SISTEMAS LINEALES 2

EXAMEN JULIO 2012

PROBLEMA 1

$$Y(s) = H(s)\,U(s) \qquad H(s) = \frac{1 - Ts}{1 + \frac{T}{2}s}$$

1.a

$$\text{TVI}: \; y(t=0^+) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{1}{s} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1-Ts}{1+\frac{T}{2}s} = -2$$

$$\boxed{y(t=0^+) = -2}$$

$$\text{TVF}: \; y(t\to+\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s} H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1-Ts}{1+\frac{T}{2}s} = 1$$

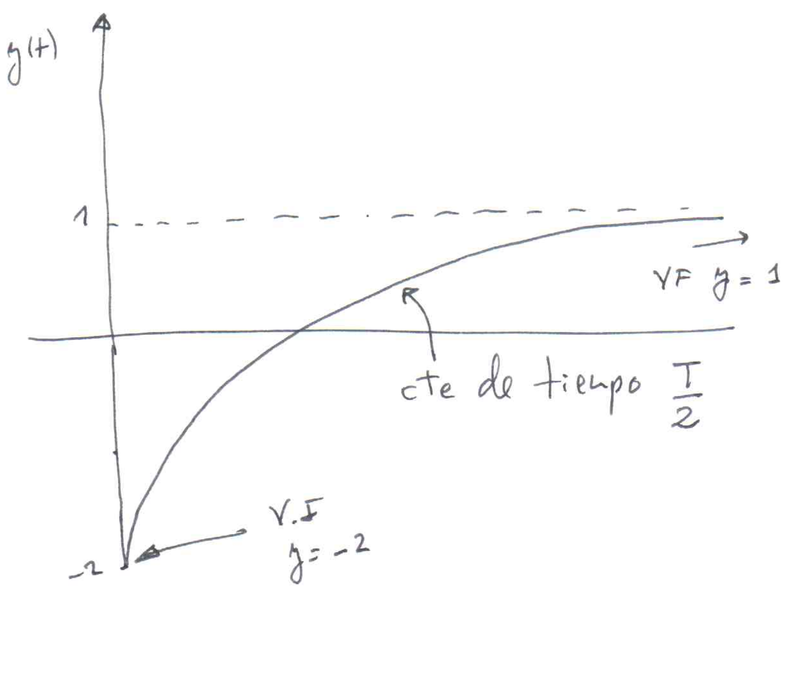
Dado que el sistema $H(s)$ es estable.

$$\boxed{y(t\to+\infty) = 1}$$

1.b

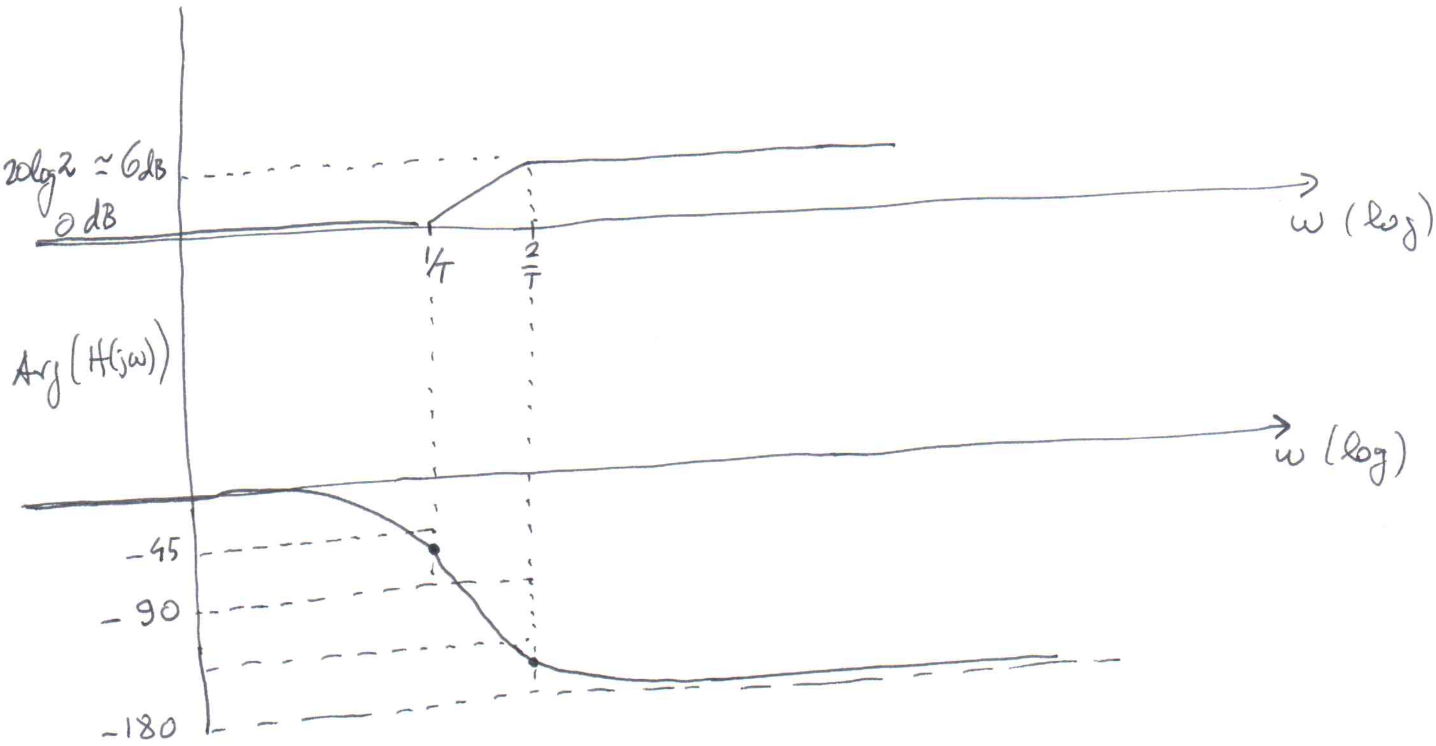
$$y(s) = H(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{1-Ts}{1+\frac{T}{2}s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{3}{2}T}{1+\frac{T}{2}s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{3}{s+\frac{2}{T}} \Rightarrow y(t) = Y(t)\left[1 - 3e^{-\frac{t\cdot 2}{T}}\right]$$



2.a $H(s) = \dfrac{1 - Ts}{1 + \frac{T}{2}s}$

El diagrama empieza con $H(j0) = 1$, tiene un cero de fase no mínima en $s = +\frac{1}{T}$ y un polo en $s = -\frac{2}{T}$.



2.b $x(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) + \operatorname{sen}(2\pi f_1 t)$

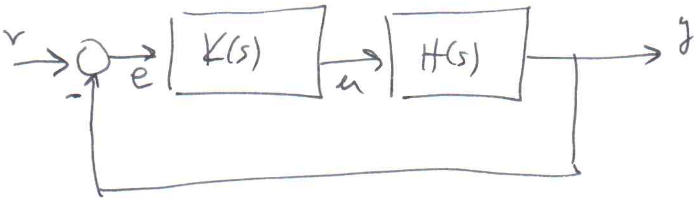
f_0 está a la izquierda del cero y f_1 a la derecha del polo

$H(j2\pi f_0) = 1$; $H(j2\pi f_1) = -2$

⇒ la respuesta en régimen, por superposición es

$$\boxed{y(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) - 2\operatorname{sen}(2\pi f_1 t)}$$

3.



$$e(s) = \frac{1}{1+K(s)H(s)} \cdot r(s)$$

error frente a un escalón: $e_s(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{1+K(s)H(s)}$

error en régimen (en caso de que sea estable el sistema) es

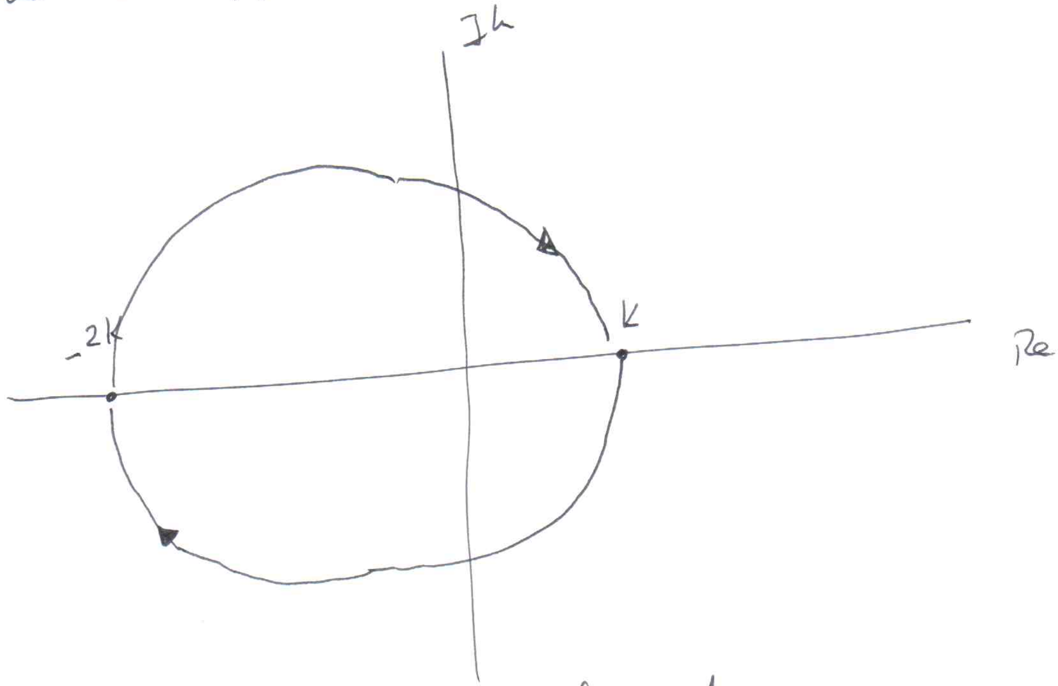
$$e_\infty(k) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s}\frac{1}{1+K(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K(s)}$$ pues $\lim_{s\to 0} H(s) = 1$

$\Rightarrow \boxed{e_\infty(k) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K(s)} \text{ cuando el sistema es estable}}$

a) $K(s) = k$.

$\Rightarrow K(s)H(s) = kH(s)$.

Me valgo del diagrama de Bode de $H(s)$ para obtener el diagrama de Nyquist:



$Z = N - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{P}}$ $\Rightarrow$

$Z = N$ será estable si no encierra el punto -1.

$\Rightarrow$ ESTABLE si $-1 < -2k$ $\Rightarrow$ $1 > 2k$

$\Rightarrow \boxed{\text{ESTABLE } 0 < k < 1/2}$

3b

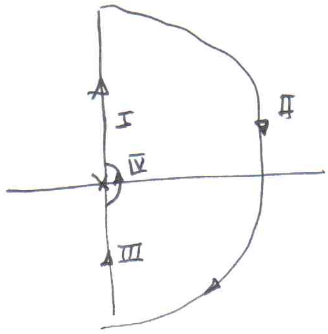
$$\boxed{e_\infty(k) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1+k} \qquad \text{con} \quad 0 < k < 1/2}$$

3c. El mínimo valor de e_∞ se alcanza asintóticamente para

$k \to 1/2$ $\qquad \underline{e_\infty} = \dfrac{1}{1 + 1/2} = \dfrac{2}{3}$.

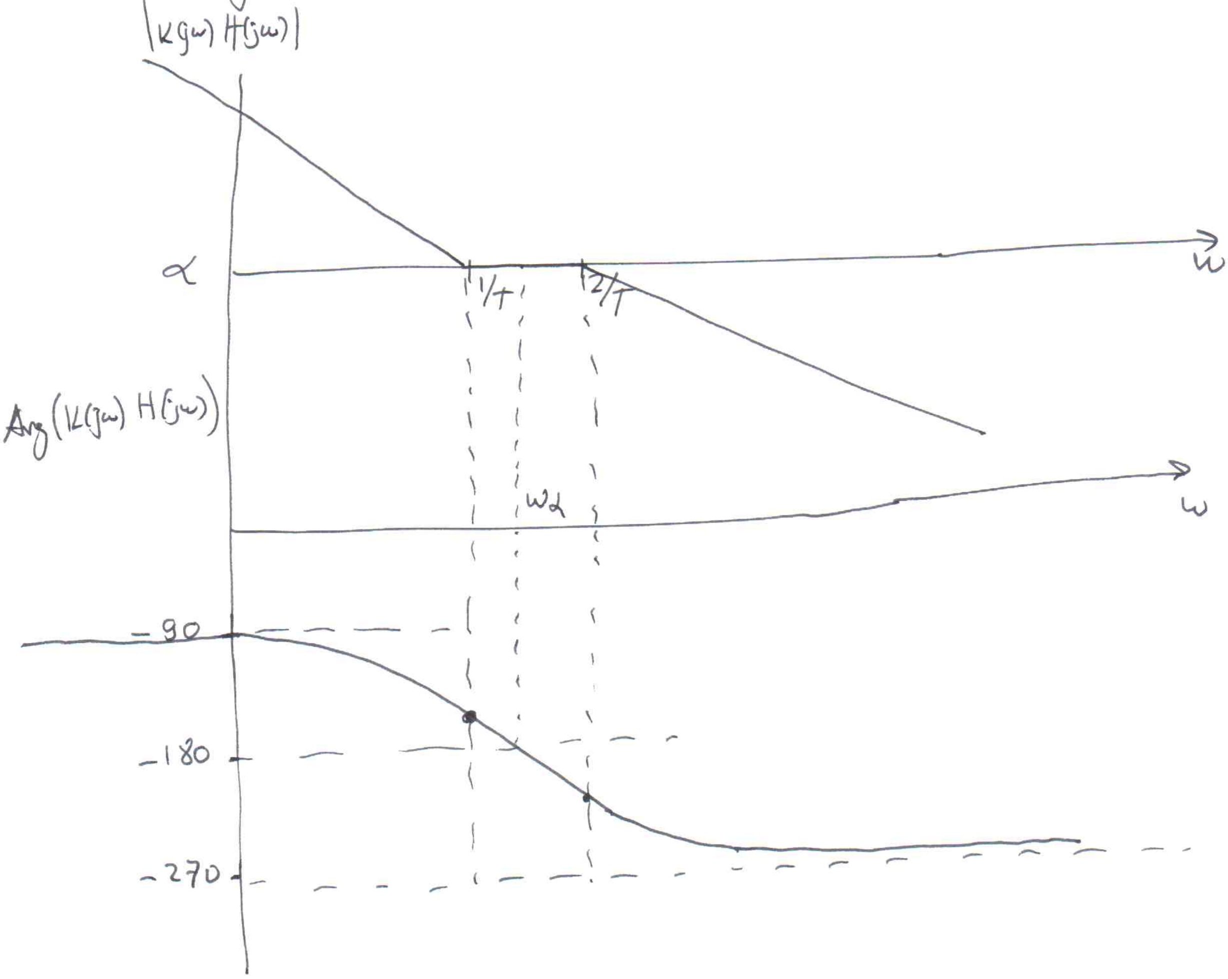
4. $K(s) = k \dfrac{1}{Ts}$

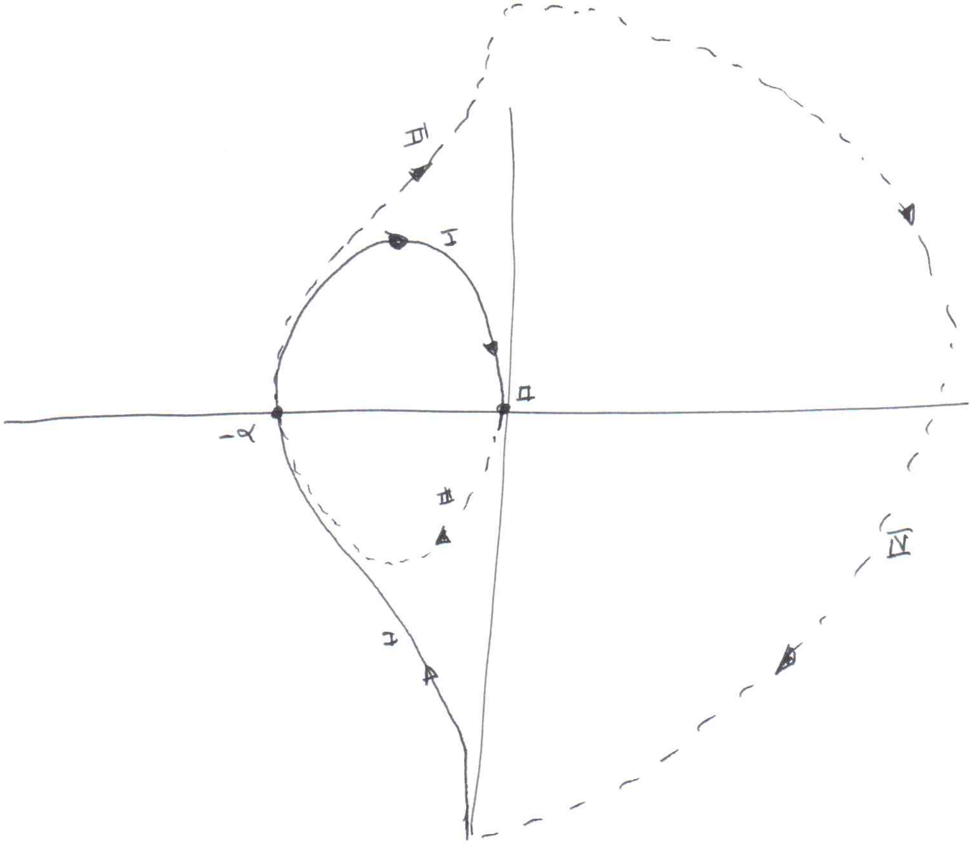
$$K(s)\,H(s) = k \, \frac{1}{Ts} \, \frac{1 - Ts}{1 + \frac{T}{2} s}$$



4.a

El diagrama de Bode queda





La discusión de la estabilidad requiere conocer α (y w_α)

$$\angle K(jw_\alpha)\,H(jw_\alpha) = -180$$

$$\angle \frac{k}{jw_\alpha T} \cdot \frac{1-jTw_\alpha}{1+j\frac{T}{2}w_\alpha} = -90^\circ + \angle \frac{1-jw_\alpha T}{1+j\frac{w_\alpha T}{2}} = -90 + \angle (1-jw_\alpha T)\left(1-j\frac{w_\alpha T}{2}\right)$$

$$= -90^\circ + \angle\left[\left(1-\frac{w_\alpha^2 T^2}{2}\right) + j\left(-\frac{3w_\alpha T}{2}\right)\right] = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{w_\alpha^2 T^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{T}$$

$$K(jw_\alpha)\,H(jw_\alpha) = \frac{k}{j\sqrt{2}} \cdot \frac{j\left[-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]}{1+\frac{2}{4}} = -\frac{k}{\sqrt{2}}\,\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{3/2} = -k.$$

$\alpha = k.$

ESTABLE si $-1 < -k \Rightarrow$ $\boxed{\text{ESTABLE si } k < 1}$

4.b $\boxed{e_\infty(k) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{k}{Ts}} = 0 \quad \forall k \in [0,1]}$

4.c el error en régimen es nulo para aquellos controladores integrales que preserven la estabilidad $(0 < k < 1)$.

Solución Problema 2 . SISTEMAS LINEALES 2 julio 2012 1

1. El operacional trabaja como comparador, dada la realimentación positiva

Transformador: $v_2 = L \frac{di_2}{dt}$; $v_1(t) = M \frac{di_2}{dt}$; $i_1 = 0$ (por el operacional)

SIEMPRE VALE $e_+ = \frac{1}{2} V_0$

$$e_- = V_0 - v_1 = V_0 - \frac{3}{4} L \frac{di_2}{dt}$$

$\Rightarrow$ VA A CONMUTAR CUANDO $e_+ = e_-$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} V_0 = V_0 - \frac{3}{4} L \frac{di_2}{dt}$

CONMUTA cuando $\frac{V_0}{2} = \frac{3}{4} L \frac{di_2}{dt}$

Además $V_0 = L \frac{di_2}{dt} + R i_2 \Rightarrow L \frac{di_2}{dt} = V_0 - R i_2$

y la conmutación se da para $\frac{V_0}{2} = \frac{3}{4} (V_0 - R i_2) \Rightarrow$ $\boxed{i_2 = \frac{V_0}{3R}}$ VALORES DE CONMUTACIÓN

INICIALMENTE
$i_2(0) = 0$

$$\Rightarrow i_2(t) = \underbrace{i_i}_{0} e^{-t/\tau} + \underbrace{i_f}_{\frac{V_{cc}}{R}} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2(t) = \frac{V_{cc}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

$$v_1(t) = \frac{3}{4} \frac{L}{R} V_{cc} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{v_1(t) = \frac{3 V_{cc}}{4} e^{-t/\tau}}$$

$$\boxed{v_0(t) = +V_{cc}}$$

hasta la conmutación

$$i_2(t) = \frac{V_{cc}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \underbrace{\frac{V_{cc}}{3R}}_{\frac{V_0}{3R}} \Rightarrow 1 - e^{-t/\tau} = 1/3$$

$$e^{-t/\tau} = \frac{2}{3} \qquad \boxed{t_1 = \tau \ln 3/2}$$

SEGUNDO TRAMO $\quad \sigma := t - t_1$

$$i_2(t_1) = \frac{V_{cc}}{3R} \qquad i_2(\sigma) = \frac{V_{cc}}{3R} e^{-\sigma/\tau} - \frac{V_{cc}}{R}\left(1 - e^{-\sigma/\tau}\right) = \boxed{\frac{V_{cc}}{R}\left[-1 + \frac{4}{3} e^{-\sigma/\tau}\right] = i_2(\sigma)}$$

$$V_0 = -V_{cc}$$

$$v_1(\sigma) = \frac{3}{4} L \frac{V_{cc}}{R} \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\sigma/\tau} \qquad \boxed{v_1(\sigma) = -V_{cc}\, e^{-\sigma/\tau}}$$

$$\boxed{V_0 = -V_{cc}}$$

CONMUTA CUANDO

$$i_2(\sigma) = \frac{V_0}{3R} \Rightarrow \frac{V_{cc}}{R}\left[-1 + \frac{4}{3} e^{-\sigma/\tau}\right] = -\frac{V_{cc}}{3R}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} e^{-\sigma/\tau} = \frac{2}{3} \qquad e^{-\sigma_1/\tau} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \tau \ln 2}$$

$$\boxed{i_2(\sigma_1) = -\frac{V_{cc}}{3R}}$$

TERCER TRAMO $\quad \sigma := t - t_1 - \sigma_1$

$$V_0 = V_{cc} \qquad i_2(\sigma) = -\frac{V_{cc}}{3R} e^{-\sigma/\tau} + \frac{V_{cc}}{R}\left(1 - e^{-\sigma/\tau}\right) = \boxed{\frac{V_{cc}}{R} - \frac{V_{cc}}{R}\left[\frac{4}{3}\right] e^{-\sigma/\tau} = i_2(\sigma)}$$

$$v_1(\sigma) = \frac{3}{4} L \frac{di_2}{d\sigma} \qquad \boxed{v_1(\sigma) = V_{cc}\, e^{-\sigma/\tau}}$$

$$\boxed{V_0 = V_{cc}}$$

CONMUTA en

$$i_2(\sigma_2) = \frac{V_{cc}}{3R} \Rightarrow \frac{V_{cc}}{R}\left[1 - \frac{4}{3} e^{-\sigma_2/\tau}\right] = \frac{V_{cc}}{3R}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{3} e^{-\sigma_2/\tau} \Rightarrow e^{-\sigma_2/\tau} = 1/2$$

$$\boxed{\sigma_2 = \tau \ln 2}$$

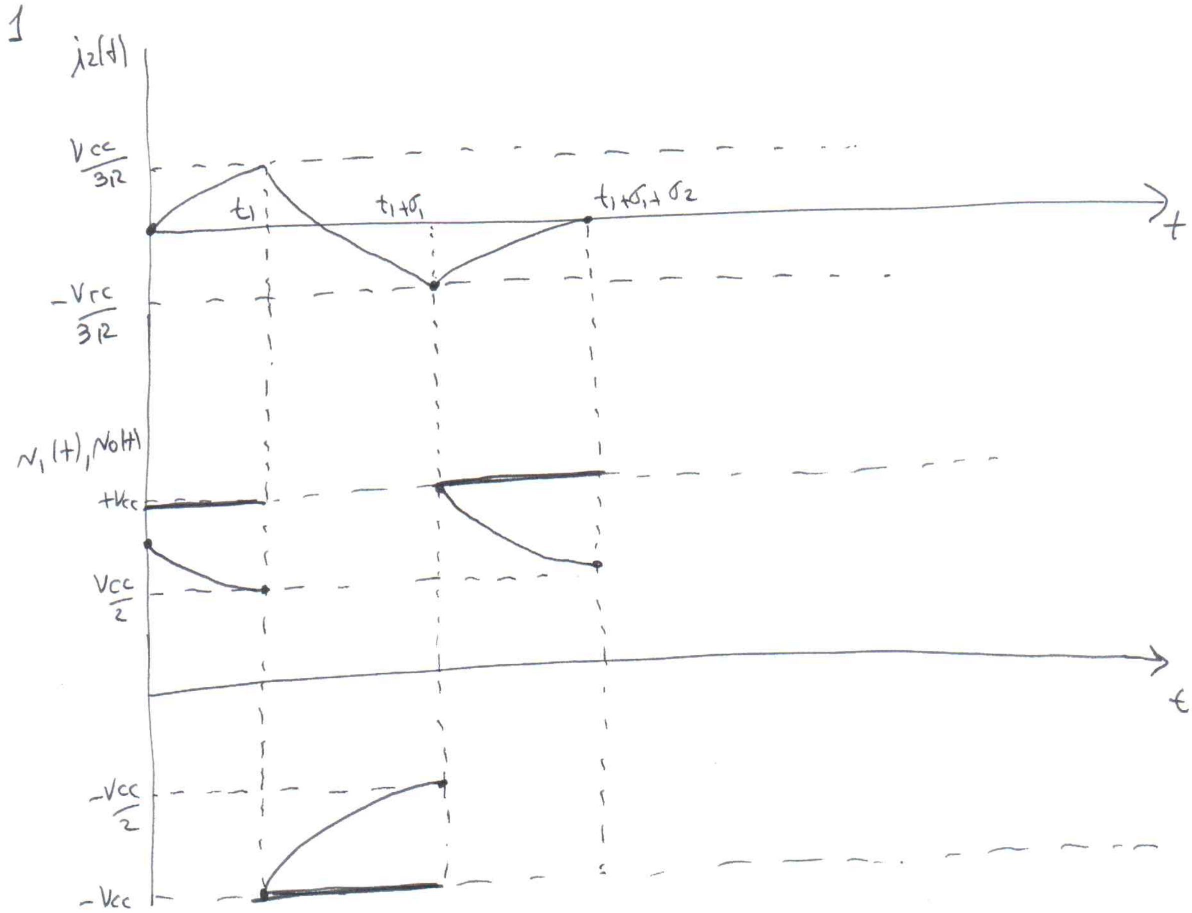
OBSERVAR QUE

$$i_2(t = t_1 + \sigma_1 + \sigma_2) = i_2(t = t_1) = \frac{V_{cc}}{3R}$$

Como i_2 es la única variable de estado, el circuito ya está en régimen.

Problema 2

Parte 1



Parte 2

El periodo es $\sigma_1+\sigma_2 = \boxed{2\tau L2 = T}$

parte 3

El circuito de salida consta de un rectificador de media onda que no carga la etapa previa y un filtro pasabajos con una constante de tiempo $RC >> T$. ENTONCES $v_b(t) = \overline{v_a(t)} = \frac{V_{cc}}{2}$.