicha solución $x$ se puede expresar como

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}(t)x_0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}B\,U(s)\right\}(t) \ , \ t \geq 0$$

donde $U(s) = \mathcal{L}\{u\}(s)$.

Note que en caso de que la función excitación $u = 0$, la solución (llamada **respuesta natural de sistema**) es

$$x(t) = x_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}(t)x_0, t \geq 0.$$

Y en caso de que la condición inicial $x_0 = 0$, la solución (llamada **respuesta forzada del sistema**) es

$$x(t) = x_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}B\,U(s)\right\}(t), t \geq 0.$$

Así la solución $x$ del problema con condición inicial resulta

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t) \ , \ t \geq 0 \ ,$$

donde $x_n$ es la solución con la condición inicial $x_0$ del problema pero con $u = 0$, y donde $x_f$ es la solución correspondiente a $x_0 = 0$ pero con la función exitación $u$ del problema.

Considere el problema 9.1 donde $A$, $B$, $x_0$ y $u$ son dados para cada caso. Halle la solución $x$ para cada problema a continuación.

**a)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$, donde $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está dado por:

**i.** $u(t) = 0$.

ii. $u(t) = Y(t)$.

iii. $u(t) = Y(t)\cos(\omega_0 t)$.

**b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$, $\omega_0 > 0$, donde $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ está dado por:

i. $u(t) = 0$.

ii. $u(t) = Y(t)$.

iii. $u(t) = Y(t)\cos(\omega_0 t)$.

## *Modelado de sistemas*

**10.-** *Sistema Eléctrico*

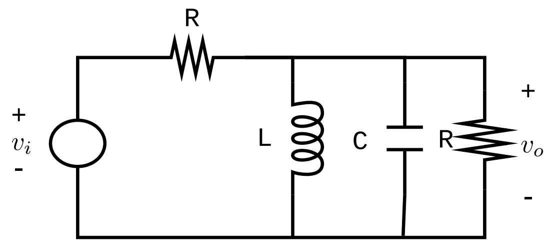



Figura 10.1: Circuito Eléctrico del ejercicio

**a)** Hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$.

**b)** Hallar la función de transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ en Laplace.

**c)** Determinar un conjunto de parámetros de forma que la transferencia tenga polos complejos conjugados con $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$

**d)** Bosquejar la respuesta al escalón.

**e)** Obtenga los valores iniciales y finales de $v_o(t)$ aplicando los teoremas respectivos a $V_o(s)$.

**11.-** *Sistema Mecánico*

En la figura 11.1 se presenta un sistema mecánico que consta de un resorte de constante elástica $K_s$, dos bloques de masa $M_1$ y $M_2$, vinculados mediante una cuerda inextensible a través de una polea de radio $R$ y momento de inercia $J$. Hay fricción dinámica entre $M_1$ y el piso, con constante $B$. El amortiguador tiene constante $K_d$.
Recordar que la relación entre el par $\tau$ ejercido sobre el cilindro y su velocidad angular $\omega$ es de la forma (segunda cardinal):

$$J\dot{\omega} = \tau$$

donde $\tau$ es el par total aplicado. Cada par se calcula como el producto de la fuerza correspondiente por el brazo de aplicación.

**a)** Hallar la ecuación diferencial que modela el sistema.

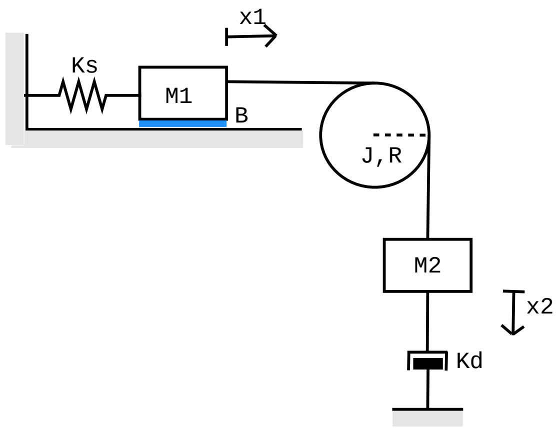



Figura 11.1: Sistema mecánico del ejercicio

**b)** Hallar los valores de los elementos involucrados para que la ecuación homogénea sea igual a la del ejercicio anterior (a menos de unidades).

**c)** Utilizando Laplace, hallar $x(t)$ si $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 2 - \sqrt{3}$.

**d)** Verificar que la respuesta del sistema del ejercicio anterior sin entrada ($v_i = 0$) y con condiciones iniciales $v_0(0) = x(0)$ e $i_C(0) = C\frac{1}{\dot{x}(0)}$ (corriente por el condensador) es análoga a la respuesta de la parte **b** (de nuevo, a menos de unidades).

**12.-** *Motor*

Un motor de corriente continua y excitación independiente puede ser modelado como muestra la figura:
Donde $V_A(t)$ es el voltaje aplicado en bornes del motor, $i_A(t)$ es la corriente que circula por el mismo, denominada

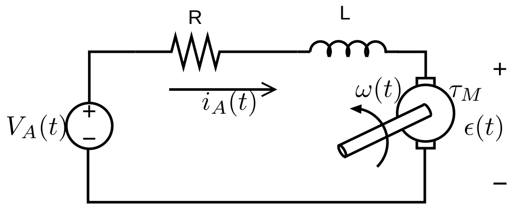



Figura 12.1: Motor del ejercicio

corriente de armadura. El voltaje $\epsilon(t)$ representa la $FEM$ inducida, $\omega(t)$ es la velocidad angular del eje y $\tau_M$ es el par que ejerce el motor sobre su eje. $R$ y $L$ son la resistencia y la autoinductancia de armadura respectivamente.
Desde el punto de vista eléctrico, el motor puede ser modelado mediante las variables $V_A$, $i_A$, $\epsilon$, $R$ y $L$.
Desde el punto de vista mecánico, es posible modelar la dinámica del motor mediante leyes de mecánica clásica, a saber, que el par total en el eje del motor sea proporcional a la aceleración angular del mismo. Esto es:

$$\tau_{total} = \tau_M - \tau_{carga} = J\dot{\omega}$$

donde $\tau_M$ es el par que ejerce el motor sobre su eje y $\tau_{carga}$ es el par que ejerce la carga acoplado el mismo. La constante $J$ se denomina momento de inercia y depende de la geometría y la masa de la carga, del eje y del rotor.
Estos subsistemas mecánico y eléctrico, no son disjuntos sino que preservan ciertos vínculos entre algunas de sus magnitudes, a saber, la velocidad angular del eje del motor es proporcional a su $FEM$ inducida, y el par motor ejercido es proporcional a la corriente de armadura.

El factor de proporcionalidad depende de aspectos constructivos del motor, además de su corriente de excitación. En este caso, la excitación es independiente de las variables anteriores y, suponiéndola constante, estos vínculos se pueden expresar del siguiente modo:

$$\epsilon = k\omega \qquad \tau_M = k i_A$$

donde el coeficiente de proporcionalidad $k$ es una constante del motor.

**a)** Hallar el sistema de ecuaciones diferenciales que rigen al sistema.

**b)** Suponiendo un par de carga nulo ($\tau_{carga} = 0$), mostrar que el sistema puede escribirse de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{i}_A \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w \\ i_A \end{pmatrix} + BV_A$$

Donde $A$ es una matriz $2 \times 2$ y $B$ una matriz $2 \times 1$ que se determinarán.

**c)** Hallar $\omega(t)$ cuando la entrada $V_A(t)$ es un escalón.

**d)** Si el par de carga no fuera nulo ($\tau_{carga} \neq 0$), rehacer la parte **a**. ¿Cómo cambiaría el modelo matricial de la parte **b**?.

Muchas cargas aplicadas al eje de un motor son totalmente o en parte de tipo viscosas, es decir que el par que ejercen sobre el eje del motor depende de su velocidad, un ejemplo de esto es un ventilador. Este tipo de cargas pueden ser modeladas del siguiente modo:

$$\tau_{viscoso} = b\omega$$

donde $b$ es una constante de viscosidad.

**e)** Suponiendo un par de carga del tipo viscoso como el anterior, pensar cómo cambiaría ahora el modelo matricial de la parte **b**.

## *Transformada de Laplace para distribuciones*

**13.-** Hallar la transformada de Laplace de: **a)** $\delta(t)$ **b)** $\delta^n(t)$ , $n \in \mathbb{N}$ **c)** $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$ , $T \in \mathbb{N}$

**14.-** Calcular $f(t)$ siendo su transformada de Laplace $F(s)$: **a)** $\left(\frac{s}{s+1}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1-as}{s}\right)^2$ **c)** $\frac{1}{1+e^{-Ts}}$

# *Problemas complementarios*

**15.-** Sea $\{u_k\}$ una sucesión de funciones $u_k : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como: $u_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_k} & , t \in [0, \Delta_k) \\ 0 & , t \notin [0, \Delta_k) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$.

Donde $\{\Delta_k\} \subset \mathbb{R}^+$ es una sucesión que cumple que: $\Delta_k > 0, \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to+\infty} \Delta_k = 0$.
Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

**a)** Demuestre que, para cada $t > 0$, se verifica que:

$$\lim_{k\to+\infty} (f * u_k)(t) = f(t).$$

Considere un sistema lineal, invariante en el tiempo, cuyo comportamiento está descrito a través de la ecuación 9.1:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ t > 0,\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ son dados, donde la entrada del sistema es la función $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya salida (o respuesta) observada es la función $y : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$y(t) = Cx(t),\ t > 0.$$

$C \in \mathbb{R}^{1\times n}$ es dada.

**b)** Demuestre que en este caso, la respuesta general del sistema está dada por:

$$y(t) = \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}(t)x_0}_{y_n(t)} + \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}BU(s)\right\}(t)}_{y_f(t)},\ t > 0,$$

donde $U(s) = \mathcal{L}\{u\}(s)$

Con referencia al sistema introducido en la parte anterior, definimos la función $H$ como:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

y le llamaremos $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ a la función tal que $H = \mathcal{L}\{h\}$.

**c)** Demuestre que: $y_f(t) = (h * u)(t),\ t > 0$.

Se define la familia de funciones $y_f(.; u_k) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ como $y_f(t) = (h * u)(t),\ t > 0$ (respuesta del sistema en reposo, ante entradas $u_k$).

**d)** Demuestre que:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{C(sI - A)^{-1}B\right\}(t) = \lim_{k\to+\infty} y_f(t; u_k).$$

Esta función $h$ es la respuesta al impulso y la función $H = \mathcal{L}\{h\}$ es referida como la función de transferencia del sistema.
Notar que se verifica que:

$$Y_f(s) = \mathcal{L}\{y_f\}(s) = H(s)U(s).$$

**16.-** Se considera un sistema con función de transferencia $H(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ , $1 > \zeta > 0$ , $\omega_n > 0$.

**a)** Hallar la respuesta a un escalón de amplitud $E$.

**b)** Calcular, en función de $\zeta$, el valor de pico de dicha respuesta temporal.

**c)** Determinar $t_s$ (tiempo de asentamiento), tiempo a partir del cual la respuesta dista menos de un 5 % del valor en régimen. **Sugerencia:** utilizar la envolvente para el cálculo.

## 17.- *Modelo Térmico*

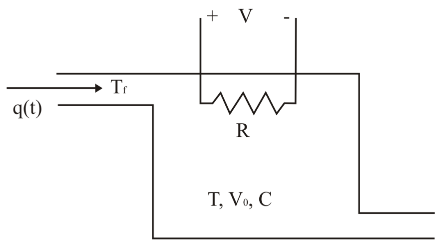



Figura 17.1: Modelo térmico del ejercicio

El sistema térmico de la figura 17.1 recibe un caudal constante $q(t)$ que es igual al caudal de salida. $T(t)$ es la temperatura del líquido (que se supone uniforme en el tanque), $V_o$ el volumen del tanque y $c$ el calor específico volumétrico del líquido. El líquido entrante entra a una temperatura constante igual a $T_f$.

**a)** Modelar la variación de temperatura del líquido en el tanque.

**b)** Realizar un cambio de variable para poder pasar a Laplace (Sugerencia: Tomar como variable $(T_f - T)$ y considerar como entrada $V^2$).

**c)** Utilizando el teorema de valor final, encuentre una entrada para que la temperatura de salida se estabilice en $2T_f$.